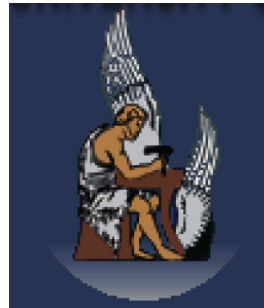


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 8η



Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

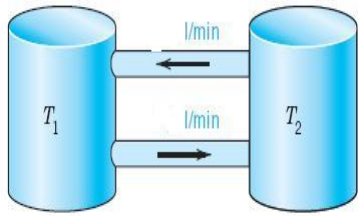
Πολυτεχνείο Κρήτης

2017

Μέρος 3ο

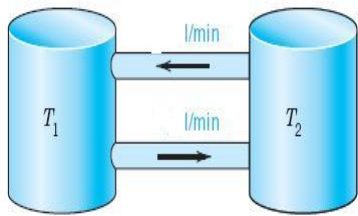
Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Ένα παράδειγμα



Δύο δεξαμενές περιέχουν 100gal ($\times 3.78\text{l}$) νερού η καθεμία. Η T_1 έχει καθαρό νερό και η T_2 περιέχει διαλυμένο λίπασμα 150lb . Το νερό ανακυκλώνεται μεταξύ των T_1 και T_2 με ρυθμό $2\text{gal}/\text{min}$. Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι ποσότητες λιπάσματος στο T_1 και T_2 αντίστοιχα, σε πόσο χρόνο το T_1 θα περιέχει το μισό σε ποσότητα λίπασμα από όσο θα περιέχει το T_2 ;

Ένα παράδειγμα



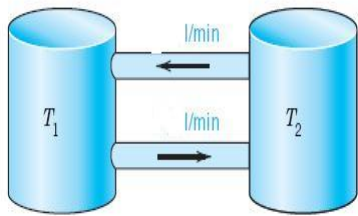
Δύο δεξαμενές περιέχουν 100gal ($\times 3.78\text{l}$) νερού η καθεμία. Η T_1 έχει καθαρό νερό και η T_2 περιέχει διαλυμένο λιπάσμα 150lb . Το νερό ανακυκλώνεται μεταξύ των T_1 και T_2 με ρυθμό $2\text{gal}/\text{min}$. Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι ποσότητες λιπάσματος στο T_1 και T_2 αντίστοιχα, σε πόσο χρόνο το T_1 θα περιέχει το μισό σε ποσότητα λίπασμα από όσο θα περιέχει το T_2 ;

Οι (χρονικές) μεταβολές σε κάθε δεξαμενή είναι $y_1'(t)$ και $y_2'(t)$

$$y_1' = \text{Εισροή}/\text{min} - \text{Εκροή}/\text{min} = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1;$$

$$y_2' = \text{Εισροή}/\text{min} - \text{Εκροή}/\text{min} = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2$$

Ένα παράδειγμα



Δύο δεξαμενές περιέχουν $100gal$ ($\times 3.78l$) νερού η καθεμία. Η T_1 έχει καθαρό νερό και η T_2 περιέχει διαλυμένο λιπάσμα $150lb$. Το νερό ανακυκλώνεται μεταξύ των T_1 και T_2 με ρυθμό $2gal/min$. Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι ποσότητες λιπάσματος στο T_1 και T_2 αντίστοιχα, σε πόσο χρόνο το T_1 θα περιέχει το μισό σε ποσότητα λίπασμα από όσο θα περιέχει το T_2 ;

Οι (χρονικές) μεταβολές σε κάθε δεξαμενή είναι $y_1'(t)$ και $y_2'(t)$

$$y_1' = \text{Εισροή}/min - \text{Εκροή}/min = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1;$$

$$y_2' = \text{Εισροή}/min - \text{Εκροή}/min = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2$$

$$\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix} \vec{y}, \quad \text{με αρχ. συνθ. } y_1(0) = 0, y_2(0) = 150.$$

Δύο Εξισώσεις με δύο αγνώστους (άγνωστες συναρτήσεις)

Έστω το **γραμμικό** σύστημα με αγνώστους $y_1(t)$ και $y_2(t)$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Δύο Εξισώσεις με δύο αγνώστους (άγνωστες συναρτήσεις)

Έστω το γραμμικό σύστημα με αγνώστους $y_1(t)$ και $y_2(t)$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα (εύκολο)

$$y_1' = y_1$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2.$

Δύο Εξισώσεις με δύο αγνώστους (άγνωστες συναρτήσεις)

Έστω το γραμμικό σύστημα με αγνώστους $y_1(t)$ και $y_2(t)$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα (εύκολο)

$$y_1' = y_1$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2.$

Λύση $y_1 = C_1 e^t$

Δύο Εξισώσεις με δύο αγνώστους (άγνωστες συναρτήσεις)

Έστω το γραμμικό σύστημα με αγνώστους $y_1(t)$ και $y_2(t)$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα (εύκολο)

$$y_1' = y_1$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2.$

$$\text{Λύση } y_1 = C_1 e^t \Rightarrow y_2' = C_1 e^t - y_2$$

Δύο Εξισώσεις με δύο αγνώστους (άγνωστες συναρτήσεις)

Έστω το γραμμικό σύστημα με αγνώστους $y_1(t)$ και $y_2(t)$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα (εύκολο)

$$y_1' = y_1$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

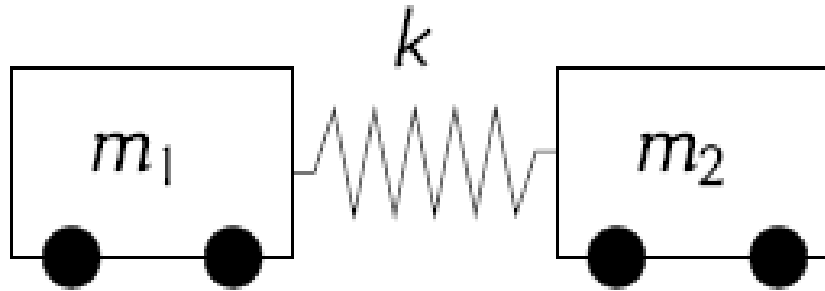
με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1, y_2(0) = 2$.

$$\text{Λύση } y_1 = C_1 e^t \Rightarrow y_2' = C_1 e^t - y_2$$

Με ολοκληρωτικό παράγοντα

$$e^t y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2t} + C_2 \Rightarrow y_2 = \frac{C_1}{2} e^t + C_2 e^{-t} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3/2$$

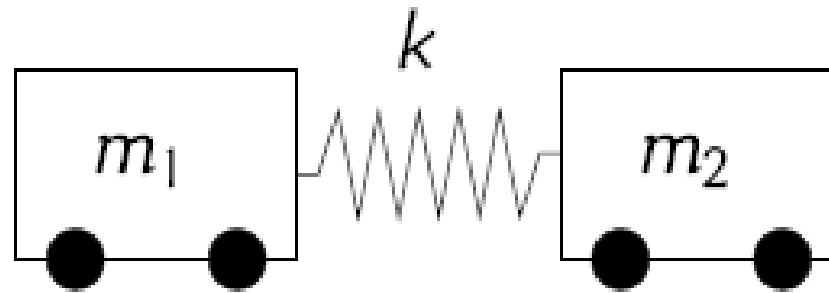
Όμως



$$m_1 x_1'' = k(x_2 - x_1)$$

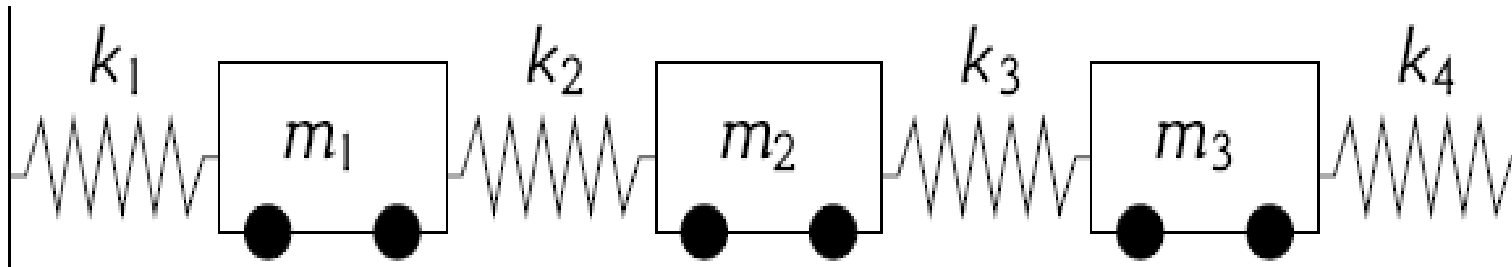
$$m_2 x_2'' = -k(x_2 - x_1)$$

Όμως



$$m_1 x_1'' = k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 x_2'' = -k(x_2 - x_1)$$



Πρόβλημα συστήματος δύο εξισώσεων

Δύο εξαρτημένες μεταβλητές (συναρτήσεις):

$$y_1(t), \quad y_2(t)$$

Γενικά, δύο διαφορικές εξισώσεις (δεύτερης τάξης):

$$y_1'' = f_1(y_1', y_2', y_1, y_2, t)$$

$$y_2'' = f_2(y_1', y_2', y_1, y_2, t)$$

Δύο αρχικές συνθήκες

$$y_1(0) = \alpha, \quad y_2(0) = \beta, \quad y_1'(0) = \gamma, \quad y_2'(0) = \delta$$

Μία εξίσωση (n -τάξης) $\Longleftrightarrow$ Ένα Σύστημα (1ης τάξης)

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y', y, t) \quad (A)$$

Μία εξίσωση (n -τάξης) $\Longleftrightarrow$ Ένα Σύστημα (1ης τάξης)

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y', y, t) \quad (A)$$

Θέτουμε: $u_1 = y, u_2 = y', u_3 = y'', \dots, u_n = y^{(n-1)}$ και

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = u_3$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1}' = u_n$$

$$u_n' = F(u_n, u_{n-1}, \dots, u_2, u_1, t)$$

και λύνω ως προς $u_1, u_2, \dots, u_n$

Η $y = u_1$ είναι ή λύση της αρχικής εξίσωσης (A)

Παράδειγμα (από σύστημα ελατήριο-μάζα)

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y \quad \Rightarrow \begin{matrix} u_1=y \\ u_2=y' \end{matrix}$$

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2$$

Παράδειγμα (από σύστημα ελατήριο-μάζα)

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} u_1=y \\ u_2=y' \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2 \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Παρόμοια είναι η διαδικασία για την λύση ενός συστήματος Δ.Ε. ανώτερης τάξης. Μπορούμε να μετατρέψουμε ένα σύστημα k — Δ.Ε. με k — αγνώστους, όλες n —τάξης, σε σύστημα $n \times k$ πρώτης τάξης με $n \times k$ αγνώστους.

