

Θέμα 1

(α) [0.5] Υπολογίστε τη γενική λύση $y(t)$ της Δ.Ε. $y' = \frac{y}{t} + 2t^2$, $t \neq 0$.

(β) [1 + 0.5] Έστω $p(t)$ ο πληθυσμός κάποιου είδους που ικανοποιεί τη Δ.Ε. $p' = 3p - p^2$, (i) λύστε τη Δ.Ε. για την $p(t)$ για $p(0) = 1$ και υπολογίστε το όριο της καθώς $t \rightarrow \infty$ και (ii) σχεδιάστε το πεδίο κλίσεων για $t \in [0, 5]$ και $y \in [-5, 5]$ και επιβεβαιώστε γραφικά τα αποτελέσματα του (i).

(γ) [1] Να λυθεί η Δ.Ε. $y' = \frac{\sin(t) - ye^{ty}}{te^{ty} + 1}$ (σε πεπλεγμένη μορφή).

Θέμα 2

(α) [1.5] Έστω η Δ.Ε. $y'' + \beta y' + 16y = 0$, $t \geq 0$. Υπολογίστε για ποιά τιμή ή τιμές του β η λύση $y(t)$ της Δ.Ε., (i) φθίνει ισχυρά στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$, (ii) ταλαντώνεται ανεξάρτητα από το t και (iii) φθίνει ασθενώς ταλαντούμενη για $t \rightarrow \infty$, περιγράφοντας σε κάθε περίπτωση τις αντίστοιχες λύσεις.

(β) [1.3] Υπολογίστε τη λύση του Π.Α.Τ. $t^2 y'' + ty' = t^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$ (χωρίς τη χρήση μετασχηματισμών Laplace)

Θέμα 3

Δίνεται το παρακάτω σύστημα Δ.Ε. για τις $y_1(t), y_2(t)$

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 1, \\ y_2' &= 5y_2 + e^t. \end{aligned}$$

[1.5] Υπολογίστε τη γενική του λύση (χωρίς να το μετασχηματίσετε σε διαφορικές δεύτερης τάξης) και [0.5] δώστε μια περιγραφή (γράφημα) του διανυσματικού πεδίου του ομογενούς συστήματος στο $[2, -2] \times [2, -2]$ και της τροχιάς της λύσης για $\vec{y}(0) = [0.5, 0.5]$, χαρακτηρίστε επίσης την ευστάθειας των κρίσιμων σημείων.

Θέμα 4

(α) [0.7 + 0.5] Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων

$$(i) g(t) = \begin{cases} 7 & \text{αν } 0 \leq t \leq 4 \\ t + 9 & \text{αν } t > 4 \end{cases} \quad \text{και} \quad (ii) f(t) = te^{-t} - \cos^2 t$$

(β) [1] Να λυθεί το Π.Α.Τ με χρήση του μετασχηματισμού Laplace

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6,$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Θέμα 1

(α) Η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη, αλλά είναι γραμμική και μπορεί να γραφεί ως $y' - t^{-1}y = 2t^2$ και με χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα

$$e^{\int -t^{-1}dt} = e^{-\ln t} = e^{\ln t^{-1}} = t^{-1}$$

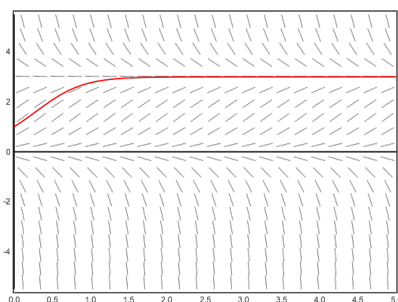
Αρα

$$t^{-1}y' - t^{-2}y = 2t \Rightarrow (t^{-1}y)' = 2t \Rightarrow t^{-1}y = \int 2t dt \Rightarrow y(t) = t^3 + Ct.$$

(β) Η Δ.Ε. μπορεί να λυθεί σαν διαχωρίσιμη ή Bernoulli (η λύση της πρέπει να είναι η ίδια σε όποια περίπτωση). Σαν διαχωρίσιμη

$$\begin{aligned} \frac{p'}{p(3-p)} = 1 &\Rightarrow \frac{p'}{3p} - \frac{p'}{3(p-3)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \ln p - \frac{1}{3} \ln(p-3) = t + C \Rightarrow \ln \left(\frac{p}{p-3} \right) = 3t + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p}{p-3} = De^{3t} \text{ και για } p(0) = 1 \text{ έχουμε } D = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Αρα } p = -\frac{1}{2}e^{3t}p + \frac{3}{2}e^{3t} \Rightarrow p = \frac{(3/2)e^{3t}}{1 + (1/2)e^{3t}} \text{ και για } t \rightarrow \infty \text{ το } p \rightarrow (3/2)/(1/2) = 3.$$



