

Θέμα 1

(α) **[10]** Υπολογίστε τη λύση του Π.Α.Τ.: $y' = y \tan(t) + \sin(t)$, $y(0) = 1$ για $-\pi/2 < t < \pi/2$.

(β) **[10]** Για τη Δ.Ε. $y'(e^t \cos y + y) + f(y)e^t + t^2$, βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(y)$ για τις οποίες η Δ.Ε. είναι πλήρης και αν για μία από αυτές $f(\pi) = 0$ υπολογίστε την (πεπλεγμένη) λύση της Δ.Ε.

Θέμα 2

(α) **[6]** Αν η $y(t) = e^{3t} - 2e^{-9t}$ είναι μία λύση της Δ.Ε. $y'' - 9y = g(t)$, ποιά από τις παρακάτω είναι επίσης λύση της Δ.Ε. (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας)

(1) $y(t) = e^{3t} - e^{-3t}$ (2) $y(t) = 2e^{3t} - 4e^{-9t}$ (3) $y(t) = e^{3t} + 2e^{-9t}$ (4) $y(t) = -3e^{-3t} - 2e^{-9t}$ (5) όλες .

(β) **[6]** Αν για τη Δ.Ε. $y'' - 2ty' - 2y = 0$ η $y_1(t) = e^{t^2}$ είναι μία λύση της, υπολογίστε τη γενική λύση $y(t)$ της Δ.Ε.

(γ) **[14]** Υπολογίστε τη γενική λύση της Δ.Ε. (**χωρίς** τη χρήση μετασχηματισμού Laplace)

$$ty'' + 4ty' + 4ty = e^{-2t}, t > 0.$$

Θέμα 3

(α) **[9]** Υπολογίστε τη γενική (πραγματική) λύση του γραμμικού συστήματος Δ.Ε. $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$, αν για τον πίνακα $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ γνωρίζετε ότι έχει μία ιδιοτιμή $\lambda = 3 + 2i$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = [1, 2i]^T$.

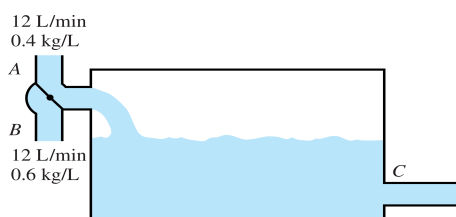
(β) **[10]** Υπολογίστε τη λύση του συστήματος Δ.Ε. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \vec{x}$, με $\vec{x}(0) = [3, 4]^T$ (**χωρίς να μετασχηματιστεί σε διαφορική δεύτερης τάξης**).

(γ) **[6]** Υπολογίστε τον πίνακα $e^{\mathbf{A}t}$.

Θέμα 4

(α) **[6+6]** Υπολογίστε: (i) το μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{u(t-4)(t^2 - 7t + 12)\}$ και (ii) τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $F(s) = \frac{2s - 7}{s^2 + 2s + 10}$.

(β) **[18]** Ένα δοχείο ανάμειξης περιέχει αρχικά 500 λίτρα (L) διαλύματος αλατιού συγκέντρωσης 0.2 kg/L . Για τα πρώτα 10 λεπτά (min) λειτουργίας του η βαλβίδα A είναι ανοιχτή προσθέτοντας 12 L/min διαλύματος συγκέντρωσης αλατιού 0.4 kg/L . Μετά τα 10 λεπτά κλείνει η βαλβίδα A και ανοίγει η B η οποία προσθέτει 12 L/min διαλύματος συγκέντρωσης 0.6 kg/L . Αν από τη βαλβίδα εξόδου C εξέρχονται συνεχώς 12 L/min διαλύματος, υπολογίστε πόσο αλάτι, σε kg, βρίσκεται στο δοχείο στο χρόνο t με χρήση του μετασχηματισμού Laplace και της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Θέμα 1

$$(α) y(t) = \frac{1}{\cos t}(-0.5 \cos(t)^2 + 3/2) = \frac{1}{\cos t}(0.5 \sin(t)^2 + 1)$$

(β) $f(y) = \sin y + C$ και αν $f(\pi) = 0$ η $f(y) = \sin y$. Η (πεπλεγμένη) λύση είναι: $e^t \sin y + t^3/3 + y^2/2 = C$.

Θέμα 2

(α) Σωστή απάντηση η (iv) μιας και η λύση της ομογενούς είναι $y_c = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

(β) Από τη ΔΙΑΛΕΞΗ 5 (σελ 11) υπολογίζουμε μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση και έχουμε

$$y(t) = c_1 e^{t^2} + c_2 e^{t^2} \int_{t_0}^t e^{-s^2} ds.$$

(γ) Η λύση της ομογενούς είναι

$$y_c = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

η ειδική λύση (με μέθοδο Lagrange) είναι

$$y_p = t e^{-2t} (\ln t - 1)$$

Άρα $y(t) = y_c + y_p = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + t e^{-2t} (\ln t - 1)$.

Θέμα 3

(α) Γνωρίζουμε ότι μια λύση είναι η $\vec{v} e^{\lambda t}$ από όπου παίρνουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις (από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της) βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 8 σελ. 21-22. Άρα η λύση

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\ -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t \end{bmatrix} e^{3t}$$

(β) Ο πίνακας του συστήματος έχει διπλή (ατελή) ιδιοτιμή $\lambda = -3$ και ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Βρίσκοντας ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_2$ η λύση είναι

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{-3t} + c_2 (\vec{v}_1 t + \vec{v}_2) e^{-3t} = \begin{bmatrix} 4c_1 + c_2 + 4c_2 t \\ 4c_1 + 4c_2 t \end{bmatrix} e^{-3t}$$

όπου από αρχ. συνθήκες, $c_1 = 1$ και $c_2 = -1$.

(γ) Από το (β) ερώτημα, βρίσκουμε ένα θεμελιώδη πίνακα λύσεων $\mathbf{X}(t)$ και (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 δελ. 10)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(0)^{-1} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 4t+1 & -4t \\ 4t & (1-4t) \end{bmatrix}$$

Θέμα 4

(α) Για το (i) $F(s) = e^{-4s} \cdot \frac{s+2}{s^3}$ και για το (ii) $f(t) = 2e^{-t} \cos(3t) - 3e^{-t} \sin(3t)$.

(β) Αν $y(t)$ είναι η ποσότητα αλατιού στο δοχείο στο χρόνο το Π.Α.Τ. που περιγράφει το πρόβλημα είναι

$$y' = -0.024y + 4.8 + 2.4u(t-10), \quad y(0) = 100kg$$

Η λύση

$$y(t) = 100e^{-0.024t} + 4.8(41.67 - 41.67e^{-0.024t}) + 2.4(41.67 - 41.67e^{-0.024(t-10)})u(t-10)$$