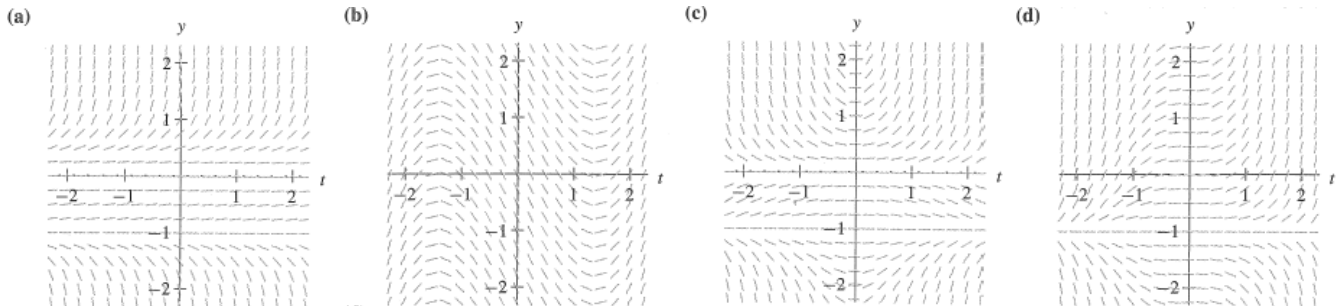


Θέμα 1

(α)[8] Αιτιολογώντας την απάντησή σας, ποιά από τις παρακάτω 8 Δ.Ε. ταιριάζει σε κάθε ένα από τα 4 πεδία κλίσεων (a – d); (i) $y' = y^2 + y$, (ii) $y' = y^2 - y$, (iii) $y' = y^3 + y^2$, (iv) $y' = 2 - t^2$, (v) $y' = ty + ty^2$, (vi) $y' = t^2 + t^2y$, (vii) $y' = t + ty$, (viii) $y' = t^2 - 2$,



(β)[10] Δεξαμενή περιέχει αρχικά 120 λίτρα (l) καθαρού νερού. Ένα μείγμα συγκέντρωσης γ (gr/l) σε αλάτι εισέρχεται στη δεξαμενή με ρυθμό $2l/min$ και το καλά αναδευόμενο μείγμα εκρέει από τη δεξαμενή με τον ίδιο ρυθμό. Να βρεθεί μία έκφραση της ποσότητας του αλατιού στη δεξαμενή, συναρτήσει του γ για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t και να βρεθεί επίσης η οριακή ποσότητα αλατιού στη δεξαμενή καθώς $t \rightarrow \infty$.

(γ)[10] Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. $2(1 + t^2)y' + 2ty = \frac{1}{y}$.

Θέμα 2

(α)[8] Η θέση, $x(t)$, ενός σώματος σε σύστημα ελατηρίου-μάζας ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{3}{2}x'' + kx = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = \alpha > 0.$$

Αν η περίοδος και το πλάτος της κίνησης είναι π και 3 αντίστοιχα, να υπολογιστούν τις τιμές των k και α .

Βρείτε τη λύση, $y(t)$, της κάθε μίας από τις παρακάτω Δ.Ε. (χωρίς χρήση του μετασχηματισμού Laplace)

(β)[10] $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$,

(γ)[10] $4t^2y'' + 4ty' - y = \frac{12}{t}$ με $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.

Θέμα 3

Έστω το παρακάτω μη-ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x(t)$ και $y(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + e^t, \\ y' &= 3x - 2y - e^t. \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(α)[8] Υπολογίστε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος που προκύπτει από το παραπάνω και δώστε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων.

(β)[6] Σχεδιάστε το γράφημα του διανυσματικού πεδίου (επίπεδο φάσης) ή/και τις αντίστοιχες τροχιές των λύσεων του ομογενούς συστήματος στο διάστημα $[x, y] \in [-2, 2] \times [-3, 3]$ και χαρακτηρίστε την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου.

(γ)[10] Να βρεθεί η γενική λύση του παραπάνω μη-ομογενούς συστήματος.

Θέμα 4

(α)[5+5] Βρείτε (i) το μετασχηματισμό Laplace της $f(t) = te^{-t} \sin(2t)$ και (ii) τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $F(s) = \frac{2s - 7}{s^2 + 25}$.