(γ) Η Δ.Ε. είναι πρώτης τάξης μη-γραμμική και δεν είναι διαχωρίσιμη και μπορεί να γραφεί ως $y'(te^{ty} + 1) + (ye^{ty} - \sin(t)) = 0$ για να δούμε αν είναι ακριβής και έχουμε (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(te^{ty} + 1) &= e^{ty} + tye^{ty} \\ \frac{\partial}{\partial y}(ye^{ty} - \sin(t)) &= e^{ty} + tye^{ty} \quad \text{άρα είναι ακριβής.} \end{aligned}$$

$$\text{Αρα } u(t, y) = \int (ye^{ty} - \sin(t))dt + g(y) \Rightarrow u(t, y) = e^{ty} + \cos(t) + g(y) \text{ και}$$

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} = te^{ty} + g'(y) = te^{ty} + 1 \Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y$$

Άρα η (πεπλεγμένη) λύση

$$e^{ty} + \cos(t) + y = C.$$

Θέμα 2

(α) Η Δ.Ε. μπορεί να περιγράψει την κίνηση ενός συστήματος ελατηρίου μάζας με ή χωρίς απόσβεση (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6). Αρχικά υπολογίζουμε τη μορφή της λύσης της Δ.Ε. που έχει χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 + \beta r + 16 = 0$ και ρίζες $r_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 64}}{2}$ και $r_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 64}}{2}$, άρα η λύση της Δ.Ε. έχει τη μορφή

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad A, B \text{ σταθερές}$$

και όταν $r_1 \neq r_2$, δηλ. $\beta \neq 8, -8$, οι r_1, r_2 μπορεί να είναι πραγματικές ή μιγαδικές. Άρα χρειάζεται να εξετάσουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\beta = 0$ (χωρίς απόσβεση), οι r_1, r_2 είναι μιγαδικές (συζυγής μεταξύ τους) άρα η λύση είναι της μορφής $y(t) = A \cos(4t) + B \sin(4t)$ και ταλαντώνεται ανεξάρτητα από το t (απάντηση στο (ii)). Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6 σελ. 18.
- Αν $\beta > 8$, οι r_1, r_2 είναι πραγματικές και αρνητικές και τότε η λύση φθίνει ισχυρά στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$ (Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6 σελ. 21). Επίσης, αν $\beta = \pm 8$ η διακρίνουσα είναι 0 και έχουμε διπλή ρίζα. Η λύση τότε είναι $y(t) = Ae^{-\beta t/2} + Bte^{-\beta t/2}$. Αν $\beta = 8$ και για $A, B > 0$ η λύση αυξάνει μέχρι το χρόνο $t = \frac{1}{4} - \frac{A}{B} (\Leftarrow y'(t) = 0)$ (ακρότατο) και μετά η λύση φθίνει ισχυρά στο 0. (Η απάντηση για το (i) είναι δηλ. για $\beta \geq 8$).
- Αν $0 < \beta < 8$ διακρίνουσα είναι αρνητική άρα έχει μιγαδικές ρίζες και $-\frac{\beta}{2} < 0$. Η λύση είναι τότε της μορφής $y(t) = Ae^{-\beta t/2} \cos(\omega_1 t) + Be^{-\beta t/2} \sin(\omega_1 t)$ (Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6 σελ. 22-23), και η λύση φθίνει ασθενώς ταλαντούμενη (απάντηση στο (iii)).

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η λύση $y(t) \rightarrow \infty$.

(β) Η Δ.Ε. είναι της μορφής Euler-Cauchy μη-ομογενής. Λύνουμε πρώτα την ομογενή με χαρακτ. εξίσωση

$$m(m-1) + m + 0 = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \text{ διπλή ρίζα}$$

Άρα θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς είναι οι $y_1 = t^0 = 1$ και $y_2 = t^0 \ln t = \ln t$ (Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6 σελ. 26) και άρα η λύση της ομογενούς

$$y_c = C_1 + C_2 \ln t$$

Για την ειδική λύση, y_p , της μη-ομογενούς μπορούμε να εφαρμόσουμε είτε τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών ή (ποιο δύσκολα) τη μέθοδο Lagrange (το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο).

