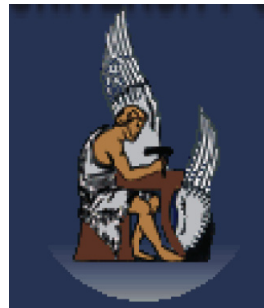


Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2017

Ορισμός 1. (Φανταστική Μονάδα) Η φανταστική μονάδα i είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα $i^2 = -1$.

Ορισμός 1. (Φανταστική Μονάδα) Η φανταστική μονάδα i είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα $i^2 = -1$.

Ορισμός 2. (Φανταστικοί Αριθμοί) Το σύνολο $\mathbb{I}$ των φανταστικών αριθμών είναι ένα σύνολο τα στοιχεία του οποίου είναι εκφράσεις της μορφής ib όπου b είναι πραγματικός αριθμός και i είναι η φανταστική μονάδα. Δηλαδή

$$\mathbb{I} = \{bi : b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{I}$ ονομάζονται φανταστικοί αριθμοί.

Ορισμός 3. (Μιγαδικοί Αριθμοί) Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα σύνολο τα στοιχεία του οποίου είναι εκφράσεις της μορφής $a + ib$ όπου τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και i είναι η φανταστική μονάδα. Δηλαδή

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί.

Συνήθως οι μιγαδικοί αριθμοί συμβολίζονται με τα γράμματα z και w .

Παράδειγμα 1. Οι αριθμοί: $2i, \pi i, i8, -\ln(3)i$ είναι φανταστικοί. Οι αριθμοί: $1 + i, -3 + 7i, 1 + ie, e + 3\pi i$ είναι μιγαδικοί.

Το σύνολο $\mathbb{C}$ περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους φανταστικούς αριθμούς και όλα τα αθροίσματα της μορφής $a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ δηλ. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Συνήθως οι μιγαδικοί αριθμοί συμβολίζονται με τα γράμματα z και w .

Παράδειγμα 1. Οι αριθμοί: $2i, \pi i, i8, -\ln(3)i$ είναι φανταστικοί. Οι αριθμοί: $1 + i, -3 + 7i, 1 + ie, e + 3\pi i$ είναι μιγαδικοί.

Το σύνολο $\mathbb{C}$ περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, όλους τους φανταστικούς αριθμούς και όλα τα αθροίσματα της μορφής $a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ δηλ. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ορισμός 4. (Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος) Κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

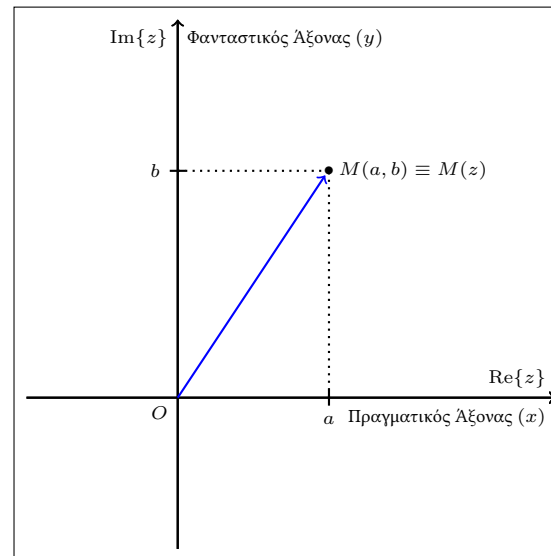
$$z = a + bi \text{ με } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Η μορφή αυτή γραφής ονομάζεται συνήθης ή καρτεσιανή. Ο πραγματικός αριθμός a καλείται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\text{Re}(z)$. Ο αριθμός b καλείται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\text{Im}(z)$.

Παράδειγμα 2. Το πραγματικό μέρος του $z = 5 - 2i$ είναι το 5 και το φανταστικό μέρος του είναι το -2 . Δηλαδή $Re(z) = 5$ και $Im(z) = -2$.

