

Θέμα 1

(α) **[8]** Χωρίς να λύσετε το Π.Α.Τ.: $y' - 1 = 0.05(8y - y^2)$, $y(0) = y_0$ για $t > 0$, περιγράψτε τη συμπεριφορά της λύσης του, $y(t)$, σε βάθος χρόνου για τις πιθανές τιμές του y_0 .

(β) **[10]** Υπολογίστε τη λύση, $y(t)$, του Π.Α.Τ. $y' + y \sin t = g(t)$, $y(0) = 3$, με $g(t) = \begin{cases} \sin t & \text{αν } 0 \leq t \leq \pi \\ -\sin t & \text{αν } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$.

(γ) **[12]** Για το Π.Α.Τ. $(y + at)y' + (ay + bt) = 0$, $y(0) = y_0$, γνωρίζουμε ότι η λύση του είναι $y(t) = -t - \sqrt{4 - t^2}$. Υπολογίστε τις σταθερές a, b και y_0 .

Θέμα 2

(α) **[12]** Δεξαμενή χωρητικότητας 500 λίτρων (l) περιέχει αρχικά 100 l καθαρού νερού. Αλατισμένο νερό περιεκτικότητας σε αλάτι 30gr/ l μπαίνει στη δεξαμενή με ρυθμό 5 l /λεπτό και το καλά αναμειγμένο διάλυμα βγαίνει από τη δεξαμενή με ρυθμό 4 l /λεπτό. Υπολογίστε ποιά θα είναι η περιεκτικότητα σε αλάτι στη δεξαμενή όταν αυτή θα έχει γεμίσει στο μισό της χωρητικότητάς της.

(β) **[12]** Δώστε μία γραμμική Δ.Ε. η οποία να έχει την εξής γενική λύση:

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t) + 3e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(γ) **[12]** Υπολογίστε τη γενική λύση $y(t)$ της Δ.Ε. (**χωρίς** τη χρήση μετασχηματισμού Laplace)

$$4y'' - 4y + y = \sqrt{t}e^{t/2}, \quad t > 0.$$

Θέμα 3

[15] Με χρήση μετασχηματισμών Laplace υπολογίστε τη λύση του προβλήματος, όπου u η συνάρτηση Heaviside,

$$y'' + 4y = \sin t - u(t - \pi) \sin(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Θέμα 4

Έστω το παρακάτω σύστημα Δ.Ε. για τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ με αρχικές συνθήκες $x(0) = 2$ και $y(0) = 1$

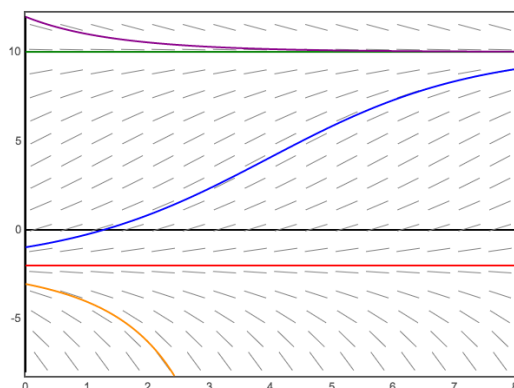
$$\begin{aligned} x' &= y - 2x \\ y' &= -x \end{aligned}$$

(α) **[10]** Χωρίς να το μετασχηματίσετε σε Δ.Ε. δεύτερης τάξης, υπολογίστε τη λύση συστήματος και έναν θεμελιώδη πίνακα λύσεων.

(β) **[10]** Δώστε την περιγραφή (γράφημα) του πεδίου διευθύνσεων του συστήματος, της ευστάθειας των κρίσιμων σημείων (όποιων υπάρχουν) και την τροχιά της λύσης που αντιστοιχεί στο ερωτήμα (α).