Ένα Σύστημα (1ης τάξης) $\Leftrightarrow$ Μία εξίσωση (n -τάξης)

Έστω το (αυτόνομο) σύστημα με άγνωστες συνατήσεις τις $x(t)$ και $y(t)$ και αρχικές συνθήκες $x(0) = 1, y(0) = 0$

$$x' = 2y - x$$

$$y' = x$$

Ένα Σύστημα (1ης τάξης) $\Leftrightarrow$ Μία εξίσωση (n -τάξης)

Έστω το (αυτόνομο) σύστημα με άγνωστες συνατήσεις τις $x(t)$ και $y(t)$ και αρχικές συνθήκες $x(0) = 1, y(0) = 0$

$$x' = 2y - x$$

$$y' = x$$

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y'$$

Ένα Σύστημα (1ης τάξης) $\Leftrightarrow$ Μία εξίσωση (n -τάξης)

Έστω το (αυτόνομο) σύστημα με άγνωστες συνατήσεις τις $x(t)$ και $y(t)$ και αρχικές συνθήκες $x(0) = 1, y(0) = 0$

$$x' = 2y - x$$

$$y' = x$$

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \Rightarrow y'' + y' - 2y = 0$$

Η λύση αυτής (ομογενής 2ης τάξης) είναι: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

Ένα Σύστημα (1ης τάξης) $\Leftrightarrow$ Μία εξίσωση (n -τάξης)

Έστω το (αυτόνομο) σύστημα με άγνωστες συνατήσεις τις $x(t)$ και $y(t)$ και αρχικές συνθήκες $x(0) = 1, y(0) = 0$

$$x' = 2y - x$$

$$y' = x$$

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \Rightarrow y'' + y' - 2y = 0$$

Η λύση αυτής (ομογενής 2ης τάξης) είναι: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

$$x = y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$$

$$\text{Σταθερές : } x(0) = 1 = -2C_1 + C_2 = 0 \quad \text{και} \quad y(0) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow \\ C_1 = -1/3, C_2 = 1/3$$

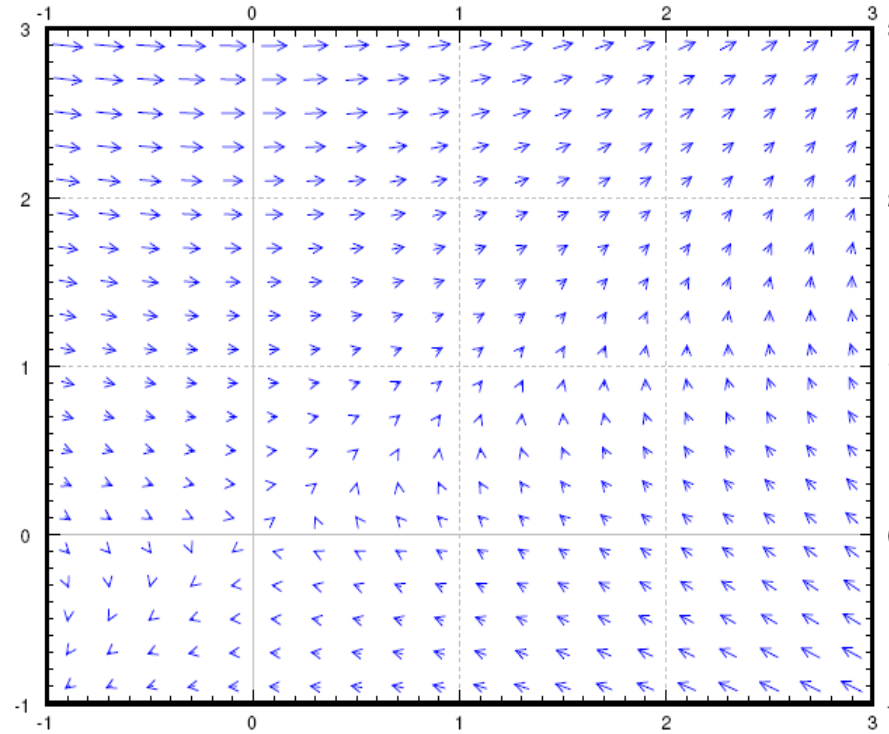
Άρα, η συνολική λύση:

$$x(t) = \frac{2e^{-2t} + e^t}{3} \quad \text{και} \quad y(t) = \frac{-e^{-2t} + e^t}{3}$$

Η διαδικασία αυτή λέγεται και **μέθοδος απαλοιφής**.

Πεδίο Διευθύνσεων ή Διανυσματικό Πεδίο

- Για κάθε **αυτόνομο σύστημα**, μπορούμε να ζωγραφίσουμε σε κάθε σημείο του $x - y$ επιπέδου, την κατεύθυνση (και το μέγεθος) διανυσματικά



Σχήμα 1: Πεδίο διευθύνσεων του συστήματος $x' = 2y - x, y' = x$

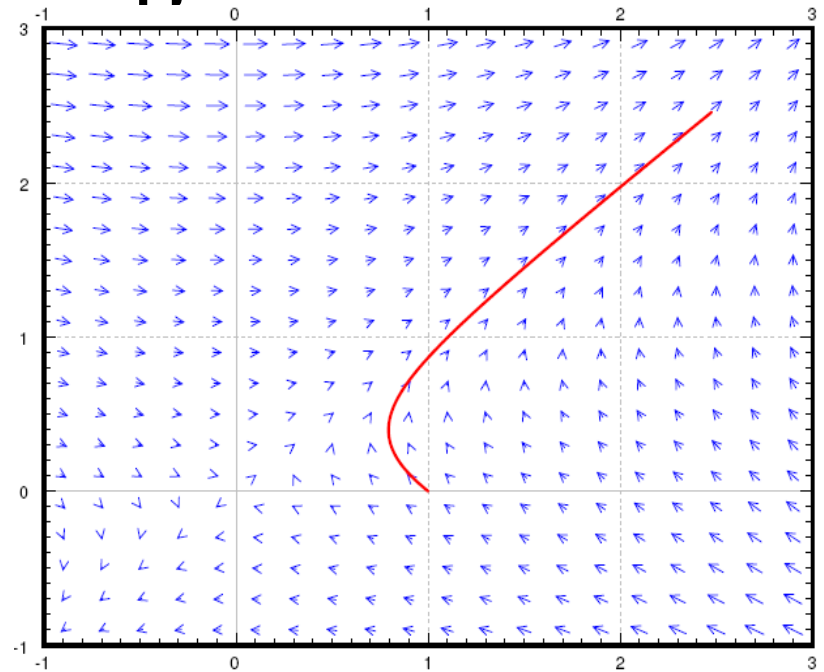
- Η διεύθυνση ορίζεται από το διάνυσμα $[2y - x, x]^T, \forall (x, y)$ στο xy -επίπεδο (των λύσεων)
- Η ταχύτητα με την οποία βαδίζουμε είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος:
$$\sqrt{(2y - x)^2 + x^2}$$

Παράσταση φάσεων & τροχιά

- Μπορούμε να ζωγραφίσουμε για $t \in [a, b]$ όλα τα σημεία $(x(t), y(t))$, η εικόνα που θα πάρουμε λέγεται **παράσταση φάσεων**
- Μιά συγκεκριμένη καμπύλη (βάση αρχικών τιμών) για $t \in [a, b]$ λέγεται **τροχιά ή καμπύλη επίλυσης**

Παράσταση φάσεων & τροχιά

- Μπορούμε να ζωγραφίσουμε για $t \in [a, b]$ όλα τα σημεία $(x(t), y(t))$, η εικόνα που θα πάρουμε λέγεται **παράσταση φάσεων**
- Μιά συγκεκριμένη καμπύλη (βάση αρχικών τιμών) για $t \in [a, b]$ λέγεται **τροχιά ή καμπύλη επίλυσης**



Σχήμα 2: Πεδίο διευθύνσεων του συστήματος $x' = 2y - x, y' = x$, με την τροχιά της λύσης που ξεκινά από το σημείο $(1, 0)$ για $0 \leq t \leq 2$.

Το xy —επίπεδο των λύσεων λέγεται **επίπεδο φάσης**.

Γραμμικά Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Διάνυσμα συναρτήσεων

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Πίνακας Συναρτήσεων

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A}'(t)$ ή $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ πίνακας με $a'_{ij}(t)$ στην ij —θέση
- Ισχύουν οι ίδιοι κανόνες παραγωγίσης με αυτές των συμβατικών συναρτήσεων

Γραμμικά συστήματα Δ.Ε. σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Γραμμικά συστήματα Δ.Ε. σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Παράδειγμα: οι εξισώσεις

$$\begin{aligned}x_1' &= 2tx_1 + e^t x_2 + t^2 \\x_2' &= \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t\end{aligned}$$

Γραμμικά συστήματα Δ.Ε. σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Παράδειγμα: οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1' &= 2tx_1 + e^t x_2 + t^2 \\ x_2' &= \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t \end{aligned}$$

Γράφονται στη μορφή

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ 1/t & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Γραμμικά συστήματα Δ.Ε. σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Παράδειγμα: οι εξισώσεις

$$\begin{aligned}x_1' &= 2tx_1 + e^t x_2 + t^2 \\x_2' &= \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t\end{aligned}$$

Γράφονται στη μορφή

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ 1/t & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$$

- Αν $\vec{f} = \vec{0}$ το σύστημα λέγεται **ομογενές**
- Αν ο $\mathbf{A}$ ανεξάρτητος από το t τότε έχει **σταθερούς συντελεστές**

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω ένα **ομογενές γραμμικό** σύστημα n -Σ.Δ.Ε., $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$, και έστω ότι $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι λύσεις του, τότε και η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

είναι επίσης λύση. Αν επιπλέον, έχουμε σύστημα n εξισώσεων ($\mathbf{A}$ είναι $n \times n$) και τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφεί στη μορφή της $(\star)$.

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω ένα **ομογενές γραμμικό** σύστημα n -Σ.Δ.Ε., $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$, και έστω ότι $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι λύσεις του, τότε και η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

είναι επίσης λύση. Αν επιπλέον, έχουμε σύστημα n εξισώσεων ($\mathbf{A}$ είναι $n \times n$) και τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφεί στη μορφή της $(\star)$.

- Η $(\star)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή πίνακας $\times$ διάνυσμα

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n = \mathbf{X}(t)\vec{c}$$

και ο πίνακας $\mathbf{X}(t)$ λέγεται **θεμελιώδης πίνακας (επίλυσης)**

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω ένα **ομογενές γραμμικό** σύστημα n -Σ.Δ.Ε., $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$, και έστω ότι $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι λύσεις του, τότε και η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

είναι επίσης λύση. Αν επιπλέον, έχουμε σύστημα n εξισώσεων ($\mathbf{A}$ είναι $n \times n$) και τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφεί στη μορφή της $(\star)$.