Παράδειγμα 2. Το πραγματικό μέρος του $z = 5 - 2i$ είναι το 5 και το φανταστικό μέρος του είναι το -2 . Δηλαδή $Re(z) = 5$ και $Im(z) = -2$.

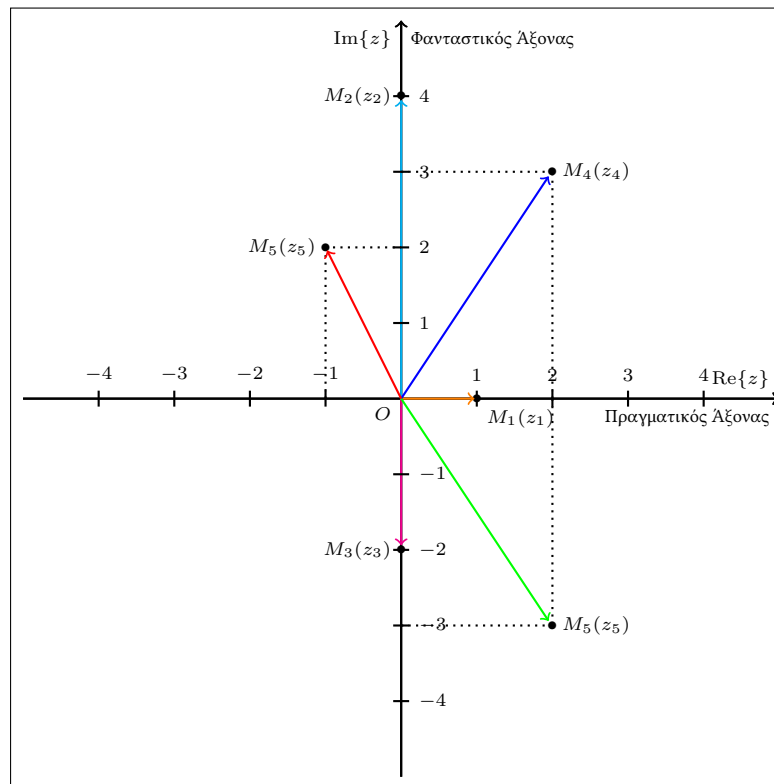
Ορισμός 5. (Εικόνα Μιγαδικού/Μιγαδικό Επίπεδο) Κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(a, b)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Το σημείο M λέγεται εικόνα του μιγαδικού z . Το καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα λέγεται μιγαδικό επίπεδο (ή πολικό επίπεδο ή διάγραμμα του Argand).



Σχήμα 1: Το μιγαδικό επίπεδο.

Λυμένη Άσκηση 1. Να σημειωθούν οι εικόνες και οι διανυσματικές ακτίνες των παρακάτω μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο:

$$z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -2i, z_4 = 2 + 3i, z_5 = 2 - 3i, z_6 = -1 + 2i.$$



Σχήμα 2: Εικόνες διάφορων μιγαδικών.

Πράξεις στο $\mathbb{C}$

Ορισμός 6. (Συζυγής) Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$. Ο μιγαδικός αριθμός $a - bi$ λέγεται συζυγής του z και συμβολίζεται με $\bar{z}$. Δηλαδή

$$\text{Av } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Πράξεις στο $\mathbb{C}$

Ορισμός 6. (Συζυγής) Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$. Ο μιγαδικός αριθμός $a - bi$ λέγεται συζυγής του z και συμβολίζεται με $\bar{z}$. Δηλαδή

$$\text{Αν } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Ορισμός 7. (Πρόσθεση/Αφαίρεση) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$. Το άθροισμα/αφαίρεση τους ορίζεται να είναι ο μιγαδικός $(a + c) \pm (b + d)i$. Δηλαδή

$$z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

Πράξεις στο $\mathbb{C}$

Ορισμός 8. (Πολλαπλασιασμός) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$. Το γινόμενο τους ορίζεται ως