(β)[10] Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς Laplace και συναρτήσεις μοναδιαίου βήματος Heaviside για να υπολογίσετε τη λύση του παρακάτω Π.Α.Τ.

$$y'' + 4y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi, \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 0, & 2\pi \leq t. \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Θέμα 1

(α) Το (a) πεδίο κλίσεων εξαρτάται μόνο από το y (αντιστοιχεί σε αυτόνομη Δ.Ε.), άρα μόνο οι (i), (ii) και (iii) είναι πιθανές, και έχει λύσεις ισορροπίας $y = 0$ και $y = -1$ άρα δεν είναι η (ii). Επιπλέον στο $y = -2$ η κλίση είναι αρνητική, άρα η σωστή απάντηση είναι η (iii).

Το (b) πεδίο κλίσεων εξαρτάται μόνο από το t , άρα είναι μια από τις (iv) και (viii). Η κλίση στο $t = 0$ είναι αρνητική άρα η σωστή απάντηση είναι η (viii).

Το (c) πεδίο κλίσεων εξαρτάται και από το t και από το y , άρα υποψήφιες είναι οι (v), (vi), (vii). Οι λύσεις ισορροπίας όμως είναι $y = 0$ και $y = -1$, άρα η σωστή απάντηση είναι η (v).

Το (d) πεδίο κλίσεων εξαρτάται και από το t και από το y και έχει λύση ισορροπίας μόνο την $y = -1$ (που ισχύει για τις (vi) και (vii)). Οι κλίσεις όμως για $t, y > 0$ είναι θετικές άρα η σωστή απάντηση είναι η (vi).

(Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να αιτιολογήσει κάποιος σωστά την απάντηση π.χ. ελέγχοντας τις κλίσεις σε αρκετά σημεία (t, y) .)

(β) Ο ρυθμός μεταβολής στο χρόνο της (άγνωστης) ποσότητας αλατιού, $y(t)$, στη δεξαμενή είναι

$$\frac{dy}{dt} = \text{ρυθμός εισόδου} - \text{ρυθμός εξόδου} = \gamma \frac{gr}{l} \cdot 2 \frac{l}{min} - \frac{y(t)}{120} \frac{gr}{l} \cdot 2 \frac{l}{min} = 2\gamma \frac{gr}{min} - \frac{y(t)}{60} \frac{gr}{min}$$

Άρα η Δ.Ε. που περιγράφει το πρόβλημα είναι

$$y' = 2\gamma - \frac{y}{60} = -\frac{1}{60}(y - 120\gamma), \quad y(0) = 0 \quad \text{διαχωρίσιμη Δ.Ε.}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y - 120\gamma} &= -\frac{1}{60} \Rightarrow \int \frac{dy}{y - 120\gamma} = -\int \frac{1}{60} dt \Rightarrow \ln |y - 120\gamma| = -\frac{t}{60} + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y - 120\gamma = Ce^{-\frac{t}{60}} \Rightarrow y(t) = Ce^{-\frac{t}{60}} + 120\gamma \end{aligned}$$

Απο $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = Ce^{-\frac{0}{60}} + 120\gamma \Rightarrow C = -120\gamma$. Άρα

$$y(t) = 120\gamma \left(1 - e^{-\frac{t}{60}}\right) \quad \text{και} \quad y(t)_{t \rightarrow \infty} = 120\gamma.$$

(γ) Η Δ.Ε. είναι μη-γραμμική και μπορεί να λυθεί με 2 τρόπους είτε σαν Bernoulli είτε σαν πλήρης.

1ος τρόπος: Με αλλαγή μεταβλητής $v = y^2$ και $v' = 2yy'$ έχουμε

$$2(1+t^2)\frac{1}{2y}v' + 2ty = \frac{1}{y} \Rightarrow (1+t^2)v' + 2tv = 1 \Rightarrow v' + \frac{2t}{1+t^2}v = \frac{1}{1+t^2}$$

με ολοκληρωτικό παράγοντα

$$e^{\int \frac{2t}{1+t^2} dt} = e^{\ln(1+t^2)} = 1+t^2 \Rightarrow (1+t^2)v = \int 1 dt + C$$

Άρα η γενική λύση δίνεται από την $(1+t^2)y^2 = t + C$.