Θέμα 1

(α) Κάνοντας το γράφημα του πεδίου κλίσεων της $y' = 1 + 0.05(8y - y^2)$ (με σημεία ισορροποίας το $y = -2$ και $y = 10$)



και για τις όποιες αρχ. τιμές $y(0)$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \begin{cases} -\infty & \text{αν } y(0) < -2, \\ 10 & \text{αν } y(0) > -2, \\ -2 & \text{αν } y(0) = -2. \end{cases}$$

(β) Πρώτα λύνουμε το Π.Α.Τ. $y' + y \sin t = \sin t$, $y(0) = 3$ με ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = e^{-\cos t}$, άρα $y_1(t) = 1 + Ce^{\cos t}$ και εφόσον $y_1(0) = y(0) = 3$, $C = 2e^{-1}$.

Στη συνέχεια λύνουμε $y' + y \sin t = -\sin t$, $y(\pi) = y_1(\pi) = 1 + 2e^{-2}$ με το ίδιο ολοκλ. παράγοντα και έχουμε $y_2 = -1 + Ce^{\cos t}$. Εφόσον $y_2(\pi) = 1 + 2e^{-2}$, $C = 2(1/e - e)$. Άρα

$$y(t) = \begin{cases} 1 + 2e^{\cos t - 1}, & 0 \leq t \leq \pi \\ -1 + 2(1/e - e)e^{\cos t}, & \pi < t \leq 2\pi. \end{cases}$$

(γ) Έχουμε ότι $y_0 = y(0) = -0 - \sqrt{4 - 0} = -2$. Για $N(t, y) = y + at$ και $M(t, y) = ay + bt$ έχουμε $\frac{N(t, y)}{\partial t} = \frac{M(t, y)}{\partial y} = a$, συνεπώς η Δ.Ε. είναι ακριβής (πλήρης) άρα,

$$\frac{\phi(t, y)}{\partial y} = y + at \Rightarrow \phi(t, y) = \frac{y^2}{2} + aty + g(t)$$

και

$$\frac{\phi(t, y)}{\partial t} = ay + bt = ay + g'(t) \Rightarrow g'(t) = bt \Rightarrow g(t) = \frac{b}{2}t^2$$

Συνεπώς $\phi(t, y) = \frac{y^2}{2} + aty + \frac{b}{2}t^2 = C$ και εφόσον $y(0) = -2$ το $C = 2$. Ισχύει λοιπόν ότι

$$y^2 + 2aty + bt^2 = 4 \quad \text{και λύνοντας ως προς } y$$

$$y(t) = \frac{-2at \pm \sqrt{4a^2t^2 - 4(bt^2 - 4)}}{2} = -at \pm \sqrt{a^2t^2 - (bt^2 - 4)}$$

Από τις 2 λύσεις αυτή που ικανοποιεί το ότι $y(0) = -2$ είναι η $y(t) = -at - \sqrt{a^2t^2 - bt^2 + 4}$ άρα, $a = 1$ και $a^2 - b = -1$ συνεπώς $b = 2$.

Θέμα 2

(α) Ο όγκος του νερού στη δεξαμενή αυξάνει με ρυθμό $5 - 4 = 1$ l/λεπτό. Άρα ο χρόνος t στον οποίο θα γεμίσει στο μισό είναι $100 + t = 250$ δηλ. σε χρόνο $t = 150$ λεπτά.

Η συγκέντρωση αλατιού στη δεξαμενή, έστω $y(t)$, μεταβάλλεται ως

$$y' = 30(5) - 4 \frac{y(t)}{t + 100} \text{ με } y(0) = 0.$$

Η λύση της Δ.Ε. είναι $y(t) = 30(100 + t) - \frac{3 \cdot 10^{11}}{(100 + t)^4}$ και άρα για $t = 150$, $y(150) = 7,4232 \text{ kg}$.