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Πράξεις στο $\mathbb{C}$

Ορισμός 8. (Πολλαπλασιασμός) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$. Το γινόμενο τους ορίζεται ως

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Παρατήρηση: $z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 + b^2$ (πραγματικός)

Πράξεις στο $\mathbb{C}$

Ορισμός 8. (Πολλαπλασιασμός) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$. Το γινόμενο τους ορίζεται ως

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Παρατήρηση: $z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 + b^2$ (πραγματικός)

Ορισμός 9. (Διαίρεση) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di \neq 0$. Το πηλίκο τους $\frac{z_1}{z_2}$ ορίζεται ως

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα βγαίνει πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το συζυγή, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$

Πράξεις στο $\mathbb{C}$

Λυμένη Άσκηση 2. Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -2 + 3i$. Να γίνουν οι πράξεις : $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ και να γραφεί ο αντίθετος του z_1 στην καρτεσιανή μορφή του.

- $z_1 + z_2 = (1 + i) + (-2 + 3i) = (1 + (-2)) + (1 + 3)i = -1 + 4i.$
- $z_1 - z_2 = (1 + i) - (-2 + 3i) = (1 + i) - (-2 + 3i) = (1 - (-2)) + (1 - 3)i = 3 - 2i.$
- $z_1 z_2$ (α' τρόπος - θυμόμαστε τον τύπο)
 $= (1 + i)(-2 + 3i) = (1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3) + (1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2))i = -5 + i.$
- $z_1 z_2$ (β' τρόπος - εφαρμόζουμε ιδιότητες)
 $= (1 + i)(-2 + 3i) = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3i - 2i + 3i(i) = -2 + 3i - 2i + 3i^2 = -2 + i - 3 = -5 + i.$

- $\frac{z_1}{z_2}$ (α' τρόπος - θυμόμαστε τον τύπο)

$$= \frac{1(-2) + 1 \cdot 3}{(-2)^2 + 3^2} + \frac{1(-2) - 1 \cdot 3}{(-2)^2 + 3^2}i = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$$

- $\frac{z_1}{z_2}$ (β' τρόπος - πολλαπλασιάζουμε και αριθμητή και παρονομαστή με τον

$$\text{συζυγή του παρονομαστή και εφαρμόζουμε ιδιότητες}) = \frac{1+i}{-2+3i} =$$

$$\frac{(1+i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-2-3i-2i-3i^2}{-2(-2)-2(-3i)-2 \cdot 3i-9i^2} =$$

$$\frac{-2-5i+3}{4+6i-6i-9i^2} = \frac{1-5i}{4+9} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$$

- $\frac{z_1}{z_2}$ (α' τρόπος - θυμόμαστε τον τύπο)

$$= \frac{1(-2) + 1 \cdot 3}{(-2)^2 + 3^2} + \frac{1(-2) - 1 \cdot 3}{(-2)^2 + 3^2}i = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$$
- $\frac{z_1}{z_2}$ (β' τρόπος - πολλαπλασιάζουμε και αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή και εφαρμόζουμε ιδιότητες)

$$= \frac{1+i}{-2+3i} = \frac{(1+i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-2-3i-2i-3i^2}{-2(-2)-2(-3i)-2 \cdot 3i-9i^2} = \frac{-2-5i+3}{4+6i-6i-9i^2} = \frac{1-5i}{4+9} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$$

Ορισμός 10. (Δύναμη) Έστω z μιγαδικός αριθμός. Για κάθε θετικό ακέραιο n με $n > 1$ ορίζουμε

$$z^1 = z, z^2 = zz, z^3 = z^2 z, \dots, z^n = z^{n-1} z.$$

Αν $z \neq 0$, ορίζουμε

$$z^0 = 1 \text{ και } z^{-n} = \frac{1}{z^n}, \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } n.$$

Οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων στους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν και στους μιγαδικούς. Για τις δυνάμεις του i παρατηρούμε ότι:

