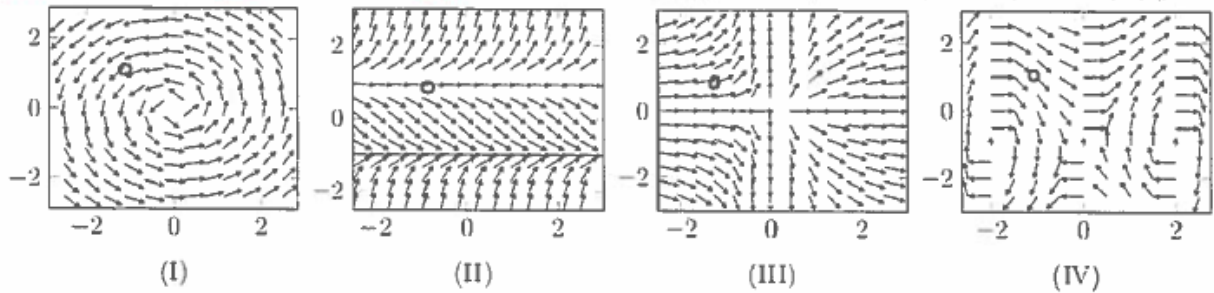


Θέμα 1

(α) [6] Συνταιριάξτε τις Δ.Ε. $y' + 1 = y^2$, $yy' + t = 0$, $t^2y' - y = 0$ και $(y - 1)y' + t^3 = 4t$, με τα παρακάτω πεδία κλίσεων αιτιολογώντας την απάντησή σας.



(β) [12] Για το Π.Α.Τ. $y' = y + e^{at}$, $y(0) = 0$, $a \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η λύση του για, (i) $a \neq 1$, (ii) $a = 1$ και (iii) δείξτε ότι η λύση του (ii) είναι το όριο της λύσης του (i) για $a \rightarrow 1$.

(γ) [10] Μία δεξαμενή χρησιμοποιείται για συγκεκριμένα υδροδυναμικά πειράματα και μετά από κάποιο πείραμα περιέχει 200 λίτρα (l) διαλύματος χρωστικής ουσίας με περιεκτικότητα 1g/l. Για να χρησιμοποιηθεί η δεξαμενή στο επόμενο πείραμα πρέπει να ξεπληθεί με καθαρό νερό που ρέει στη δεξαμενή με ρυθμό 2l/min, ενώ το διάλυμα εκρέει από τη δεξαμενή με τον ίδιο ρυθμό. Βρείτε το χρόνο που χρειάζεται έως ότου η ποσότητα της χρωστικής ουσίας φτάσει το 1% της αρχικής της τιμής.

Θέμα 2

(α) [5] Έστω $y_1(t)$ μία λύση της γραμμικής μη-ομογενούς Δ.Ε. $ay'' + by' + cy = g(t)$ και $y_2(t)$ μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Εξηγήστε ποιά ή ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις πιστεύετε ότι είναι λύσεις της μη-ομογενούς Δ.Ε.

$$(i) y_1(t) + y_2(t), \quad (ii) 2y_1(t), \quad (iii) 2y_2(t), \quad (iv) 2y_1(t) + y_2(t), \quad (v) y_1(t) + 2y_2(t).$$

Βρείτε τη γενική λύση, $y(t)$, της κάθε μίας από τις Δ.Ε. (χωρίς χρήση του μετασχηματισμού Laplace)

(β) [10] $y'' - 2y' + y = e^t$,

(γ) [12] $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1$.

Θέμα 3

Έστω το παρακάτω μη-ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x(t)$ και $y(t)$:

$$x' = -4y + 3x - 3t,$$

$$y' = x - y - 3.$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(α) [14] Υπολογίστε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος που προκύπτει από το παραπάνω και δώστε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων.

(β) [6] Υπολογίστε τον πίνακα e^{At} , όπου A ο πίνακας του παραπάνω συστήματος.

(γ) [10] Να βρεθεί η γενική λύση του παραπάνω μη-ομογενούς συστήματος για $x(0) = 0$ και $y(0) = 1$.

Θέμα 4

Να λυθούν τα παρακάτω πρόβληματα αρχικών τιμών με χρήση του μετασχηματισμού Laplace,

(α) [8] $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

(β) [12] $y'' + 4y = \sin(t) + u(t - \pi)\sin(t - \pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, όπου u η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος Heaviside.

Θέμα 1

(α) Η Δ.Ε. $y' + 1 = y^2$ δηλ. $y' = y^2 - 1$ έχει σημεία ισορροπίας τα $y = 1$ και $y = -1$ (και δεν εξαρτάται από το t), άρα έχει πεδίο κλίσεων το (II). Η $t^2 y' - y = 0$ δηλ. $y' = y/t^2$ έχει σημείο ισορροπίας το $y = 0$ και για $t \rightarrow 0$ η κλίση τείνει στο ∞ , άρα έχει πεδίο κλίσεων το (III), για την $yy' + t = 0$ ισχύει ότι $y^2 + t^2 = C$ (λύσεις, κύκλοι με κέντρο το 0) άρα έχει πεδίο κλίσεων το (I).