- Η $(\star)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή πίνακας $\times$ διάνυσμα

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n = \mathbf{X}(t)\vec{c}$$

και ο πίνακας $\mathbf{X}(t)$ λέγεται **θεμελιώδης πίνακας (επίλυσης)**

- Η ορίζουσα του $\mathbf{X}(t)$ ονομάζεται πάλι **Wronskian ορίζουσα** και είναι διαφορετική από μηδέν όταν τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα: Εάν $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}$ ένα γραμμικό σύστημα Σ.Δ.Ε. και $\vec{x}_p$ μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση του, τότε κάθε λύση του μπορεί να γραφεί σαν

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p,$$

όπου $\vec{x}_c$ είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς (συμπληρωματική).

Θεώρημα: Εάν $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}$ ένα γραμμικό σύστημα Σ.Δ.Ε. και $\vec{x}_p$ μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση του, τότε κάθε λύση του μπορεί να γραφεί σαν

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p,$$

όπου $\vec{x}_c$ είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς (συμπληρωματική).

Αρχικές συνθήκες: Δίνονται ως $\vec{x}(t_0) = \vec{b}$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Αν έχουμε βρεί τη γενική λύση

$$\vec{x}(t) = \mathbf{X}(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

πρέπει να βρούμε το $\vec{c}$ τ.ω.

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b} = \mathbf{X}(t_0)\vec{c} + \vec{x}_p(t_0)$$

Δηλ. να λύσουμε, ως προς $\vec{c}$ το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{X}(t_0)\vec{c} = \vec{b} - \vec{x}_p(t_0)$$

Παράδειγμα (ομογενές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Παράδειγμα (ομογενές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, γράφουμε

Παράδειγμα (ομογενές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, γράφουμε

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (ομογενές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, γράφουμε

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = c_1 e^t \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$$

Παράδειγμα (ομογενές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, γράφουμε

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = c_1 e^t \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2}e^t & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(0)\vec{c} = \vec{x}(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Λύση ομογενών συστημάτων (με σταθερούς συντελεστές)-Μέθοδος Ιδιοτιμών

Έστω ένα **ομογενές γραμμικό** σύστημα Σ.Δ.Ε. με $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

Λύση ομογενών συστημάτων (με σταθερούς συντελεστές)-Μέθοδος Ιδιοτιμών

Έστω ένα **ομογενές γραμμικό** σύστημα Σ.Δ.Ε. με $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$$

Μαντεύω ότι η λύση είναι της μορφής $\vec{x} = \vec{v}e^{\lambda t}$, $\vec{v}$ σταθερό διάνυσμα, $\lambda \in \mathbb{R}$ και έχουμε

$$\lambda \vec{v}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{v}e^{\lambda t}$$

Άρα το πρόβλημα ανάγεται στο

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda \vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

δηλ. εύρεσης των **ιδιοτιμών** (λ) και **ιδιοδιανυσμάτων** ($\vec{v}$) του $\mathbf{A}$.

Λύση ομογενούς – Μέθοδος Ιδιοτιμών (συνέχεια)

Αν $\vec{x}' = A\vec{x}$ όπου ο $n \times n$ πίνακας A έχει **διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ιδιοτιμές** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, τότε υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα αντίστοιχα **ιδιοδιανύσματα** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ και η γενική λύση του συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα-πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Παράδειγμα-πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Ιδιοδιανύσματα: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Γενική λύση

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_3 e^{3t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα-Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Παράδειγμα-Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Παράδειγμα-Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ και για τα **Ιδιοδιανύσματα** λύνω τα συστήματα

$$(\mathbf{A} - (1 \pm i)\mathbf{I})\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{για } v_2 = 1)$$

Παράδειγμα-Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ και για τα **Ιδιοδιανύσματα** λύνω τα συστήματα

$$(\mathbf{A} - (1 \pm i)\mathbf{I})\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (για } v_2 = 1 \text{)}$$

Γενική λύση:

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} + c_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} c_1 i e^{(1-i)t} - c_2 i e^{(1+i)t} \\ c_1 e^{(1-i)t} + c_2 e^{(1+i)t} \end{bmatrix}.$$

και πρέπει να ψάξουμε για ποιές (μιγαδικές) τιμές των c_1, c_2 ικανοποιούνται οι όποιες αρχικές συνθήκες μας δωθούν (μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler και να πάρουμε πραγματικές λύσεις)

Παρατηρήσεις στις Μιγαδικές ιδιοτιμές

- Οι μιγαδικές ιδιοτιμές παντοτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη: $\overline{a + ib} = a - ib$

Παρατηρήσεις στις Μιγαδικές ιδιοτιμές

- Οι μιγαδικές ιδιοτιμές παντοτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη: $\overline{a + ib} = a - ib$
- Πραγματικό μέρος $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ και φανταστικό $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Παρατηρήσεις στις Μιγαδικές ιδιοτιμές

- Οι μιγαδικές ιδιοτιμές παντοτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη: $\overline{a + ib} = a - ib$
- Πραγματικό μέρος $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ και φανταστικό $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- Ισχύει $\overline{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v}} = (\mathbf{A} - \bar{\lambda} \mathbf{I})\bar{\vec{v}}$, άρα
 $\vec{v}$ ιδιοδιανυσμα με ιδιοτιμή $a + ib \Rightarrow \bar{\vec{v}}$ ιδιοδιαν. με ιδιοτ. $a - ib$

Παρατηρήσεις στις Μιγαδικές ιδιοτιμές

- Οι μιγαδικές ιδιοτιμές παντοτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη: $\overline{a + ib} = a - ib$
- Πραγματικό μέρος $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ και φανταστικό $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- Ισχύει $\overline{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v}} = (\mathbf{A} - \bar{\lambda} \mathbf{I})\bar{\vec{v}}$, άρα

$\vec{v}$ ιδιοδιανυσμα με ιδιοτιμή $a + ib \Rightarrow \bar{\vec{v}}$ ιδιοδιαν. με ιδιοτ. $a - ib$

Αν $a + ib$ ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(a+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \overline{\vec{x}_1} = \bar{\vec{v}}e^{(a-ib)t}$

Παρατηρήσεις στις Μιγαδικές ιδιοτιμές

- Οι μιγαδικές ιδιοτιμές παντοτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη: $\overline{a + ib} = a - ib$
- Πραγματικό μέρος $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ και φανταστικό $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- Ισχύει $\overline{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v}} = (\mathbf{A} - \bar{\lambda} \mathbf{I})\bar{\vec{v}}$, άρα

$\vec{v}$ ιδιοδιανυσμα με ιδιοτιμή $a + ib \Rightarrow \bar{\vec{v}}$ ιδιοδιαν. με ιδιοτ. $a - ib$

Αν $a + ib$ ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(a+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \overline{\vec{x}_1} = \bar{\vec{v}}e^{(a-ib)t}$
- $\vec{x}_3 = Re(\vec{x}_1) = Re(\vec{v}e^{(a+ib)t}) = \frac{\vec{x}_1 + \overline{\vec{x}_1}}{2} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$

Παρατηρήσεις στις Μιγαδικές ιδιοτιμές

- Οι μιγαδικές ιδιοτιμές παντοτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη: $\overline{a + ib} = a - ib$
- Πραγματικό μέρος $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ και φανταστικό $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- Ισχύει $\overline{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v}} = (\mathbf{A} - \bar{\lambda} \mathbf{I})\bar{\vec{v}}$, άρα

$\vec{v}$ ιδιοδιανυσμα με ιδιοτιμή $a + ib \Rightarrow \bar{\vec{v}}$ ιδιοδιαν. με ιδιοτ. $a - ib$

Αν $a + ib$ ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(a+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \overline{\vec{x}_1} = \bar{\vec{v}}e^{(a-ib)t}$
- $\vec{x}_3 = Re(\vec{x}_1) = Re(\vec{v}e^{(a+ib)t}) = \frac{\vec{x}_1 + \bar{\vec{x}_1}}{2} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$
- $\vec{x}_4 = Im(\vec{x}_1) = \frac{\vec{x}_1 - \bar{\vec{x}_1}}{2i}$ και μάλιστα οι $\vec{x}_3, \vec{x}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παρατηρήσεις στις Μιγαδικές ιδιοτιμές

- Οι μιγαδικές ιδιοτιμές παντοτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη: $\overline{a + ib} = a - ib$
- Πραγματικό μέρος $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ και φανταστικό $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- Ισχύει $\overline{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v}} = (\mathbf{A} - \bar{\lambda} \mathbf{I})\bar{\vec{v}}$, άρα

$\vec{v}$ ιδιοδιανυσμα με ιδιοτιμή $a + ib \Rightarrow \bar{\vec{v}}$ ιδιοδιαν. με ιδιοτ. $a - ib$

Αν $a + ib$ ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(a+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \overline{\vec{x}_1} = \bar{\vec{v}}e^{(a-ib)t}$
- $\vec{x}_3 = Re(\vec{x}_1) = Re(\vec{v}e^{(a+ib)t}) = \frac{\vec{x}_1 + \overline{\vec{x}_1}}{2} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$
- $\vec{x}_4 = Im(\vec{x}_1) = \frac{\vec{x}_1 - \overline{\vec{x}_1}}{2i}$ και μάλιστα οι $\vec{x}_3, \vec{x}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Άρα, γενικά, για n διακριτές (μιγαδικές) ιδιοτιμές, δουλεύουμε με τις $a + ib$ και το αντίστοιχο της ιδιοδιάνυσμά τους $\vec{v}$ για να παράγω τις αντίστοιχες (πραγματικές) γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις (δηλ. δεν χρειαζόμαστε απαραίτητα τις συζυγείς τους).