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 i = -i, i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1, \dots$$

$$(a) \frac{1}{1+i} \overset{1}{=} \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i+i-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

¹Πολλαπλασιάζω και αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή.

$$\textbf{(α)} \quad \frac{1}{1+i} \cdot 1 = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i+i-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\textbf{(β)} \quad i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 + i^2 \cdot i + (i^2)^2 = i - 1 - 1 \cdot i + (-1)^2 = i - 1 - i + 1 = 0 = 0 + 0i.$$

¹Πολλαπλασιάζω και αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή.

$$\textbf{(α)} \quad \frac{1}{1+i} \cdot 1 = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i+i-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\textbf{(β)} \quad i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 + i^2 \cdot i + (i^2)^2 = i - 1 - 1 \cdot i + (-1)^2 = i - 1 - i + 1 = 0 = 0 + 0i.$$

$$\textbf{(γ)} \quad i^{1001} = i^{4 \cdot 250 + 1} = i^{4 \cdot 250} i^1 = (i^4)^{250} i = 1^{250} i = i$$

¹Πολλαπλασιάζω και αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή.

$$\text{(α)} \quad \frac{1}{1+i} \cdot 1 = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i+i-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{(β)} \quad i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 + i^2 \cdot i + (i^2)^2 = i - 1 - 1 \cdot i + (-1)^2 = i - 1 - i + 1 = 0 = 0 + 0i.$$

$$\text{(γ)} \quad i^{1001} = i^{4 \cdot 250 + 1} = i^{4 \cdot 250} i^1 = (i^4)^{250} i = 1^{250} i = i$$

$$\text{(δ)} \quad (\pi - i\sqrt{5})^2 = \pi^2 - 2\pi\sqrt{5}i + (i\sqrt{5})^2 = \pi^2 - 2\pi\sqrt{5}i + i^2\sqrt{5}^2 = \pi^2 - i - 5 = (\pi^2 - 5) + (-2\pi\sqrt{5})i$$

¹Πολλαπλασιάζω και αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή.

Πρόταση 1. (Ιδιότητες συζυγή) Έστω z και $z_1, z_2, \dots, z_n$ μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύουν:

- $\overline{(\bar{z})} = z.$
- Ο z είναι πραγματικός αν $\bar{z} = z$ και ο z είναι φανταστικός αν $\bar{z} = -z.$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z).$
- $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i.$
- $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n.$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$
- $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$ και $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Θεώρημα 1. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση n -οστού βαθμού

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \quad (1)$$

έχει, στο σύνολο των μιγαδικών, n ακριβώς ρίζες (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους). Αν $z_1, z_2, \dots, z_n$ είναι οι ρίζες της (1) τότε ισχύει η επόμενη ανάλυση σε πρωτοβάθμιους παράγοντες

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Λυμένη Άσκηση 4. Να λυθούν, στο σύνολο $\mathbb{C}$, οι παρακάτω εξισώσεις :

(α) $z^2 + 1 = 0$ και (β) $\frac{z}{2-i} + 1 = z - i$.

(α)

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i \quad (\text{Εξ' ορισμου γνωρίζουμε ότι } i^2 = -1.)$$

(β)

$$\frac{z}{2-i} + 1 = z - i \Leftrightarrow$$

$$z + 2 - i = (z - i)(2 - i) \Leftrightarrow$$

$$z + 2 - i = (2 - i)z - 1 - 2i \Leftrightarrow$$

$$z - (2 - i)z = -2 + i - 1 - 2i \Leftrightarrow$$

$$(-1 + i)z = -3 - i \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{-3 - i}{-1 + i} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{(-3 - i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{2 + 4i}{2} \Leftrightarrow$$

$$z = 1 + 2i$$

Δευτεροβάθμια Εξίσωση με Πραγματικούς Συντελεστές

Πρόταση 2. Η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ και } a \neq 0$$

