

Θέμα 1

(α)[12] Δεξαμενή περιέχει αρχικά 10 λίτρα (l) νερού και διαλυμένα 0.5 κιλά (kg), αλατιού. Ένα μείγμα συγκέντρωσης $\frac{1}{200}(10-t)^2(\sin t + 1)$ σε (Kgr/l), σε αλάτι εισέρχεται στη δεξαμενή με ρυθμό $1\ l/min$ και το καλά αναδευόμενο μείγμα εκρέει από τη δεξαμενή με ρυθμό $2\ l/min$. Να βρεθεί η έκφραση της ποσότητας του αλατιού στη δεξαμενή, για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t(min)$.

(β)[8] Υπολογίστε τη λύση $y(t)$ της Δ.Ε. $y' = \frac{1}{t-y} + 1$.

(γ) [4+8] Για τη Δ.Ε. $y' + \frac{y}{t} - y^3 = 0$, σχεδιάστε το πεδίο κλίσεων της στο $[t, y] \in [1, 4] \times [0, 4]$ και στη συνέχεια υπολογίστε τη λύση της Δ.Ε. που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(3) = 1$.

Θέμα 2

(α)[5 + 7] Έστω το Π.Α.Τ. $my'' + cy' + ky = f(t)$, $y(0) = y_0$ και $y'(0) = u_0$, το οποίο περιγράφει την μετακίνηση από τη θέση ισορροπίας ενός σώματος μάζας m συνδεδεμένο με ένα ελατήριο. (i) Αν η λύση της Δ.Ε. για $f(t) = 0$ και $m = 5kg$ είναι $y_c = 2e^{-t} \cos(\sqrt{3}t - 1.0472)$, υπολογίστε τα c και k και (ii) για τα c και k που βρήκατε, υπολογίστε τη γενική λύση της Δ.Ε. αν $f(t) = 5 \sin(2t)$.

(β)[12] Υπολογίστε τη γενική λύση, $y(t)$, της Δ.Ε.: $t^2 y'' + ty' - y = t - \frac{1}{t}$, $t > 0$.

Θέμα 3

(α)[10] Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ενός γραμμικού συστήματος Δ.Ε. $\vec{x}' = A\vec{x}$, υπολογίστε τον e^{At} .

(β)[7+10] Έστω το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x(t)$ και $y(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x + 2 \cos t \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(i) Υπολογίστε ένα θεμελιώδη πίνακα λύσεων για το ομογενές σύστημα που προκύπτει από το παραπάνω και (ii) υπολογίστε τη γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος. [Υπόδειξη: για την λύση του μη-ομογενούς είναι ίσως καλύτερα να μην χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών].

Θέμα 4

(α)[5] Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+7}$.

(β)[12] Η εξέλιξη ενός πληθυσμού ψαριών $y(t)$ στο χρόνο t , με ρυθμό αύξησης 1% και μείωσης λόγω αλιείας με βάση τη συνάρτηση $h(t)$ για 30 ημέρες, δίνεται από το Π.Α.Τ.

$$y'(t) = 0.01y(t) - h(t), \quad y(0) = 100 \quad \text{με} \quad h(t) = \begin{cases} 3 & \text{αν } 0 \leq t < 30 \\ 0 & \text{αν } t \geq 30 \end{cases}$$

Υπολογίστε την $y(t)$ με χρήση μετασχηματισμών Laplace και της βηματικής συνάρτησης.

Η ακρίβεια των υπολογισμών σας και των τελικών αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Έστω $x(t)$ η ποσότητα αλατιού, σε kg , στο χρόνο. Το Π.Α.Τ που περιγράφει το πρόβλημα είναι

$$x'(t) = 1 \cdot \frac{1}{200}(10-t)^2(\sin t + 1) - 2 \cdot \frac{x(t)}{10-t} \Rightarrow x'(t) + \frac{2x(t)}{10-t} = \frac{1}{200}(10-t)^2(\sin t + 1), \quad x(0) = 0.5$$

Με ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{\int \frac{2}{10-t} dt} = e^{-2 \ln(10-t)} = (10-t)^{-2}$ έχουμε

$$(10-t)^{-2}x' + 2x(10-t)^{-3} = \frac{1}{200}(\sin t + 1) \Rightarrow [(10-t)^{-2}x]' = \frac{1}{200}(\sin t + 1) \text{ συνεπώς}$$

$$(10-t)^{-2}x = \frac{1}{200} \int (\sin t + 1) dt = (t - \cos t) + C \Rightarrow x(t) = \frac{1}{200}(10-t)^2(t - \cos t + C)$$

