

Θέμα 1

(α) **[4]** Αν η $f(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, δώστε τη λύση του Π.Α.Τ. $y' + f(t)y = 0$, $y(1) = 0$.

(β) **[6]** Χωρίς να λύσετε τη Δ.Ε. $y' = (y - 2)(y - 1)$, αν $y(0) = 3$ ποιά είναι η τιμή του $y(4)$;

(γ) **[10]** Ένα δοχείο περιέχει ένα διάλυμα ζάχαρης. Αρχικά περιέχει 2 λίτρα νερό και 15 γραμμάρια διαλυμένης ζάχαρης. Στη συνέχεια νερό που περιέχει 5 γραμμάρια ζάχαρης ανά λίτρο μπαίνει στο δοχείο με ρυθμό 2 λίτρα/λεπτό και ταυτόχρονα νερό βγαίνει από το δοχείο με τον ίδιο ρυθμό. Πόσα γραμμάρια διαλυμένης ζάχαρης υπάρχουν στο δοχείο μετά από $\ln 5$ λεπτά;

(δ) **[12]** Υπολογίστε τη λύση της Δ.Ε. $y' = \frac{2y}{t} - y^2 t^2$, $t > 0$.

Θέμα 2

(α) **[8]** Έστω $y_1(t)$ και $y_2(t)$ δύο λύσεις της Δ.Ε. $t^2 y'' - 2ty' + \cos(t)y = 0$. Αν η Wronskian $W(y_1, y_2)(1) = 3$, βρείτε την $W(y_1, y_2)(2)$.

(β) **[15]** Υπολογίστε τη γενική λύση της Δ.Ε. (**χωρίς** τη χρήση μετασχηματισμού Laplace)

$$t^3 y'' - 2t^3 y' + t^3 y = 2e^t.$$

Θέμα 3

(α) **[12]** Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Laplace, (i) $\mathcal{L}\{te^{-t} \sin(t)\}$ και (ii) $\mathcal{L}\{u_2(t)(t - 2)e^{-t}\}$.

(β) **[15]** Σε ένα οριζόντιο σύστημα ελατήριου-μάζας με απόσβεση και με παραμέτρους $m = 1 \text{ kg}$, $c = 5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $k = 4 \text{ N/m}$ ασκείται μία εξωτερική δύναμη $f(t) = 2 \text{ N}$. Αν αρχικά το σύστημα βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x(0) = 0$, λύστε την Δ.Ε. που περιγράφει την θέση της μάζας στο χρόνο, $x(t)$, με χρήση του μετασχηματισμού Laplace και περιγράψτε την κίνηση της μάζας καθώς το $t \rightarrow \infty$.

Θέμα 4

[15] Για το παρακάτω μη-ομογενές σύστημα Δ.Ε.

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix},$$

υπολογίστε τη γενική του λύση (**χωρίς να το μετασχηματίσετε σε διαφορικές δεύτερης τάξης**) και **[5]** δώστε μια περιγραφή (γράφημα) του διανυσματικού πεδίου του ομογενούς συστήματος στο $[2, -2] \times [2, -2]$ και της τροχιάς της λύσης για $\vec{y}(0) = [0.5, 0.5]$, χαρακτηρίστε επίσης την ευστάθειας των κρίσιμων σημείων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

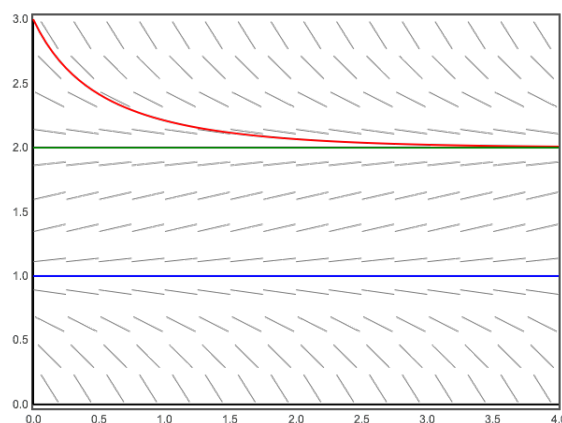
Θέμα 1

(α) Η απάντηση είναι απευθείας $y(t) = 0$ (ομογενής)! Αν πάλι κάποιος θέλει να λύσει τη Δ.Ε. αυτή είναι χωριζομένων μεταβλητών

$$y' = -f(t)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -f(t) \Rightarrow y = C e^{-\int f(t)dt}$$

η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη μόνο όταν $C = 0$.

(β) Κατασκευάζοντας το πεδίο κλίσεων, η Δ.Ε. έχει 2 σημεία ισορροπίας το 1 και το 2 και για $y(0) = 3$ (αρχική τιμή) το $y(4) = 2$.