έχει πάντα δυο ρίζες στο $\mathbb{C}$. Υπολογίζουμε την **διακρίνουσα** $D = b^2 - 4ac$ και έχουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $D > 0$ τότε η εξίσωση έχει **δυο πραγματικές** ρίζες : $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- Αν $D = 0$ τότε έχει **δυο ίσες πραγματικές ρίζες**²: $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
- Αν $D < 0$ τότε η εξίσωση έχει **δυο (συζυγείς) μιγαδικές** ρίζες :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

²μια διπλή πραγματική ρίζα

Δευτεροβάθμια Εξίσωση με Πραγματικούς Συντελεστές

Ισχύουν οι γνωστοί τύποι του Vietta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών. Δηλαδή

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ και } z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

Δευτεροβάθμια Εξίσωση με Πραγματικούς Συντελεστές

Ισχύουν οι γνωστοί τύποι του Vietta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών. Δηλαδή

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ και } z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

Λυμένη Άσκηση 5. Να λυθεί, στο σύνολο $\mathbb{C}$, η $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Υπολογίζω την διακρίνουσα: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$. Άρα η εξίσωση έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες :

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = 1 + i \text{ και } x_2 = 1 - i$$

Ρίζες Πολυωνύμου

Λυμένη Άσκηση 6. Να λυθεί, στο σύνολο $\mathbb{C}$, η $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

Η εξίσωση είναι 3ου βαθμού και θα έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{C}$. Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι $\pm 1, \pm 2$. Δοκιμάζω (σχήμα Horner) την $z = 1$.

Άρα η $z = 1$ είναι ρίζα και έχουμε

$$\begin{aligned} z^3 - 3z^2 + 4z - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (z - 1)(z^2 - 2z + 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ z = 1 \text{ ή } z = 1 + i \text{ ή } z = 1 - i \end{aligned}$$

(Η δευτεροβάθμια έχει λυθεί προγενέστερα (5)).

Μιγαδικές Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Λυμένη Άσκηση 7. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Έστω λ ιδιοτιμή του A . Τότε:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \\ \lambda^2 - 2\lambda + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Επιλύουμε την δευτεροβάθμια:

Μιγαδικές Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot 5 = -16 < 0. \text{ Άρα}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i \\ \lambda_2 = 1 - 2i \end{cases}$$

Μιγαδικές Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot 5 = -16 < 0. \text{ Άρα}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i \\ \lambda_2 = 1 - 2i \end{cases}$$

Έστω $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 :

$$A\vec{x} = \lambda_1 \vec{x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1 + 2i) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + 2i)x_1 \\ (1 + 2i)x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - (1 + 2i)x_1 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - (1 + 2i)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - 2i)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2 + 2i)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - i)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - (1 + i)x_2 = 0 \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι οι δυο εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Πράγματι :

$$2x_1 - (1 + i)x_2 = 0 \Leftrightarrow (1 - i)x_1 - x_2 = 0$$

Επομένως $(1 - i)x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = (1 - i)x_1$. Άρα κάθε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ_1 είναι της μορφής

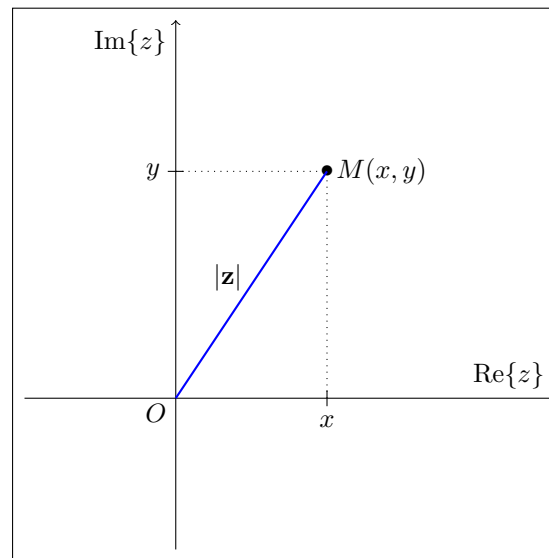
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ (1 - i)\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Είναι εύκολο να δείχτεί ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 είναι της μορφής $\vec{y} = \overline{(\vec{x})} = \begin{bmatrix} \alpha \\ (1 + i)\alpha \end{bmatrix}$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια των γεγονότων ότι (α) $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ και (β) τα στοιχεία του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί.