2ος τρόπος: Η Δ.Ε. γράφεται και ως

$$2y(1+t^2)y' + (2ty^2 - 1) = 0 \Rightarrow M(t, y) = (2ty^2 - 1), \quad N(t, y) = 2y(1+t^2) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} = 4ty$$

$$u = \int M dt + g(y) = t^2 y^2 - t + g(y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2yt^2 + g'(y) = 2y(1+t^2) \Rightarrow g(y) = y^2$$

Άρα η γενική λύση δίνεται από την $u = t^2 y^2 - t + y^2 = C \Rightarrow (1+t^2)y^2 = t + C$.

Θέμα 2

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. είναι $\frac{3}{2}r^2 + k = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{2k}{3}}\right)i$ αρα,

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{3}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{3}}t\right), \quad \text{δηλ. η περίοδος } \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{3}}} = \pi \Rightarrow k = 6$$

Αρα $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$ και $x'(t) = -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)$ και εφόσον $x(0) = 2$, $x'(0) = \alpha$ παίρνουμε $c_1 = 2$ και $c_2 = \alpha/2$.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $\sqrt{2^2 + (\alpha/2)^2} = 3 \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{5}$.

(β) Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής είναι: $r^3 + r^2 + r + 1 = (r^2 + 1)(r + 1) = 0$ και έχει λύσεις $r = \pm i, -1$. Συνεπώς η λύση της ομογενούς είναι

$$y_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t.$$

Για την ειδική λύση της μη-ομογενούς μαντεύουμε (απροσδιόριστοι συντελεστές) $y_p(t) = Ate^{-t} + (Bt + C)$ (προσέχοντας στον εκθετικό όρο ότι το Ae^{-t} είναι λύση της ομογενούς) και αντικαθιστώντας την στη Δ.Ε. και εξισώνοντας τους συντελεστές (των όρων te^t, t και σταθερών) έχουμε

$$A = 1/2, B = 4, C = -4$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{1}{2}te^{-t} + 4t - 4.$$

(γ) Η μη-ομογενής Δ.Ε. είναι της μορφής Euler συνεπώς με αλλαγή μεταβλητής $y = t^m$ βρίσκουμε πρώτα τη λύση της ομογενούς. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$4m^2 + (4 - 4)m - 1 = 4m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1/2}$$

Άρα η λύση της ομογενούς $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \sqrt{t} + c_2 \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Για να βρούμε μία ειδική (μερική) λύση της μη-ομογενούς εφαρμόζουμε τη μέθοδο Lagrange γράφοντας τη Δ.Ε. στη μορφή $y'' + (1/t)y' - (1/4t^2)y = \frac{3}{t^3}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Lagrange (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 7 σελ. 25), όπου η Wronskian $W(y_1, y_2) = t^{-1}$ και $y_1 = t^{1/2}$, $y_2 = t^{-1/2}$ με $f = \frac{3}{t^3}$ και έχουμε

$$y_p = (-2t^{-3/2})\sqrt{t} + 6t^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{4}{t}$$

Άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t) = y_c + y_p = c_1 \sqrt{t} + c_2 \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{4}{t}$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες $c_1 = 3$ και $c_2 = -5$.

Θέμα 3

(α) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διάνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζεται η μέθοδος ιδιοτιμών (εφόσον η άσκηση ζητάει να μη μετασχηματιστεί το σύστημα). Άρα υπολογίζω την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$.

Λύνοντας για το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = [v_1, v_2]^T$ το σύστημα $(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})\vec{v} = 0$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και για το ιδιοδιάνυσμα $\vec{w} = [w_1, w_2]^T$ το σύστημα $(\mathbf{A} + 1 \cdot \mathbf{I})\vec{w} = 0$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = w_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