(β) Η Δ.Ε. είναι γραμμική μη-ομογενής και γράφεται ως $y' - y = e^{at}$, άρα ο ολοκληρωτικός παράγοντας της είναι $e^{\int (-1)dt} = e^{-t}$ άρα $[e^{-t}y]' = e^{(a-1)t}$.

Για $a \neq 1$ έχουμε $e^{-t}y = \frac{1}{a-1}e^{(a-1)t} + C$ δηλ. $y(t) = \frac{1}{a-1}e^{at} + Ce^t$. Εφόσον $y(0) = 0$ το $C = -\frac{1}{a-1}$, άρα η λύση του Π.Α.Τ. για $a \neq 1$ είναι

$$y(t) = \frac{e^{at} - e^t}{a - 1} \quad (1)$$

Για $a = 1$ έχουμε $[e^{-t}y]' = 1$ δηλ. $y(t) = te^t + Ce^t$ και εφόσον $y(0) = 0$ το $C = 0$, άρα η λύση του Π.Α.Τ.

$$y(t) = te^t.$$

Για το όριο της (1) και με χρήση κανόνα L'Hopital

$$\lim_{a \rightarrow 1} \frac{e^{at} - e^t}{a - 1} = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{da}[e^{at} - e^t]}{\frac{d}{da}[a - 1]} = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{te^{at}}{1} = te^t.$$

(γ) Πρώτα φτιάχνουμε τη Δ.Ε. που μοντελοποιεί το πρόβλημα. Έστω $y(t)$ η ποσότητα χρωστικής ουσίας στο διάλυμα στο χρόνο t . Εφόσον μπαίνει μόνο καθαρό νερό στη δεξαμενή η μεταβολή του $y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = y' = -2 \frac{y}{200} = -\frac{y}{100}$$

Λύνουμε τη (διαχωρίσιμη) Δ.Ε.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{100} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{100}t + C \Rightarrow y = De^{-t/100}, D > 0$$

Εφόσον $y(0) = 200$ γραμμάρια, $200 = De^{-0/100}$ τότε $D = 200$ και το 1% της αρχικής τιμής είναι 2 έχουμε

$$2 = 200e^{-t/100} \Rightarrow \ln(1/100) = -t/100 \Rightarrow t \approx 460.5 \text{ min}$$

Θέμα 2

(α) Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση μιας δεύτερης τάξης μη-ομογενούς δίνεται από το άθροισμα της λύσης της ομογενούς + μιας λύσης της μη-ομογενούς συνεπώς, η $y_1(t)$ πρέπει πάντα να εμφανίζεται στη λύση (όπως είναι, όχι πολλαπλασιασμένη με κάποιο αριθμό), επιπλέον οι λύσεις της ομογενούς μπορεί να είναι πολλαπλασιασμένες με σταθερούς αριθμούς. Συνεπώς, αποδεκτές λύσεις είναι οι (i) και (v).

(β) Υπολογίζουμε πρώτα τη λύση, y_c της ομογενούς Δ.Ε. όπου έχει χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - 2r + 1 = 0$ και άρα διπλή ρίζα $r = 1$ και έχουμε

$$y_c = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

Με τη μέθοδο απροσδιορίστων συντελεστών πρέπει να μαντέψουμε κατάλληλα, μια που το e^t και te^t εμφανίζονται στη λύση της ομογενούς. Η κατάλληλη "μαντεψιά" είναι $y_p = At^2 e^t$ (βλ. Διαλεξη 7 σελ. 6-7). Τότε αντικαθιστώντας την y_p στη Δ.Ε. έχουμε

$$(At^2 e^t + 4Ate^t + 2Ae^t) - 2(At^2 e^t + 2Ate^t) + At^2 e^t = e^t,$$

$$(A - 2A + A)t^2 e^t + (4A - 4A)te^t + 2Ae^t = e^t,$$

$$2Ae^t = e^t \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι $y(t) = y_c + y_p = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t$.

(γ) Η Δ.Ε. $t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$ είναι μη-ομογενής τύπου Euler. Βρίσκουμε τη λύση της ομογενούς με αντικατάσταση $y = t^m$. Άρα $y' = mt^{(m-1)}$ και $y'' = m(m-1)t^{(m-2)}$ και αντικατάσταση στην ομογενή Δ.Ε. έχουμε τη χαρ. εξίσωση $m^2 - m - 2 = 0$ που έχει ρίζες $m_1 = 2$ και $m_2 = -1$ και συνεπώς $y_1 = t^2$ και $y_2 = t^{-1}$ και $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Για να υπολογίσουμε μία ειδική (μερική) λύση της μη-ομογενούς μπορούμε μόνο να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (Lagrange) εφόσον η Δ.Ε. γράφεται

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = 3 - \frac{1}{t^2} = f(t),$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας το Θ. Lagrange (βλ. Διάλεξη 7 σελ. 25) όπου