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} (e^t \cos(t) + i e^t \sin(t)) = \begin{bmatrix} i e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) + i e^t \sin(t) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} (e^t \cos(t) + i e^t \sin(t)) = \begin{bmatrix} i e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) + i e^t \sin(t) \end{bmatrix}$$

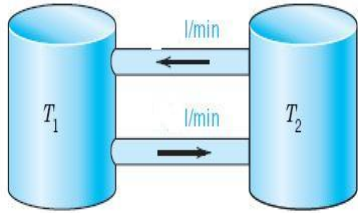
$$\operatorname{Re}(\vec{x}_1) = \begin{bmatrix} -e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(\vec{x}_1) = \begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{bmatrix}$$

Άρα η γενική (πραγματική) λύση

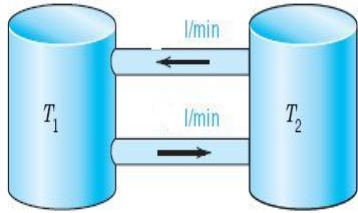
$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} -e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{bmatrix}$$

Συστήματα 2 εξισώσεων -Μοντελοποίηση I



Δύο δεξαμενές περιέχουν 100gal ($\times 3.78\text{l}$) νερού η καθεμία. Η T_1 έχει καθαρό νερό και η T_2 περιέχει διαλυμένο λιπασμα 150lb . Το νερό ανακυκλώνεται μεταξύ των T_1 και T_2 με ρυθμό $2\text{gal}/\text{min}$. Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι ποσότητες λιπάσματος στο T_1 και T_2 αντίστοιχα, σε πόσο χρόνο το T_1 θα περιέχει το μισό σε ποσότητα λίπασμα από όσο θα περιέχει το T_2 ;

Συστήματα 2 εξισώσεων -Μοντελοποίηση I



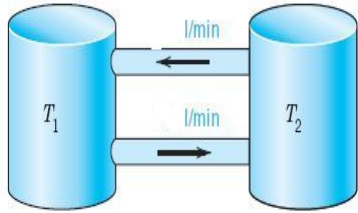
Δύο δεξαμενές περιέχουν 100gal ($\times 3.78\text{l}$) νερού η καθεμία. Η T_1 έχει καθαρό νερό και η T_2 περιέχει διαλυμένο λιπασμα 150lb . Το νερό ανακυκλώνεται μεταξύ των T_1 και T_2 με ρυθμό $2\text{gal}/\text{min}$. Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι ποσότητες λιπάσματος στο T_1 και T_2 αντίστοιχα, σε πόσο χρόνο το T_1 θα περιέχει το μισό σε ποσότητα λίπασμα από όσο θα περιέχει το T_2 ;

Οι (χρονικές) μεταβολές σε κάθε δεξαμενή είναι $y_1'(t)$ και $y_2'(t)$

$$y_1' = \text{Εισροή}/\text{min} - \text{Εκροή}/\text{min} = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1$$

$$y_2' = \text{Εισροή}/\text{min} - \text{Εκροή}/\text{min} = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2$$

Συστήματα 2 εξισώσεων -Μοντελοποίηση I



Δύο δεξαμενές περιέχουν 100gal ($\times 3.78\text{l}$) νερού η καθεμία. Η T_1 έχει καθαρό νερό και η T_2 περιέχει διαλύμένο λιπασμα 150lb . Το νερό ανακυκλώνεται μεταξύ των T_1 και T_2 με ρυθμό $2\text{gal}/\text{min}$. Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι ποσότητες λιπάσματος στο T_1 και T_2 αντίστοιχα, σε πόσο χρόνο το T_1 θα περιέχει το μισό σε ποσότητα λίπασμα από όσο θα περιέχει το T_2 ;

Οι (χρονικές) μεταβολές σε κάθε δεξαμενή είναι $y_1'(t)$ και $y_2'(t)$

$$y_1' = \text{Εισροή}/\text{min} - \text{Εκροή}/\text{min} = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1$$

$$y_2' = \text{Εισροή}/\text{min} - \text{Εκροή}/\text{min} = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2$$

$$\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix} \vec{y}$$

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 0.04) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.04$$

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 0.04) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.04$$

$$\text{Ιδιοδιανύσματα } \vec{v}_1 = [1, 1]^T, \vec{v}_2 = [1, -1]^T$$

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 0.04) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.04$$

Ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 1]^T$, $\vec{v}_2 = [1, -1]^T$

Γενική λύση

$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 0.04) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.04$$

$$\text{Ιδιοδιανύσματα } \vec{v}_1 = [1, 1]^T, \vec{v}_2 = [1, -1]^T$$

Γενική λύση

$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

Αρχικές συνθήκες :

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 150 \Rightarrow \vec{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Άρα $c_1 = 75$ και $c_2 = -75$

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 0.04) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.04$$

Ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 1]^T$, $\vec{v}_2 = [1, -1]^T$

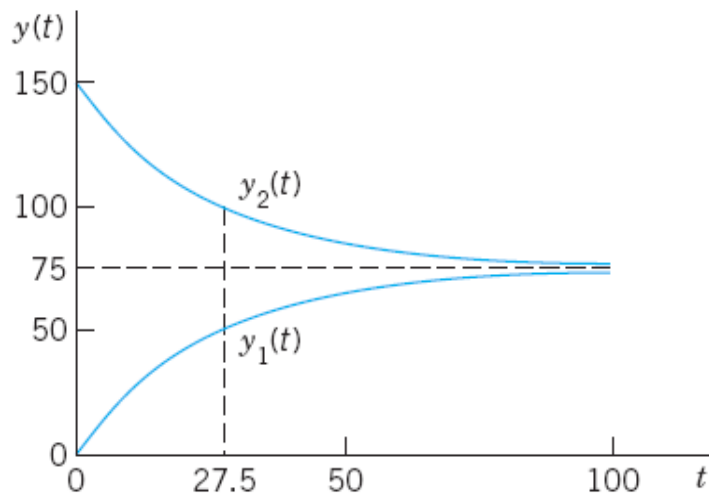
Γενική λύση

$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

Αρχικές συνθήκες :

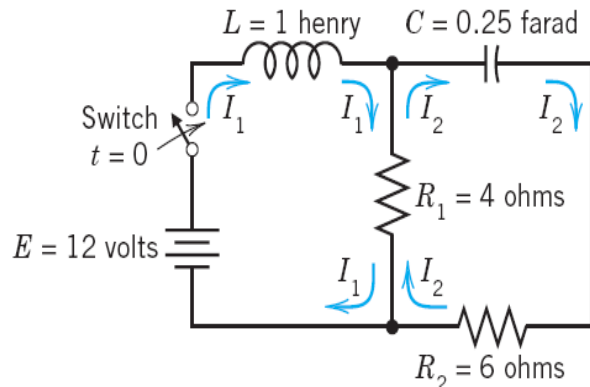
$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 150 \Rightarrow \vec{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Άρα $c_1 = 75$ και $c_2 = -75$



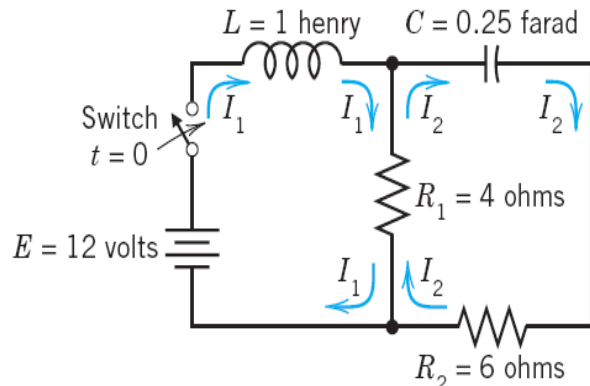
Το T_1 θα περιέχει τη μισή ποσότητα λιπάσματος του T_2 όταν το T_2 έχει το $2/3$ της αρχικής δηλ. $100lb/l$ άρα $y_1 = 75 - 75e^{-0.04t} = 50 \Rightarrow e^{-0.04t} = 1/3 \Rightarrow t = (\ln 3)/0.04 = 27.5min$.

Συστήματα 2 εξισώσεων -Μοντελοποίηση II



Θέλουμε στο δίκτυο να υπολογίσουμε τις εντάσεις $I_1(t)$ και $I_2(t)$. Στο $t = 0$ (όταν κλείνει ο διακόπτης) όλες οι ποσότητες είναι 0.

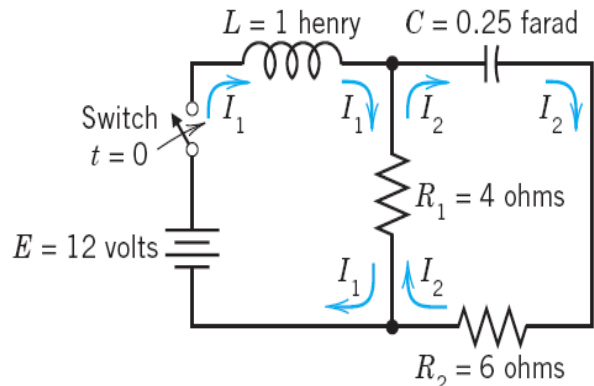
Συστήματα 2 εξισώσεων -Μοντελοποίηση II



Θέλουμε στο δίκτυο να υπολογίσουμε τις εντάσεις $I_1(t)$ και $I_2(t)$. Στο $t = 0$ (όταν κλείνει ο διακόπτης) όλες οι ποσότητες είναι 0.

Μοντελοποίηση Χρήση του νόμου του Kirchhoff: Η ροή φορτίου σ'ένα κλειστό κύκλωμα είναι ίσο με το άθροισμα των μεταβολών των φορτίων των στοιχείων του κυκλώματος

Συστήματα 2 εξισώσεων -Μοντελοποίηση II



Θέλουμε στο δίκτυο να υπολογίσουμε τις εντάσεις $I_1(t)$ και $I_2(t)$. Στο $t = 0$ (όταν κλείνει ο διακόπτης) όλες οι ποσότητες είναι 0.

Μοντελοποίηση Χρήση του νόμου του Kirchhoff: Η ροή φορτίου σ'ένα κλειστό κύκλωμα είναι ίσο με το άθροισμα των μεταβολών των φορτίων των στοιχείων του κυκλώματος

$$I_1' = -4I_1 + 4I_2 + 12$$

$$I_2' = -1.6I_1 + 1.2I_2 + 4.8$$

$$\vec{I}' = \mathbf{A}\vec{I} + \vec{g} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix} \vec{I} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

Λόγω του $\vec{g}$ έχουμε **μη-ομογενές** σύστημα Σ.Δ.Ε.

$$\text{Ιδιοτιμές από } \det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -0.8$$

Ιδιοτιμές από $\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -0.8$

Ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [2, 1]^T, \vec{v}_2 = [1, 0.8]^T$

Ιδιοτιμές από $\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -0.8$

Ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [2, 1]^T, \vec{v}_2 = [1, 0.8]^T$

Γενική λύση **ομογενούς**

$$\vec{I}_c = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t}$$

Ιδιοτιμές από $\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -0.8$

Ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [2, 1]^T, \vec{v}_2 = [1, 0.8]^T$

Γενική λύση **ομογενούς**

$$\vec{I}_c = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t}$$

Για την **ειδική λύση** $\vec{I}_p$ δοκιμάζουμε ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a} = [a_1, a_2]^T$,
γιατί το $\vec{g}$ σταθερό, τότε $\vec{I}'_p = \vec{0}$ και έχουμε $\mathbf{A}\vec{a} + \vec{g} = 0$

$$-4a_1 + 4a_2 + 12 = 0$$

$$-1.6a_1 + 1.2a_2 + 4.8 = 0 \Rightarrow a_1 = 3, a_2 = 0$$

Άρα η λύση μας είναι: $\vec{I} = \vec{I}_c + \vec{I}_p = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \vec{a}$