Από την αρχική συνθήκη $x(0) = 0.5$ έχουμε ότι $C = 1/40$, άρα η απάντηση είναι

$$x(t) = \frac{1}{200}(10-t)^2(t - \cos t + 2).$$

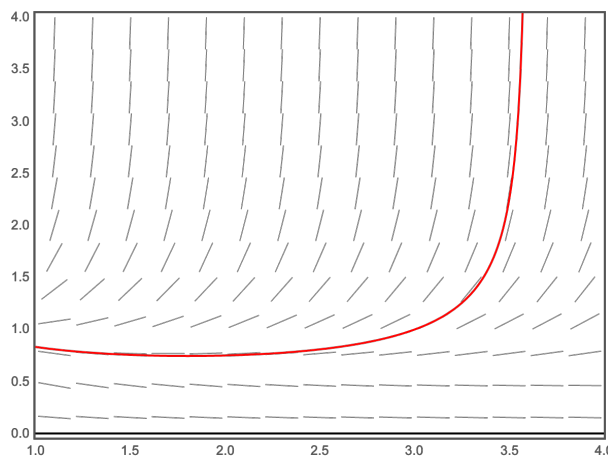
(β) Η Δ.Ε. μπορεί να γραφεί ως $-t + y - 1 + (t-y)y' = 0$, και ελεγχουμε αν είναι ακριβής (πλήρης). Έχουμε τότε $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial t}$, συνεπώς

$$u = \int M dt + g(y) = \frac{-t^2}{2} + ty - t + g(y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = t - y \Rightarrow t + g'(y) = t - y \Rightarrow g(y) = -y^2/2$$

Άρα έχουμε $u = -t^2/2 + ty - t - y^2/2 = C \Rightarrow y(t) = t \pm \sqrt{2C - 2t}$, για $t < C$.

Παρατήρηση: η Δ.Ε. μπορεί να λυθεί και με αλλαγή μεταβλητής $u = t - y$, $u' = 1 - y'$ που οδηγεί στο ίδιο (προφανώς) αποτέλεσμα.

(γ)



Η Δ.Ε. $y' + \frac{y}{t} - y^3 = 0$, $y(3) = 1$ είναι τύπου Bernoulli, συνεπώς θέτοντας $u = y^{-2}$ έχουμε $y = u^{-1/2}$ και $y' = -1/2 u^{-3/2} u'$ που με αντικατάσταση στη Δ.Ε. δίνει τη γραμμική Δ.Ε.

$$u' - \frac{2}{t} = -2 \quad \text{όπου με ολοκλ. παράγοντα } e^{\int -2/t dt} = e^{-2 \ln t} = t^{-2} \quad \text{έχουμε } [t^{-2}u]' = -2t^2 \Rightarrow u = 2t + Ct^2$$

Άρα $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + Ct^2}}$ όπου για $y(3) = 1$ δίνει $C = -5/9$.

Θέμα 2

(α) (i) Για την ομογενή Δ.Ε. $my'' + cy' + ky = 0$ εφόσον η λύση της είναι σε τριγωνομετρική μορφή η χαρ. εξίσωση $r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$, θα έχει μιγαδικές ρίζες. Συνεπώς (βλ. και ΔΙΑΛΕΞΗ 6 σελ. 20-22), $p = c/2m = c/10$ με $p = -1$ (από τη δύναμη του εκθετικού) έχουμε $c = 10$ και $\sqrt{3} = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ παίρνουμε $k = 20$ για $\omega_0^2 = k/m$.

(ii) Για την $f(t)$ που δίνεται (και τα $c = 10, k = 20$) θέλουμε την ειδική λύση της $y'' + 2y' + 4y = \sin(2t)$. Εφαρμόζουμε μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών με $y_p = A \sin(2t) + B \cos(2t)$ και αντικατάσταση στη Δ.Ε. έχουμε

$$-4A \sin(2t) - 4B \cos(2t) + 4A \cos(2t) - 4B \sin(2t) + 4A \sin(2t) + 4B \cos(2t) = \sin(2t)$$

άρα $A = 0$ και $B = -1/4$ συνεπώς $y_p = -\cos(2t)/4$.