Για τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών μαντεύουμε $y_p = At^2 + Bt + C$ και άρα $y_p' = 2At + B$ και $y_p'' = 2A$ όπου αντικαθιστώντας στη Δ.Ε. έχουμε $4At^2 + Bt = t^2 \Rightarrow A = 1/4, B = 0, C = 0$. Άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = y_c + y_p = C_1 + C_2 \ln t + \frac{t^2}{4}.$$

Πρέπει να υπολογίσουμε και τα C_1, C_2 από τις αρχικές συνθήκες, και έχουμε $y(1) = C_1 + 0 + 1/4 = 1 \Rightarrow C_1 = 3/4$ και $y'(1) = C_2 + 1/2 = -1/2 \Rightarrow C_2 = -1$. Άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(t) = \frac{3}{4} = \ln t + \frac{t^2}{4}$$

Θέμα 3

Το σύστημα σε μορφή διανυσματική γράφεται ως εξής $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα του συστήματος δηλ. $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 5$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [0, 1]^T$. Άρα η λύση του ομογενούς είναι

$$\vec{y}_c = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

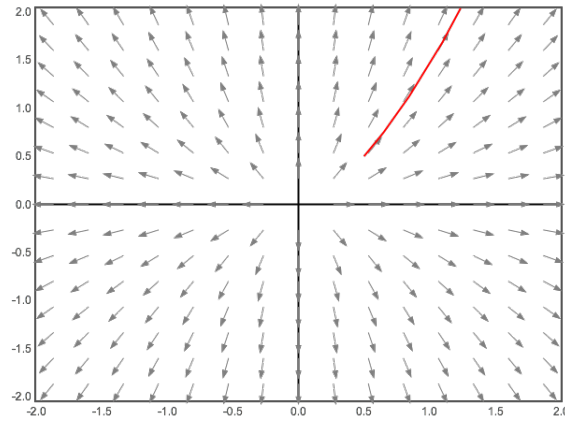
Για την ειδική λύση μαντεύουμε (μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών) $\vec{y}_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, όπου αντικαθιστώντας στο σύστημα μας δίνει

$$a_1 = b_1 = 0, c_1 = -1/3, b_2 = c_2 = 0, a_2 = -1/4$$

Άρα

$$\vec{y} = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ e^t/4 \end{bmatrix}$$

Το πεδίο διευθύνσεων είναι αυτό που αντιστοιχεί σε (ασταθή) κόμβο πηγής ($q = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$), βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 8 σελ. 28 και σελ. 44-46.



Παρατήρηση 1: Η ίδια ειδική λύση $\vec{y}_p$ μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 22, με θεμελιώδη πίνακα λύσεων $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$ (από λύση ομογενούς).

Παρατήρηση 2: Μια δεύτερη μέθοδος για να πάρουμε την (ίδια) γενική λύση είναι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα, βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 13, με $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ και $e^{\mathbf{P}t} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$.

Θέμα 4

(α) (i) Με χρήση της συνάρτησης Heviside $u(t-4)$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 10 σελ. 53-54) έχουμε

$$g(t) = 7(1-u(t-4)) + (t+9)u(t-4) = 7(1-u(t-4)) + (t-4)u(t-4) + 13u(t-4) = 7 \cdot 1 + 6u(t-4) + (t-4)u(t-4)$$

$$\mathcal{L}[g](s) = 7\frac{1}{s} + 6e^{-4s}\frac{1}{s} + e^{-4s}\frac{1}{s^2} = \frac{e^{-4s}}{s^2}(7se^{4s} + 6s + 1).$$

(ii) Με χρήση του ότι $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$ έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[te^{-t}](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\cos(2t)(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 4}$$

(β) Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμού Laplace αριστερά και δεξιά της Δ.Ε. έχουμε

$$s^2 F(s) - 2s - 6 - 6(sF(s) - 2) + 9F(s) = \frac{2}{(s-3)^3} \Rightarrow \quad (\text{όπου δεξιά εφαρμόζουμε ιδιότητα } s\text{-μετατόπισης})$$

$$\Rightarrow (s^2 - 6s + 9)F(s) = \frac{2}{(s-3)^3} + 2(s-3) \Rightarrow F(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

Άρα από αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 10 σελ. 37 ιδιοτητες 11 & 2 στον πίνακα)

$$y(t) = \frac{1}{12}t^4 e^{3t} + 2e^{3t}$$