Ιδιοτιμές από $\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -0.8$

Ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [2, 1]^T, \vec{v}_2 = [1, 0.8]^T$

Γενική λύση **ομογενούς**

$$\vec{I}_c = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t}$$

Για την **ειδική λύση** $\vec{I}_p$ δοκιμάζουμε ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a} = [a_1, a_2]^T$, γιατί το $\vec{g}$ σταθερό, τότε $\vec{I}_p' = \vec{0}$ και έχουμε $\mathbf{A}\vec{a} + \vec{g} = 0$

$$-4a_1 + 4a_2 + 12 = 0$$

$$-1.6a_1 + 1.2a_2 + 4.8 = 0 \Rightarrow a_1 = 3, a_2 = 0$$

Άρα η λύση μας είναι: $\vec{I} = \vec{I}_c + \vec{I}_p = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \vec{a}$

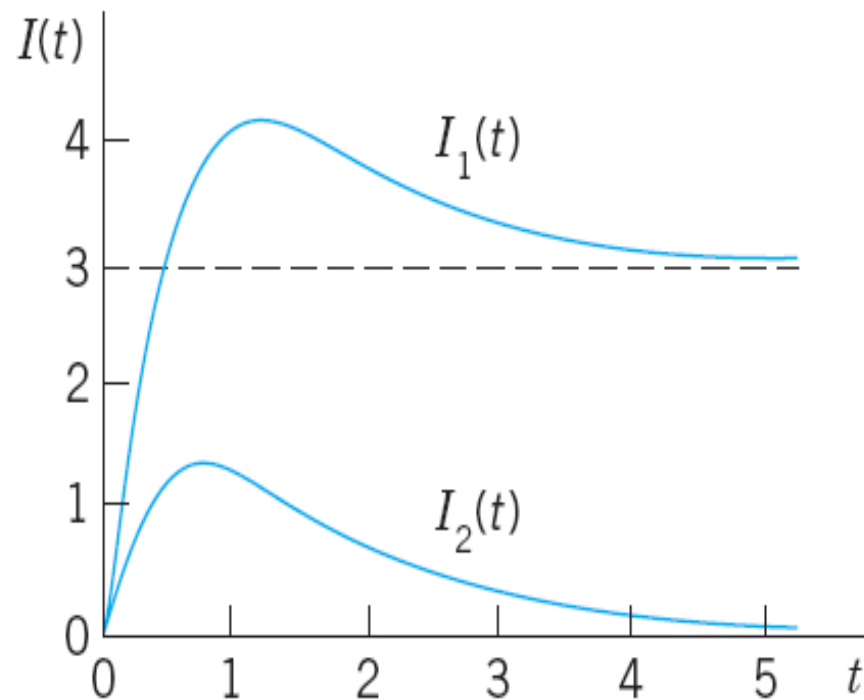
Αρχικές συνθήκες $I_1(0) = 0, I_2(0) = 0 \Rightarrow$ οι σταθερές

$$\vec{I}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = -4, c_2 = 5$$

Η λύση

$$I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0.8t} + 3$$

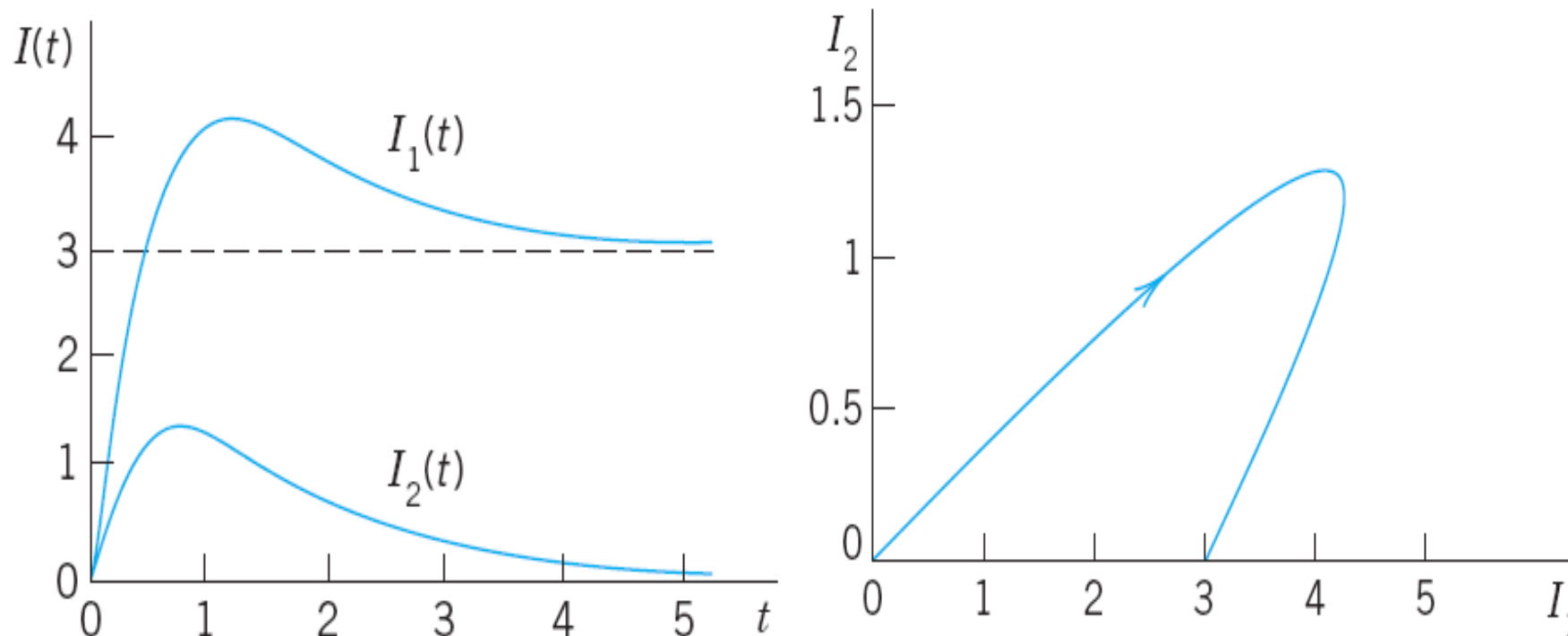
$$I_1 = -4e^{-2t} + 5e^{-0.8t}$$



Η λύση

$$I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0.8t} + 3$$

$$I_1 = -4e^{-2t} + 5e^{-0.8t}$$



και η τροχιά στο $I_1 I_2$ — επίπεδο φάσης

Συστήματα 2 εξισώσεων -Διανυσματικά πεδία

Συνεχίζουμε με $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με σταθερούς συντελεστές, δηλ.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}' = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Με βάση τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$ μπορούμε να δούμε πως μοιάζει το **διανυσματικό πεδίο**, οι **τροχιές** και η **παράσταση φάσεων**.

Συστήματα 2 εξισώσεων -Διανυσματικά πεδία

Συνεχίζουμε με $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με σταθερούς συντελεστές, δηλ.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}' = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Με βάση τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$ μπορούμε να δούμε πως μοιάζει το **διανυσματικό πεδίο**, οι **τροχιές** και η **παράσταση φάσεων**.

Περίπτωση 1: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ έχουμε **θετικές πραγματικές** και

διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Συστήματα 2 εξισώσεων -Διανυσματικά πεδία

Συνεχίζουμε με $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με σταθερούς συντελεστές, δηλ.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}' = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Με βάση τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$ μπορούμε να δούμε πως μοιάζει το **διανυσματικό πεδίο**, οι **τροχιές** και η **παράσταση φάσεων**.

Περίπτωση 1: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ έχουμε **θετικές πραγματικές** και

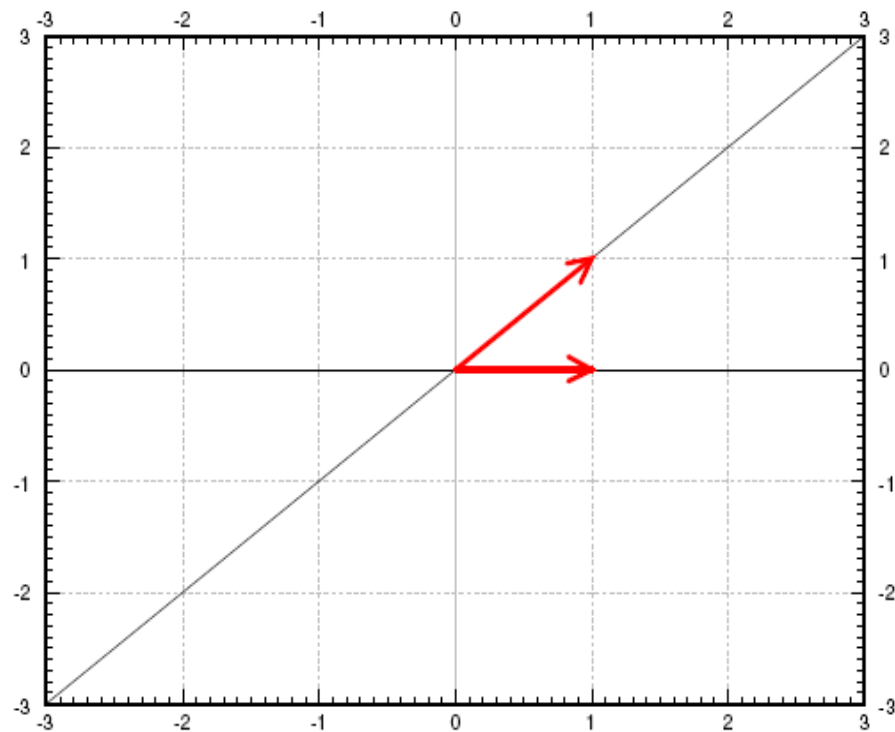
διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