Μέτρο και Όρισμα Μιγαδικού Αριθμού

Ορισμός 11. Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων O , δηλαδή

$$|z| = \left| \overrightarrow{OM} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Σχήμα 3: Μέτρο μιγαδικού.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού είναι πάντα θετικός πραγματικός αριθμός. Το μέτρο (στο σύνολο $\mathbb{C}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν μια επέκταση της απόλυτης τιμής (στο σύνολο $\mathbb{R}$).

Ιδιότητες Μέτρου Μιγαδικού Αριθμού

Έστω z, z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύουν:

- Μέτρο αντίθετου: $|z| = |-z|$
- Μέτρο συζυγή: $|z| = |\bar{z}|$
- Τετράγωνο μέτρου: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- Μέτρο γινομένου (γενικεύεται για περισσότερους μιγαδικούς)

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

- Μέτρο πηλίκου $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, με $z_2 \neq 0$

- Μέτρο δύναμης

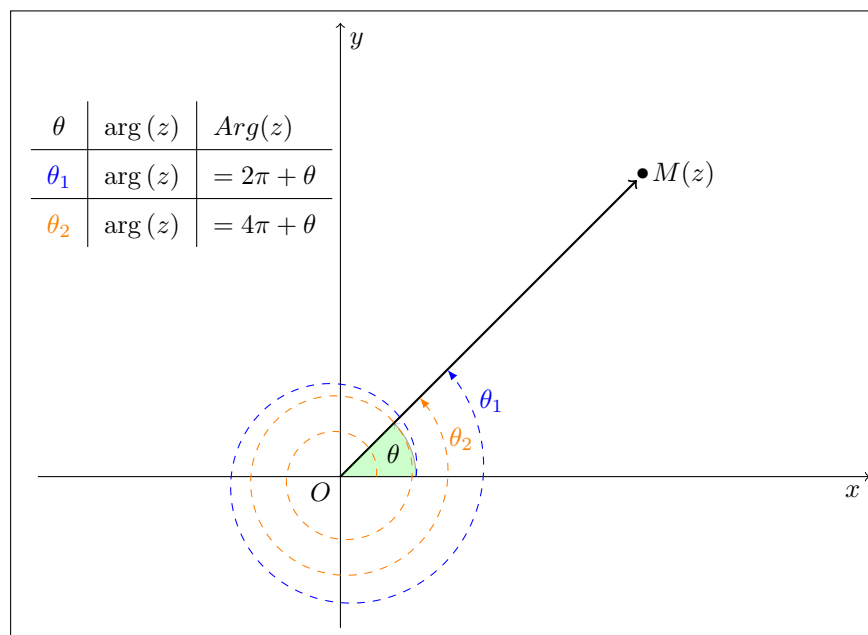
$$|z^n| = |z|^n, \quad \forall n \geq 1$$

- Τριγωνική ανισότητα

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Μέτρο και Όρισμα Μιγαδικού Αριθμού

Ορισμός 12. (Όρισμα/Πρωτεύον Όρισμα) Έστω ένας αριθμός $z = x + yi$ και $\overrightarrow{OM}$ η διανυσματική ακτίνα του. Ορίζουμε σαν όρισμα του μιγαδικού z (και συμβολίζουμε με $\arg(z)$) καθεμία από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM . Από όλα τα (άπειρα το πλήθος) ορίσματα του z ακριβώς ένα βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αυτό ονομάζεται πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z και συμβολίζεται με $\text{Arg}(z)$.