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dt + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dt \quad (2)$$

Η Wronskian $W = \begin{vmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = -3$ άρα η (2) δίνει

$$y_p = \frac{t^2}{3} \int \frac{1}{t} (3 - \frac{1}{t^2}) dt - \frac{1}{3t} \int (3t^2 - 1) dt \Rightarrow y_p = t^2 \ln |t| + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{3}$$

Ο όρος $-\frac{t^2}{3}$ μπορεί να παραληφθεί γιατί είναι πολλαπλάσιο της λύσης της ομογενούς y_1 . Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t) = C_1 t^2 + C_2 t^{-1} + t^2 \ln |t| + \frac{1}{2}.$$

Θέμα 3

(α) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διάνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Εδώ μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος ιδιοτιμών (εφόσον η άσκηση ζητάει να μη μετασχηματιστεί το σύστημα).

Άρα υπολογίζω την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$, διπλή ιδιοτιμή.

Λύνοντας για το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = [v_1, v_2]^T$ το σύστημα $(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})\vec{v} = 0$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και παίρνουμε ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (**ατελής** ιδιοτιμή, βλ. Διάλεξη 8 σελ. 37-39). Χρειάζεται άρα να υπολογίσουμε τώρα ένα **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** $\vec{w} = [w_1, w_2]^T$ για το οποίο ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

εφόσον w_2 ελεύθερη μεταβλητή (και που πολλαπλασιάζει το ιδιοδιάνυσμα της ομογενούς) μπορούμε να θέσουμε $w_2 = 0$ συνεπώς, η λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t.$$

Ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων, με βάση την παραπάνω λύση, είναι τ.ω. $\vec{x}_c = \mathbf{X}(t)\vec{c}$, δηλ.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t & (2t+1)e^t \\ e^t & te^t \end{bmatrix}.$$

(β) Για τον τον πίνακα e^{At} (βλ. Διάλεξη 9 σελ. 10) έχουμε

$$e^{At} = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^t & (2t+1)e^t \\ e^t & te^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2t+1)e^t & -2te^t \\ te^t & (1-2t)e^t \end{bmatrix},$$

ο οποίος ικανοποιεί και ότι $e^{A0} = \mathbf{I}$, για επιβεβαίωση.

(Παρατήρηση: Ο πίνακας $\mathbf{A}$ ΔΕΝ διαγωνοποιείται, λόγω ατελούς ιδιοτιμής.)

(γ) Για τη λύση του μη-ομογενούς με χρήση απροσδιόριστων συντελεστών "μαντεύουμε" ότι μια ειδική λύση θα είναι της μορφής $\vec{x}_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και αντικαθιστώντας την $\vec{x}_p$ στο σύστημα έχουμε

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3t \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_1 t + 3b_1 - 4a_2 t - 4b_2 - 3t \\ a_1 t + b_1 - a_2 t - b_2 - 3 \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 3a_1 - 4a_2 - 3 &= 0 \\ 3b_1 - 4b_2 &= a_1 \\ a_1 - a_2 &= 0 \\ b_1 - b_2 &= 3 + a_2 \end{aligned}$$

που έχει λύση $a_1 = a_2 = -3$ και $b_1 = b_2 = 3$. Συνεπώς, $\vec{x}_p = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ και άρα η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Για $x(0) = 0$ και $y(0) = 1$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = -2, c_2 = 1.$$

Θέμα 4

(α) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace για την 4η παράγωγο (ιδιοτητες Διαλεξη 10 σελ. 14) και με τις αρχικές συνθήκες που δίνονται έχουμε, με $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$,

$$F(s) = \frac{s^3 y(0) + s^2 y(0)' + s y(0)'' + y'''(0)}{s^4 - 1} = \frac{s}{s^4 - 1}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{s}{s^4 - 1} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} \Rightarrow A = 1/4, B = 1/4, C = -1/2, D = 0$$

$$\frac{s}{s^4 - 1} = \frac{1}{4(s - 1)} + \frac{1}{4(s + 1)} - \frac{s}{2(s^2 + 1)}$$

τότε με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$, σε κάθε κλάσμα, η λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} - \frac{\cos(t)}{2}.$$

(β) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace αριστερά και δεξιά στη Δ.Ε. έχουμε

$$s^2 F(s) - s y(0) - y'(0) + 4 F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} = \frac{1}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}(1 + e^{-\pi s}) \quad (A)$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα το

$$\frac{1}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} \Rightarrow A = 0, B = -1/3, C = 0, D = 1/3$$

έχουμε

$$\frac{-1/3}{s^2 + 4} + \frac{1/3}{s^2 + 1} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{2/2}{s^2 + 4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 2} = \frac{-1}{6} \cdot \frac{2}{s^2 + 2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 2}$$

τότε με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (σε κάθε κλάσμα) στην (A), και την ιδιότητα της t -μετατόπισης, έχουμε τη λύση

$$y(t) = h(t) + u(t - \pi)h(t - \pi)$$

όπου

$$h(t) = \frac{-1}{6} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(t).$$