(β) Η δοσμένη Δ.Ε. είναι τύπου Euler-Cauchy. Λύνοντας πρώτα την ομογενή με αλλαγή μεταβλητής $y = t^m$ και αντικατάσταση προκύπτει η χαρ. εξίσωση $m^2 = 1$ συνεπώς η $y_c = C_1 t + C_2 t^{-1}$.

Για την ειδική λύση εφορμόζουμε μέθοδο Lagrange με $y_1 = t$ και $y_2 = t^{-1}$ και $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}$. Η Wronskian ορίζουσα είναι $W(y_1, y_2) = -2/t$ συνεπώς, βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 7 σελ. 25,

$$y_p = t \int \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2t^3} \right) dt - t^{-1} \int \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2t} \right) dt = t \ln t/2 + t/4 - t/4 + t^{-1} \ln t/2 = \frac{1}{2} \ln t \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

Θέμα 3

(α) (Α τρόπος) Ο πίνακας $\mathbf{A}$ μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{B}$, όπου έχουμε $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$. Συνεπώς, βλ. και ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 4, έχουμε $e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda \mathbf{I}t} e^{\mathbf{B}t}$, όμως

$$e^{\mathbf{B}t} = \mathbf{I} + \mathbf{B}t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

άρα

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 2te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

(Β τρόπος) Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει διπλή ιδιοτιμή το λ για να υπολογίσουμε το $e^{\mathbf{A}t}$ αρκεί να βρούμε ένα πίνακα θεμελιωδών λύσεων του συστήματος. Υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Άρα από τη λύση του συστήματος

$$\vec{x} = c_1 \vec{v} e^{\lambda t} + c_2 [\vec{v}t + \vec{u}] e^{\lambda t} \Rightarrow \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{\lambda t} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 2te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

(β) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διάνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδος ιδιοτιμών υπολογίζουμε την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ και λύνοντας για τα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_{1,2} = [1, \pm i]^T$ (ή $\vec{v}_{1,2} = [\pm i, 1]^T$). Άρα από τον τύπο του Euler

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

ο Θεμελιώδης πίνακας λύσεων είναι

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Για την ειδική λύση με δεξιά μέλος το $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos t \end{bmatrix}$ (και με βάση την υπόδειξη) μπορούμε να βρούμε την ειδική λύση με τη μέθοδο του ολοκλ. παράγοντα (ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 14 ή σελ. 22) άρα εφόσον $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ και $\mathbf{X}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{x}_p &= e^{\mathbf{A}t} \int e^{-\mathbf{A}t} \vec{f}(t) dt = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -2 \cos t \sin t \\ 2 \cos^2 t \end{bmatrix} dt = \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin^2 t \\ t + \sin t \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Θέμα 4

(α) Έχουμε ότι

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+7} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3} - \frac{1}{(s+2)^2+3}$$

άρα

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-2t} \left[2 \cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right]$$

(β) Στο Π.Α.Τ. η $h(t) = 3 - 3u(t-30)$ όπου u η συνάρτηση Heviside, συνεπώς

$$\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{0.01y\} = -\mathcal{L}\{h(t)\} \Rightarrow s\mathcal{L}\{y\} - y(0) - 0.01\mathcal{L}\{y\} = -\left[\frac{3}{s} - \frac{3e^{-30s}}{s}\right] \Rightarrow$$

$$(s-0.01)\mathcal{L}\{y\} = 100 - \frac{3}{s} - \frac{3e^{-30s}}{s} \Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s-0.01}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s-0.01)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3e^{-30s}}{s(s-0.01)}\right\}$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{3}{s(s-0.01)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-0.01} \Rightarrow A = -300 \text{ και } B = 300 \text{ συνεπώς}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s-0.01)}\right\} = -300 + 300e^{0.01t} \text{ και } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3e^{-30s}}{s(s-0.01)}\right\} = u(t-30) \left[-300 + 300e^{0.01(t-30)}\right]$$

Συνεπώς η λύση είναι

$$y(t) = 300 - 200e^{0.01t} + 300u(t-30) \left[e^{0.01(t-30)} - 1\right]$$