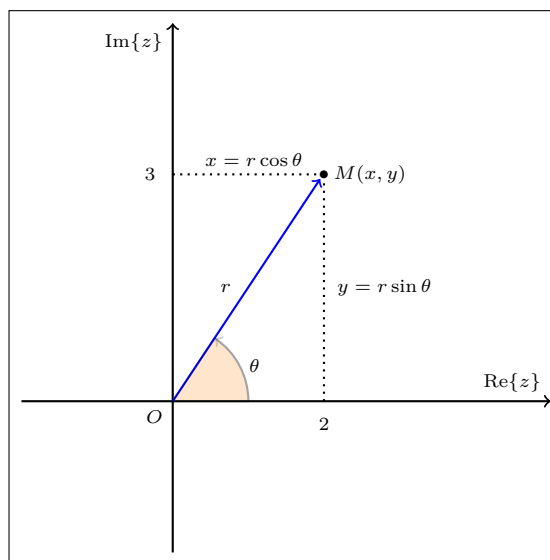


Σχήμα 4: Όρισμα μιγαδικού αριθμού.

Ορισμός 13. (Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού) Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi \neq 0$. Αν r είναι το μέτρο του και θ ένα όρισμα του, τότε ο μιγαδικός μπορεί να γραφεί και στην μορφή

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Η μορφή αυτή ονομάζεται τριγωνομετρική.



Σχήμα 5: Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού

Ορισμός 14. (Τύπος του Euler) Έστω $\theta \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Με την βοήθεια του παραπάνω ορισμού η τριγωνομετρική μορφή μπορεί να γραφεί λίγο πιο "κομψά".

Ορισμός 15. (Εκθετική Μορφή Μιγαδικού) Καθε μιγαδικός z μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$z = re^{i\theta},$$

όπου $r = |z|$ και $\theta = \arg(z)$. Η μορφή αυτή ονομάζεται εκθετική ή πολική. Το μέτρο r και το όρισμα θ καλούνται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου $M(x, y)$.

Λυμένη Άσκηση 8. Να γραφούν σε εκθετική μορφή οι μιγαδικοί: (α) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, (β) $z_5 = 1$ και (γ) $z_6 = i$.

(α) Για το μέτρο: $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Για το όρισμα: ψάχνω γωνία θ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} . \text{ Μια τέτοια γωνία είναι η } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (μάλιστα είναι και το πρωτεύον όρισμα}$$

αφού $\theta \in [0, 2\pi]$). Άρα

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Λυμένη Άσκηση 8. Να γραφούν σε εκθετική μορφή οι μιγαδικοί: (α) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, (β) $z_5 = -1$ και (γ) $z_6 = i$.

(α) Για το μέτρο: $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Για το όρισμα: ψάχνω γωνία θ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} .$$

Μια τέτοια γωνία είναι η $\theta = \frac{\pi}{3}$ (μάλιστα είναι και το πρωτεύον όρισμα αφού $\theta \in [0, 2\pi]$). Άρα

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$(\beta) \quad z_5 = -1 = 1 (\cos \pi + i \sin \pi) = e^{i\pi}.$$

$$(\gamma) \quad z_6 = i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

³Παρατηρείστε ότι : $e^{i\pi} + 1 = 0$. Αυτή η σχέση, που συνδέει τρεις βασικές μαθηματικές σταθερές, είναι γνωστή ταυτότητα του Euler και θεωρείται παράδειγμα ιδιαίτερου μαθηματικού κάλους.

Πρόταση 3. (Ιδιότητες Εκθετικής Μορφής) Έστω $z = re^{i\theta}$, $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ και $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ μιγαδικοί αριθμοί σε εκθετική μορφή. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

-

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Ισότητα

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

- Συζυγής

$$\bar{z} = re^{-i\theta}.$$

- Πολλαπλασιασμός

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

- Διαίρεση

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

- Θεώρημα του De Moivre

$$z^n = r^n e^{i(n\theta)}.$$