(γ) Το Π.Α.Τ. που περιγράφει τη μεταβολή της ποσότητας ζάχαρης, $Q(t)$, στο χρόνο είναι

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 2 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{Q(t)}{2}, \quad Q(0) = 15$$

δηλ.

$$\frac{dQ(t)}{dt} + Q(t) = 10 \Rightarrow Q(t) = C e^{-t} + 10 \Rightarrow Q(0) = C + 10 = 15 \Rightarrow C = 5$$

αρα

$$Q(t) = 5e^{-t} + 10 \Rightarrow Q(\ln 5) = 5e^{-\ln 5} + 10 = 11 \text{ (γραμμάρια)}$$

(δ) Είναι μια εξίσωση Bernoulli άρα με αντικατάσταση $u = y^{1-2} = y^{-1}$ μετασχηματίζεται στη γραμμική Δ.Ε.

$$u' + \frac{2}{t}u = t^2 \Rightarrow (\text{με ολοκληρωτικό παράγοντα } \mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2 \ln |t|} = t^2) \Rightarrow u = \frac{t^3}{5} + \frac{C}{t^2}$$

αρα

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{t^3}{5} + \frac{C}{t^2}}.$$

Θέμα 2

(α) Έχουμε $p(t) - \frac{-2t}{t^2} = -\frac{2}{t}$ αρα (Θεωρ. Abel)

$$W(y_1, y_2)(t) = C \cdot e^{\int -p(t)dt} = C \cdot e^{\int \frac{2}{t}dt} = C \cdot e^{\ln t^2} = C \cdot t^2,$$

αρα $W(y_1, y_2)(1) = C \cdot 1 = 3 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow W(y_1, y_2)(t) = 3t^2 \Rightarrow W(y_1, y_2)(2) = 3 \cdot 4 = 12$.

(β) Η Δ.Ε. γράφεται $y'' - 2y' + y = \frac{2e^t}{t^3}$ και λύνεται με τη **μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (Lagrange)**, λύνοντας πρώτα την ομογενή που έχει χαρακτ. εξίσωση

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0 \Rightarrow y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

άρα

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \text{ και } u_1 = \frac{2}{t}, u_2 = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow y_p = \frac{e^t}{t}$$

άρα η γενική λύση

$$y = y_o + y_p = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{e^t}{t}.$$

Θέμα 3

(α) (i) Έστω $f(t) = e^{-t} \sin(t)$ τότε θέλουμε (ΔΙΑΛΕΞΗ 10, σελ. 16)

$$\mathcal{L}[tf(t)] = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)] = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^{-t} \sin(t)] = (-1) \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right] = \frac{2(s+1)}{((s+1)^2 + 1)^2}.$$

και

$$(ii) \text{ Αρχικά } \mathcal{L}[u_2(t)(t-2)] = e^{-2s} \mathcal{L}[t] = \frac{e^{-2s}}{s^2} \text{ άρα } \mathcal{L}[u_2(t)(t-2)e^{-t}] = \frac{e^{-2(s+1)}}{(s+1)^2}.$$

(β) Το Π.Α.Τ. με βάση τα δεδομένα

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t) \Rightarrow x'' + 5x' + 4x = 2, \text{ με } x'(0) = 0 = x(0)$$

Εφαρμόζοντας Laplace έχουμε

$$s^2 F(s) + 5sF(s) + 4F(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{2}{s(s^2 + 5s + 4)} = \frac{2}{s(s+4)(s+1)}$$

Από ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{6(s+4)} - \frac{2}{3(s+1)}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνει

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2s} + \frac{1}{6(s+4)} - \frac{2}{3(s+1)} \right] = \frac{1}{2} + \frac{e^{-4t}}{6} - \frac{2}{3} e^{-t}$$

Όταν $t \rightarrow \infty$ τότε $x(t) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Θέμα 4

Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα του συστήματος δηλ. $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 5$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [0, 1]^T$. Άρα η λύση του ομογενούς είναι

$$\vec{y}_c = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

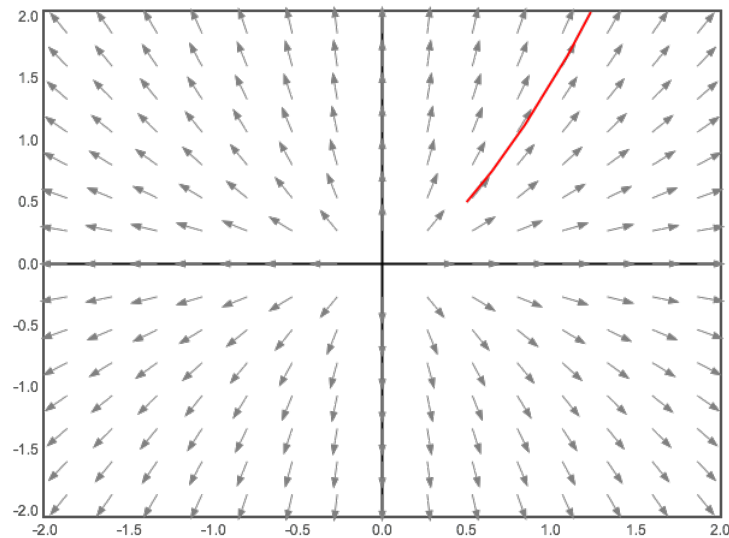
Για την ειδική λύση μαντεύουμε (μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών) $\vec{y}_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, όπου αντικαθιστώντας στο σύστημα μας δίνει

$$a_1 = b_1 = 0, \quad c_1 = -1/3, \quad b_2 = c_2 = 0, \quad a_2 = -1/4$$

Αρα

$$\vec{y} = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ e^t/4 \end{bmatrix}$$

Το πεδίο διευθύνσεων είναι αυτό που αντιστοιχεί σε (ασταθή) κόμβο πηγής ($q = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$), βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 8 σελ. 28 και σελ. 44-46.



Παρατήρηση 1: Η ίδια ειδική λύση $\vec{y}_p$ μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 22, με θεμελιώδη πίνακα λύσεων $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$ (από λύση ομογενούς).

Παρατήρηση 2: Μια δεύτερη μέθοδος για να πάρουμε την (ίδια) γενική λύση είναι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα, βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 13, με $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ και $e^{\mathbf{P}t} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$.