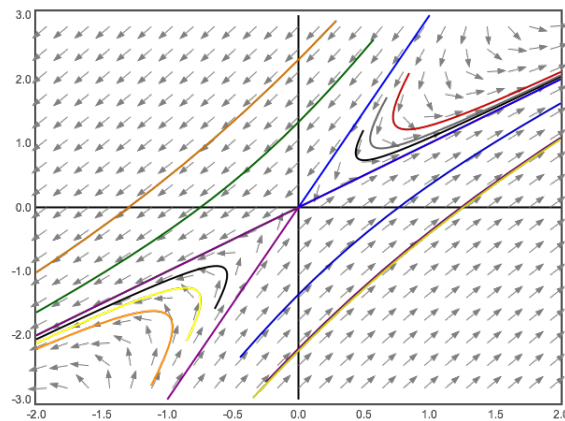
συνεπώς, η λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων, με βάση την παραπάνω λύση, είναι τ.ω. $\vec{x}_c = \mathbf{X}(t)\vec{c}$, δηλ.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(β) Με βάση τα 2 ιδιοδιανύσματα $[1, 1]^T$, $[1, 3]^T$ και $c_1 = 0, c_2 \in \mathbb{R}$ και $c_2 = 0, c_1 \in \mathbb{R}$ κατασκευάζουμε τις 4 βασικές λύσεις (ευθείες στο γράφημα). Εφόσον οι ιδιοτιμές έχουν αντίθετο πρόσημο το κρίσιμο σημείο $(0, 0)$ είναι σαγματικό, άρα ασταθές



(γ) Μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών, "μαντεύοντας" ότι $\vec{x}_p = \vec{a}te^t + \vec{b}e^t$ (μιά που μόνο η "μαντεψιά" $\vec{x}_p = \vec{a}e^t$ είναι λύση του ομογενούς). Με αντικατάσταση στο σύστημα έχουμε

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} (e^t + te^t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές te^t και e^t στις 2 παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_1 - a_2 \\ a_1 + b_1 &= 2b_1 - b_2 + 1 \\ a_2 &= 3a_1 - 2a_2 \\ a_2 + b_2 &= 3b_1 - 2b_2 - 1 \end{aligned}$$

όπου προκύπτει ότι $a_1 = a_2 = a$ και τότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 &= a - 1 \\ 3b_1 - 3b_2 &= a + 1 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι $a = 2$ άρα $a_1 = a_2 = 2$ και $b_1 = b_2 + 1$ με το b_2 ελεύθερη μεταβλητή, έστω $b_2 = k \in \mathbb{R}$, Άρα

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} te^t + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

και εφόσον ο όρος $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$ είναι πολλαπλάσιο θεμελιώδους λύσης του ομογενούς παραλείπεται. Άρα η γενική λύση του μή-ομογενούς συστήματος είναι

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

(Παρατήρηση: Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με εκθετικά πινάκων, ο πίνακας του συστήματος διαγωνοποιείται, και χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 22)

Θέμα 4

(α)

$$(i) \mathcal{L}[t \sin(2t)] = -\frac{d}{ds} \left[\frac{2}{s^2 + 4} \right] = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2} \quad (\text{βλ. παράγωγος μετασχηματισμού ΔΙΑΛΕΞΗ 10 σελ. 16-17})$$

$$\text{άρα από } t\text{-μετατόπιση } \mathcal{L}[e^{-t} t \sin(2t)] = \frac{4(s+1)}{[(s+1)^2 + 4]^2}.$$

$$(ii) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s-7}{s^2+25} \right] = 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+25} \right] - \frac{7}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{s^2+25} \right] = 2 \cos(5t) - \frac{7}{5} \sin(5t).$$

(β) Η Δ.Ε. με χρήση συναρτήσεων Heaviside γίνεται

$$y'' + 4y = u(t - \pi) - u(t - 2\pi) \quad \text{άρα με Laplace}$$

$$s^2 F(s) - s + 4F(s) = \frac{1}{s}(e^{-s\pi} - e^{-s2\pi}) \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{e^{-s\pi}}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-s2\pi}}{s(s^2 + 4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + e^{-s\pi} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 4} \right) - e^{-s2\pi} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 4} \right) \quad (\text{από ανάλυση σε απλά κλάσματα})$$

Άρα

$$y(t) = \cos(2t) + \frac{1}{4} u(t - \pi) (1 - \cos 2(t - \pi)) - \frac{1}{4} u(t - 2\pi) (1 - \cos 2(t - 2\pi))$$

$$\text{ή } y(t) = \cos(2t) + \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - \cos 2t), & \pi \leq t < 2\pi, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$