(β) Το πρώτο κομμάτι της λύσης είναι αυτό μιας ομογενούς δεύτερης τάξης, $ay'' + by' + cy = 0$ με ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r_{1,2} = 2 \pm 3i$ και από τον (αντίστροφο) υπολογισμό των ριζών

$$r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

και έστω $a = 1$ (ή όποια άλλη τιμή) έχουμε

$$\frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4 \text{ και } \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = 3 \Rightarrow c = 13.$$

το δεύτερο μέρος της λύσης, $3e^{3t}$, προέρχεται από το μη-ομογενές κομμάτι της Δ.Ε. (ειδική λύση) άρα,

$$y_p = 3e^{3t} \Rightarrow y'_p = 9e^{3t} \Rightarrow y''_p = 27e^{3t} \text{ και αντικατάσταση} \\ 27e^{3t} - 4(9e^{3t}) + 13(3e^{3t}) = Ae^{3t} \Rightarrow A = 30$$

Άρα μία ΔΕ που ψάχνουμε είναι η $y'' - 4y' + 13y = 30e^{3t}$.

(γ) Για τη λύση της ομογενούς έχουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $4r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow (2r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1/2$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι

$$y_c = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Για την ειδική λύση πρέπει να εφαρμόσουμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (Lagrange) για να βρούμε τη μερική λύση της μορφής

$$y_p = u_1(t)e^{t/2} + u_2(t)te^{t/2}$$

λύνουμε το σύστημα

$$u'_1 e^{t/2} + u'_2 t e^{t/2} = 0 \\ u'_1 e^{t/2}/2 + u'_2 (1 + t/2) e^{t/2} = \frac{\sqrt{t}}{4} e^{t/2}$$

Λύνοντας (με όποιο τρόπο) και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$u_1(t) = -\frac{1}{10} t^{5/2} \text{ και } u_2(t) = \frac{1}{6} t^{3/2}$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2} + \frac{1}{15} t^{5/2} e^{t/2}.$$

Θέμα 3

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[4y] = \mathcal{L}[\sin t] - \mathcal{L}[u(t - \pi) \sin(t - \pi)]$$

έχουμε

$$s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + 4F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-\pi t} \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow (s^2 + 4)F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-\pi t} \frac{1}{s^2 + 1}$$

άρα

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} - e^{-\pi t} \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Από απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1/3}{s^2 + 1} + \frac{-1/3}{s^2 + 4} \quad \text{έχουμε}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1/3}{s^2 + 1} - \frac{1/3}{s^2 + 4} - e^{-\pi t} \left(\frac{1/3}{s^2 + 1} - \frac{1/3}{s^2 + 4} \right) \\ &= \frac{1/3}{s^2 + 1} - \frac{1}{6} \frac{2}{s^2 + 4} - e^{-\pi t} \left(\frac{1/3}{s^2 + 1} - \frac{1}{6} \frac{2}{s^2 + 4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}[\sin t] - \frac{1}{6} \mathcal{L}[\sin(2t)] - e^{-\pi t} \left(\frac{1}{3} \mathcal{L}[\sin t] - \frac{1}{6} \mathcal{L}[\sin(2t)] \right) \end{aligned}$$

Άρα η λύση είναι

$$y(t) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin(2t) - u(t - \pi) \left(\frac{1}{3} \sin(t - \pi) - \frac{1}{6} \sin(2(t - \pi)) \right)$$

Θέμα 4

(α) Το σύστημα σε διανυσματική μορφή γράφεται ως εξής $\vec{v}' = \mathbf{A}\vec{v}$, με $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathbf{A}$, από $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, δίνει $(\lambda + 1)^2 = 0$. Άρα $\lambda_{1,2} = -1$ διπλή ιδιοτιμή.

Για το ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}$ λύνουμε

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Άρα μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα το $\vec{u} = [1, 1]^T$ (τα άλλα είναι πολλαπλάσιά του) αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή, άρα αυτή είναι *ατελής*.

Για το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\vec{z}$ λύνουμε

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{z} = \vec{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -z_1 + z_2 = 1 \quad \text{και έστω } z_1 = 0 \quad \text{άρα } z_2 = 1$$

άρα με $\vec{z} = [0, 1]^T$ η γενική λύση είναι

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Και με βάση την αρχ. συνθήκη $c_1 = 2$ και $c_2 = -1$.

(β) Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 8 σελ. 44, το $(0,0)$ είναι ευσταθής νόθος κόμβος και με μπλέ η τροχία της λύσης του (α).