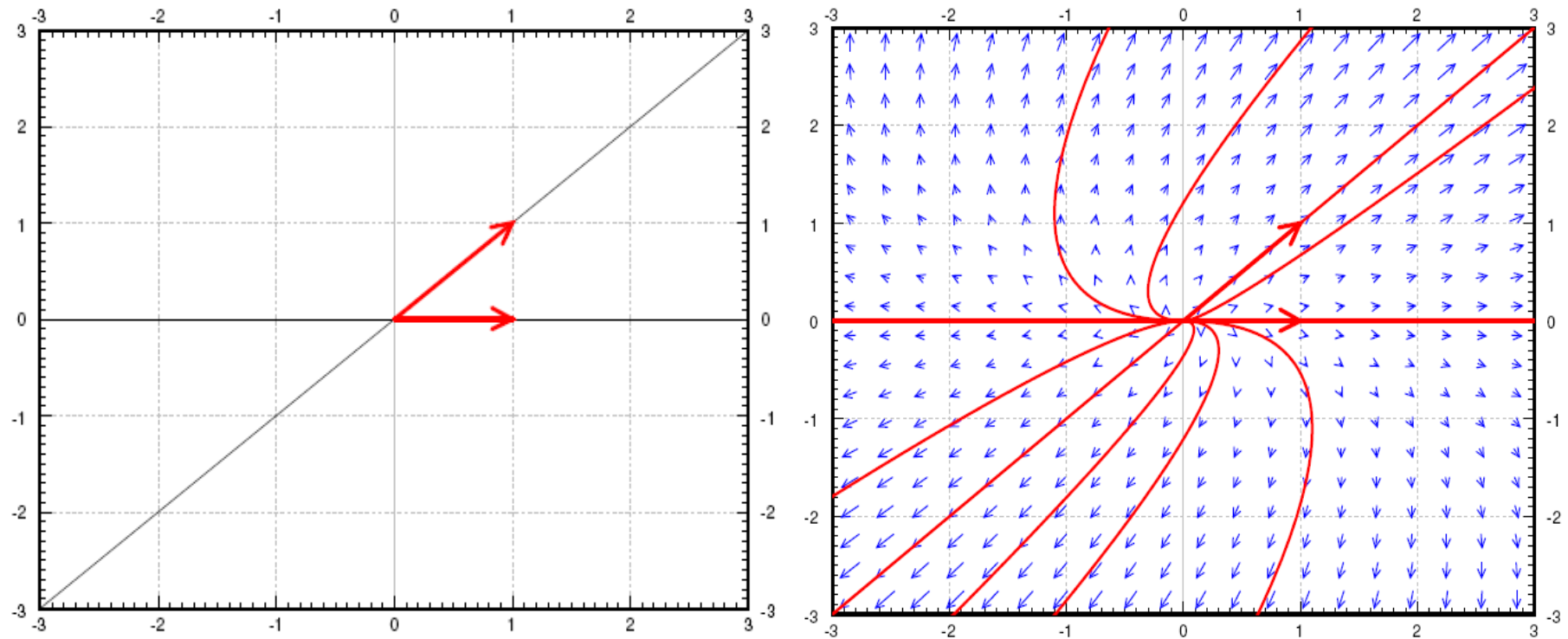
Παρατηρούμε ότι οι λύσεις $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = a\vec{v}$, $a \in \mathbb{R}$, άρα η παραγωγός της

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(a\vec{v}) = a\mathbf{A}(\vec{v}) = a\lambda\vec{v}$$

Τα ιδιοδιανύσματα του A με τις κατευθύνσεις τους (περίπτωση 1)

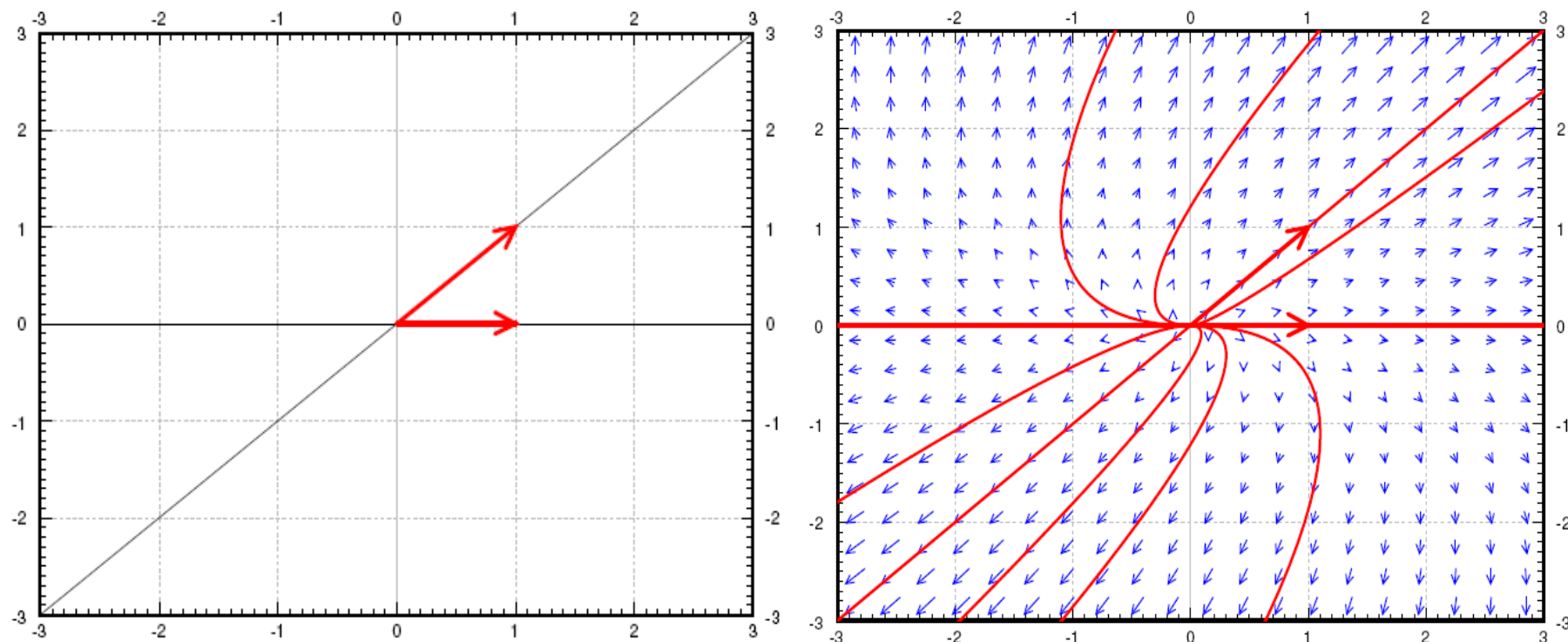


Τα ιδιοδιανύσματα του A με τις κατευθύνσεις τους (περίπτωση 1)



και το διανυσματικό πεδίο και μερικές λύσεις (τροχιές)-διάγραμμα φάσης

Τα ιδιοδιανύσματα του A με τις κατευθύνσεις τους (περίπτωση 1)



και το διανυσματικό πεδίο και μερικές λύσεις (τροχιές)-διάγραμμα φάσης

Η παράσταση φάσεων περιέχει **κόμβο πηγής ή ασταθή-κομβοασταθή κόμβο**

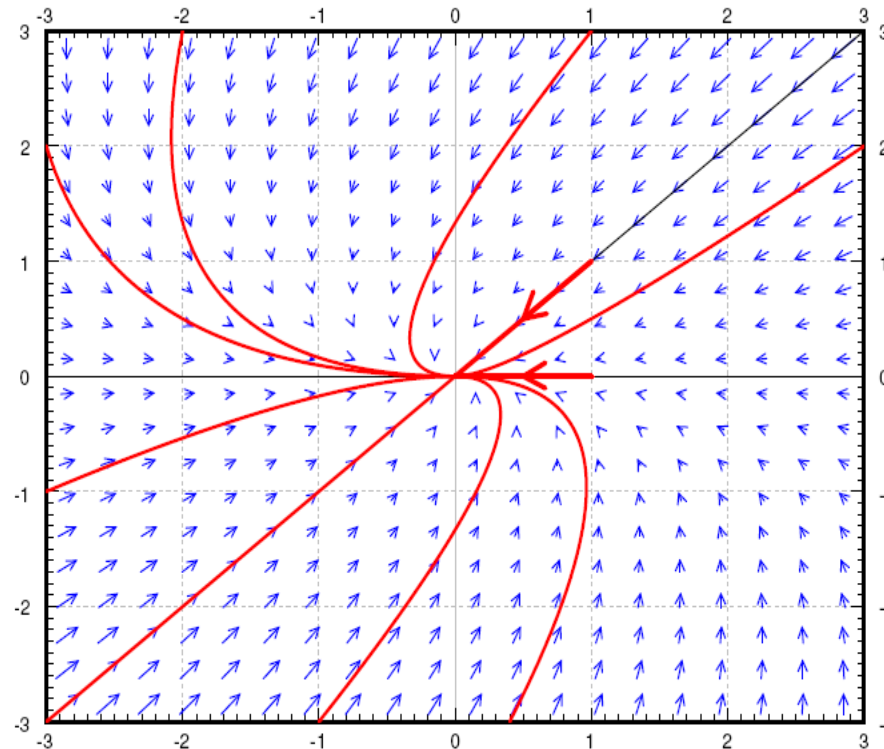
Περίπτωση 2: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ έχουμε **αρνητικές πραγματικές** και διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Περίπτωση 2: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ έχουμε **αρνητικές πραγματικές** και

διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οι λύσεις παρόμοια με τη περίπτωση 1, αλλά με αντίθετη κατεύθυνση:

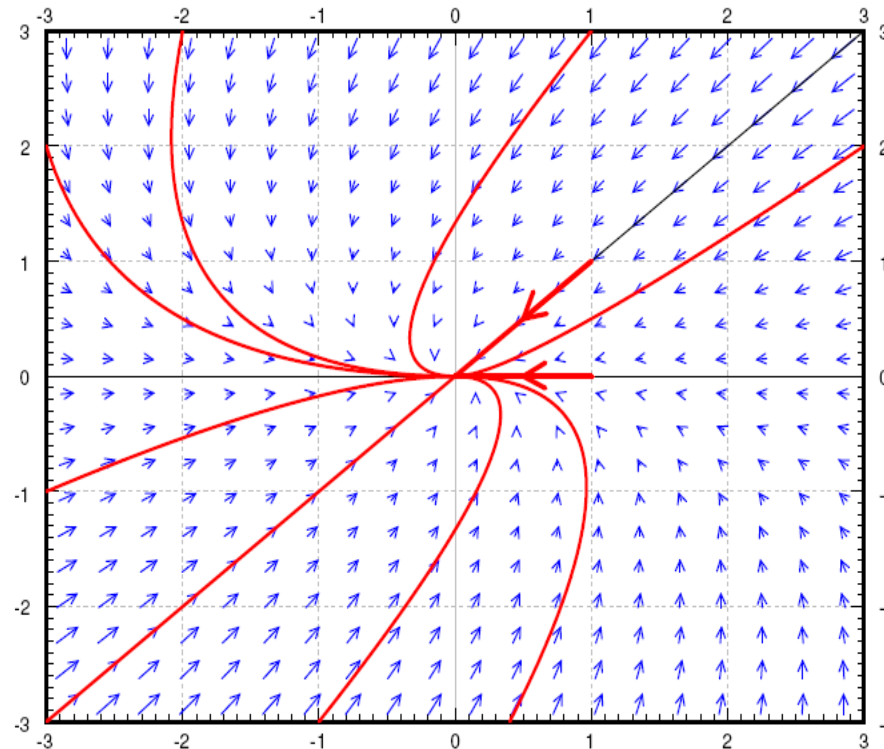


Περίπτωση 2: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ έχουμε **αρνητικές πραγματικές** και

διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

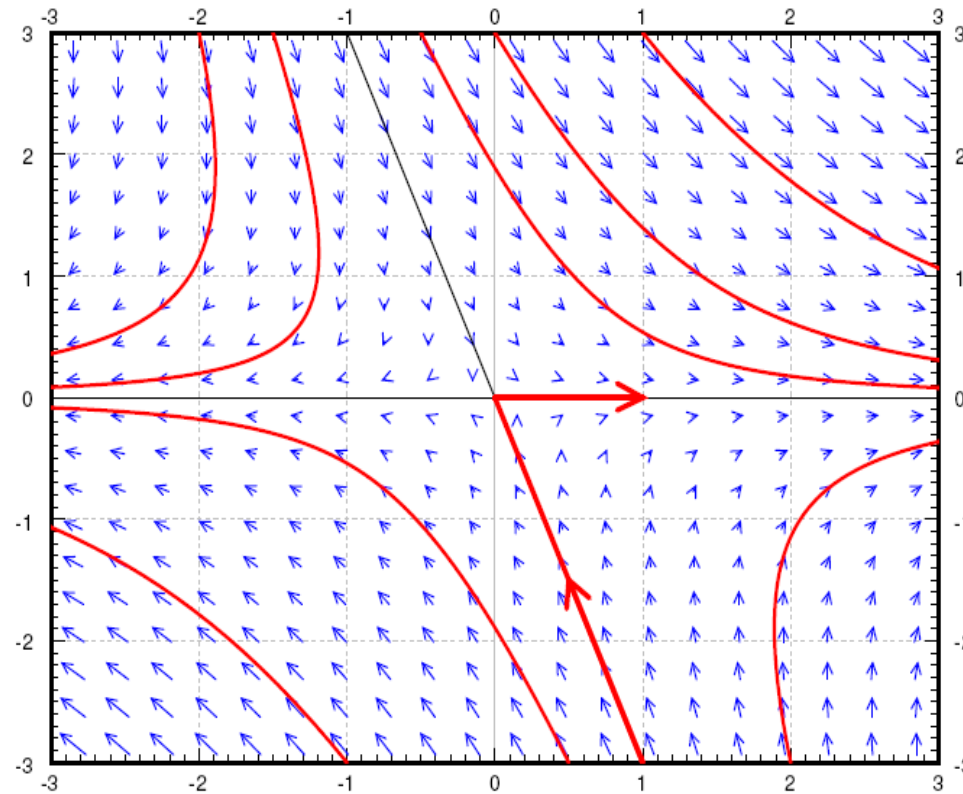
Οι λύσεις παρόμοια με τη περίπτωση 1, αλλά με αντίθετη κατεύθυνση:



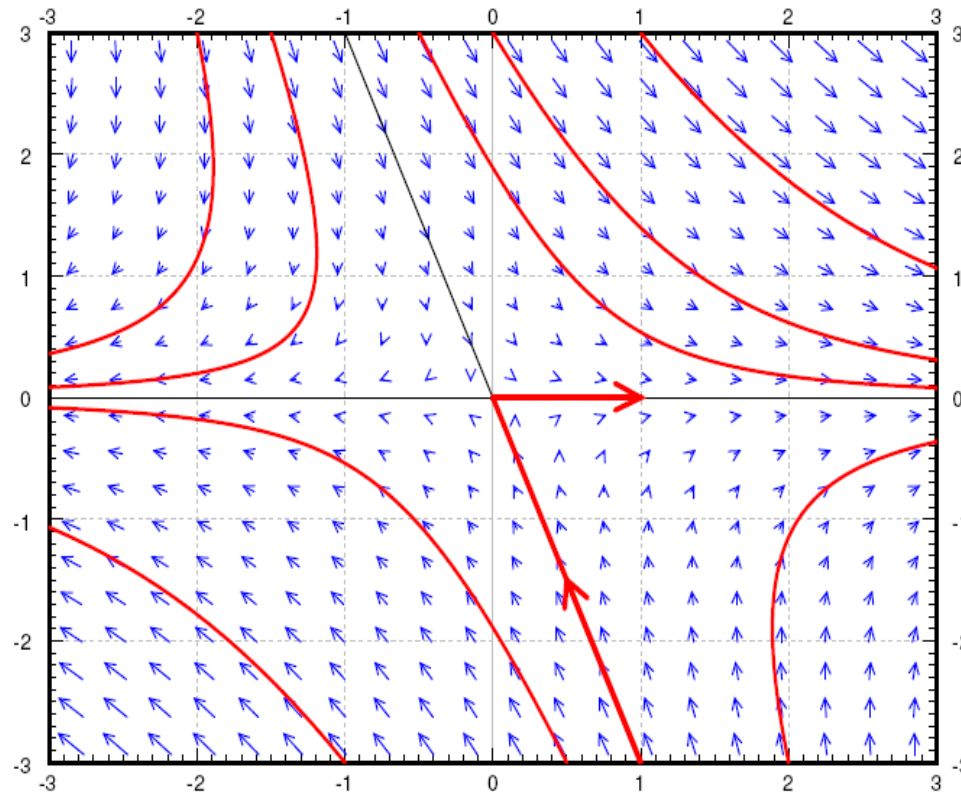
Η παράσταση φάσεων περιέχει **καταβόθρα ή ευσταθή-κόμβο** **ευσταθή κόμβος**

Περίπτωση 3: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ έχουμε **πραγματικές με αντιθετο πρόσημο** και διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [1, -3]^T$. Αντιστρέφεται η κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή

Περίπτωση 3: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ έχουμε **πραγματικές με αντιθετο πρόσημο** και διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [1, -3]^T$. Αντιστρέφεται η κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή



Περίπτωση 3: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ έχουμε **πραγματικές με αντιθετο πρόσημο** και διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [1, -3]^T$. Αντιστρέφεται η κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή



Η παράσταση φάσεων περιέχει **σαγματικό(α) σημείο(α)**

Περίπτωση 4: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές φανταστικές**

ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 2i]^T$ και $\vec{v}_2 = [1, -2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{i2t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} \right) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} \right) = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Δηλ. παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης

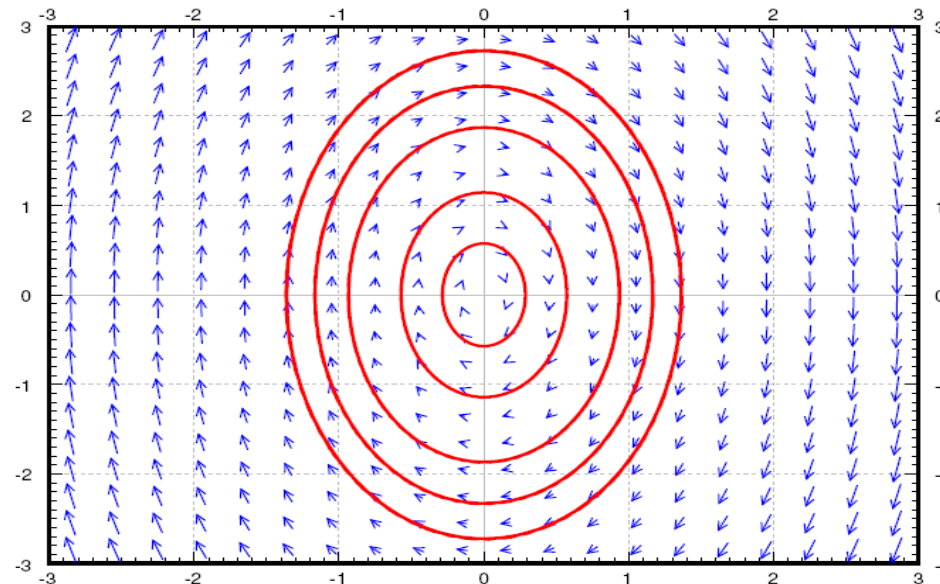
Περίπτωση 4: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές φανταστικές**

ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 2i]^T$ και $\vec{v}_2 = [1, -2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{i2t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} \right) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} \right) = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Δηλ. παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης



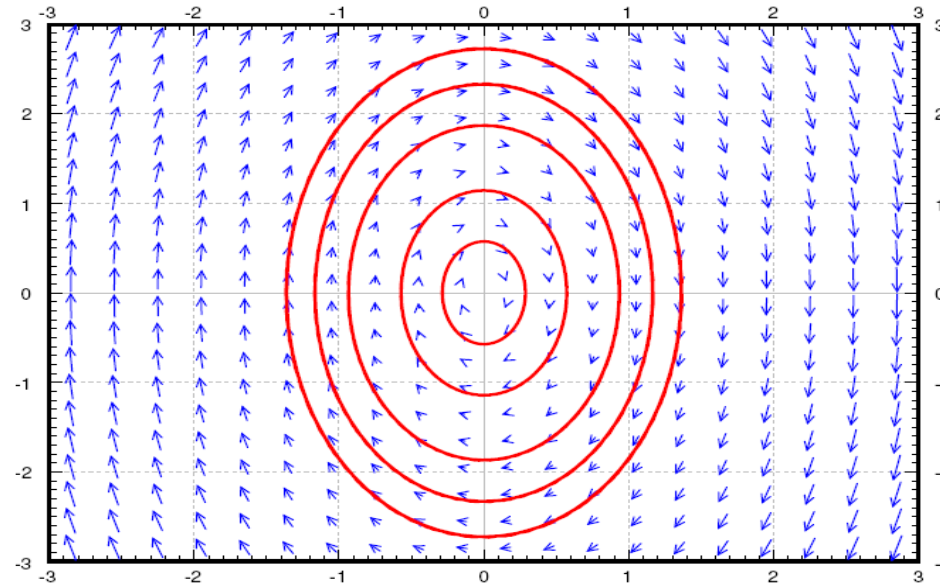
Περίπτωση 4: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές φανταστικές**

ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = [1, 2i]^T$ και $\vec{v}_2 = [1, -2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{i2t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} \right) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} \right) = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Δηλ. παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης



Η παράσταση φάσεων περιέχει λύσεις **ελλειπτικών**, λέγεται και **κέντρο**

Περίπτωση 5: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές με θετικό**

πραγματικό ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_{1,2} = [1, \pm 2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(1+2i)t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^t \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Λόγω του e^t οι λύσεις αυξάνουν όσο απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων

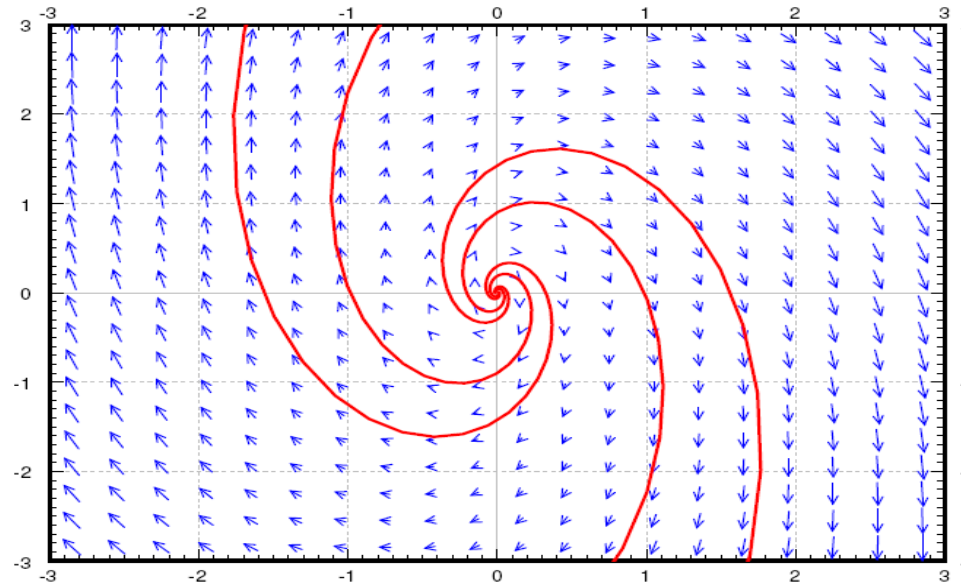
Περίπτωση 5: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές με θετικό**

πραγματικό ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_{1,2} = [1, \pm 2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(1+2i)t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^t \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Λόγω του e^t οι λύσεις αυξάνουν όσο απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων



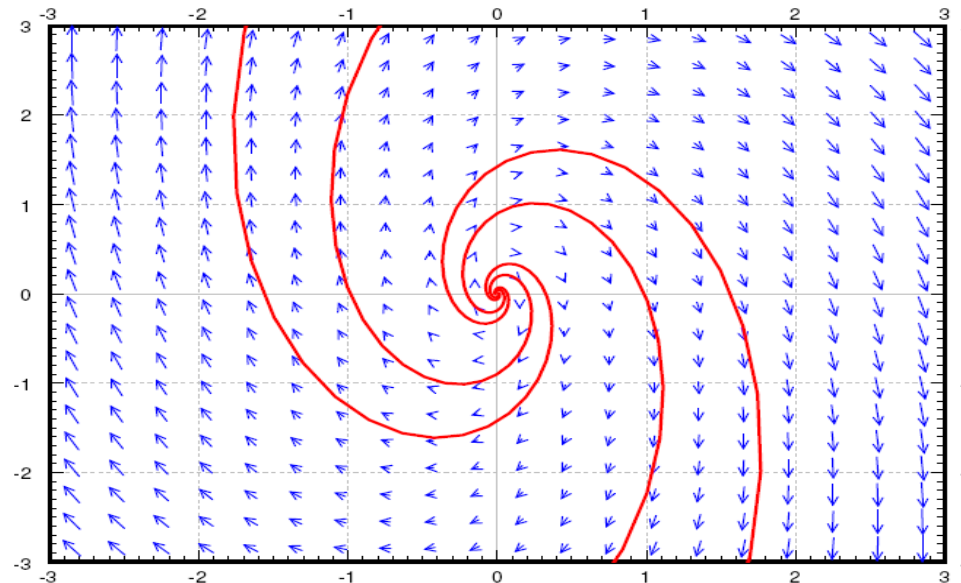
Περίπτωση 5: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές με θετικό**

πραγματικό ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_{1,2} = [1, \pm 2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(1+2i)t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^t \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Λόγω του e^t οι λύσεις αυξάνουν όσο απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων



Η παράσταση φάσεων περιέχει **σπειροειδή πηγή**

Περίπτωση 6: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές με αρνητικό**

πραγματικό ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -1 \mp 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_{1,2} = [1, \pm 2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(-1-2i)t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} -\sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Λόγω του e^{-t} οι λύσεις ελαττώνονται όσο απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων

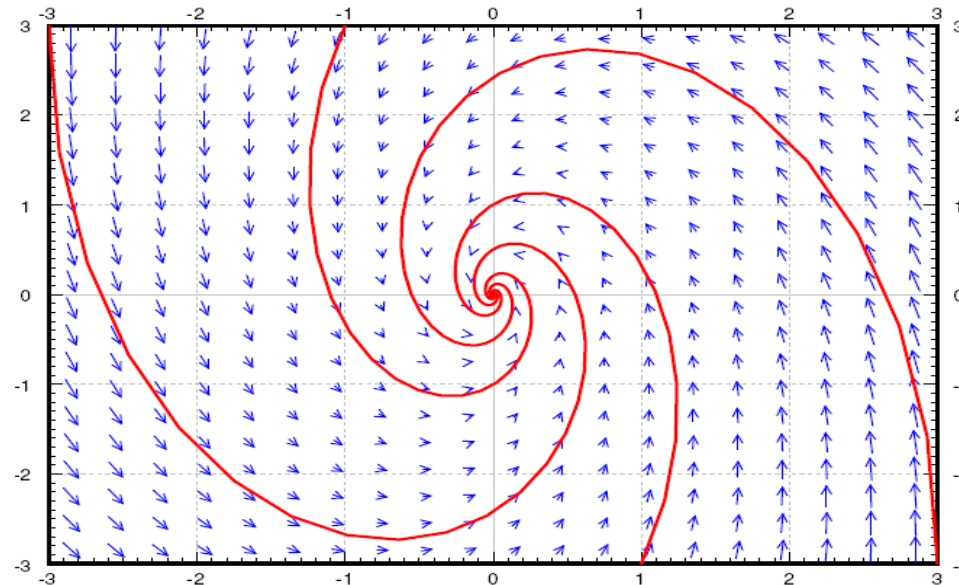
Περίπτωση 6: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές με αρνητικό**

πραγματικό ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -1 \mp 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_{1,2} = [1, \pm 2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(-1-2i)t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} -\sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Λόγω του e^{-t} οι λύσεις ελαττώνονται όσο απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων



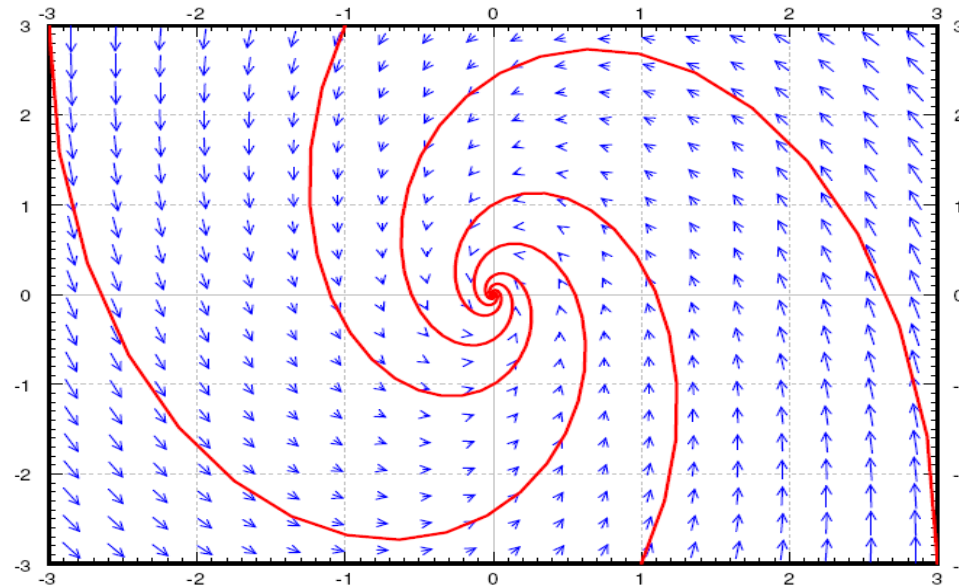
Περίπτωση 6: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε **μιγαδικές με αρνητικό**

πραγματικό ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -1 \mp 2i$ και ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_{1,2} = [1, \pm 2i]^T$.

Έχουμε για τη λύση $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(-1-2i)t}$ με

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{bmatrix} \text{ και } \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} -\sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Λόγω του e^{-t} οι λύσεις ελαττώνονται όσο απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων



Η παράσταση φάσεων περιέχει **σπριροειδή καταβόθρα**

Ιδιοτιμές με πολλαπλότητα

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}, \text{ με } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

- **Αλγεβρική πολλαπλότητα** = η πολλαπλότητα των ιδιοτιμών της χαρακτηριστικής εξίσωσης
- **Γεωμετρική πολλαπλότητα** ιδιοτιμής = το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της που μπορούμε να βρούμε.

Ιδιοτιμές με πολλαπλότητα

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}, \text{ με } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

- **Αλγεβρική πολλαπλότητα** = η πολλαπλότητα των ιδιοτιμών της χαρακτηριστικής εξίσωσης
- **Γεωμετρική πολλαπλότητα** ιδιοτιμής = το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της που μπορούμε να βρούμε.
Στο παράδειγμα τα ιδιοδιανύσματα είναι $[1, 0]^T$ και $[0, 1]^T$.
Η γενική λύση είναι

$$\vec{x}' = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Ιδιοτιμές με πολλαπλότητα

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}, \text{ με } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

- **Αλγεβρική πολλαπλότητα** = η πολλαπλότητα των ιδιοτιμών της χαρακτηριστικής εξίσωσης
- **Γεωμετρική πολλαπλότητα** ιδιοτιμής = το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της που μπορούμε να βρούμε.
Στο παράδειγμα τα ιδιοδιανύσματα είναι $[1, 0]^T$ και $[0, 1]^T$.
Η γενική λύση είναι

$$\vec{x}' = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Ορισμός : Αν για μία ιδιοτιμή, η Αλγεβρική της πολλαπλότητα = Γεωμετρική της πολλαπλότητα, αυτή λέγεται **πλήρης**

Θεώρημα (Υπέρθεσης για όποιες πραγματικές ιδιοτιμές)

Έστω ένα **ομογενές γραμμικό** σύστημα n -Σ.Δ.Ε. $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει n πραγματικές ιδιοτιμές (οι οποίες δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και **αν αυτές αντιστοιχούν σε n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$** , τότε η γενική λύση του συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

Παράδειγμα I

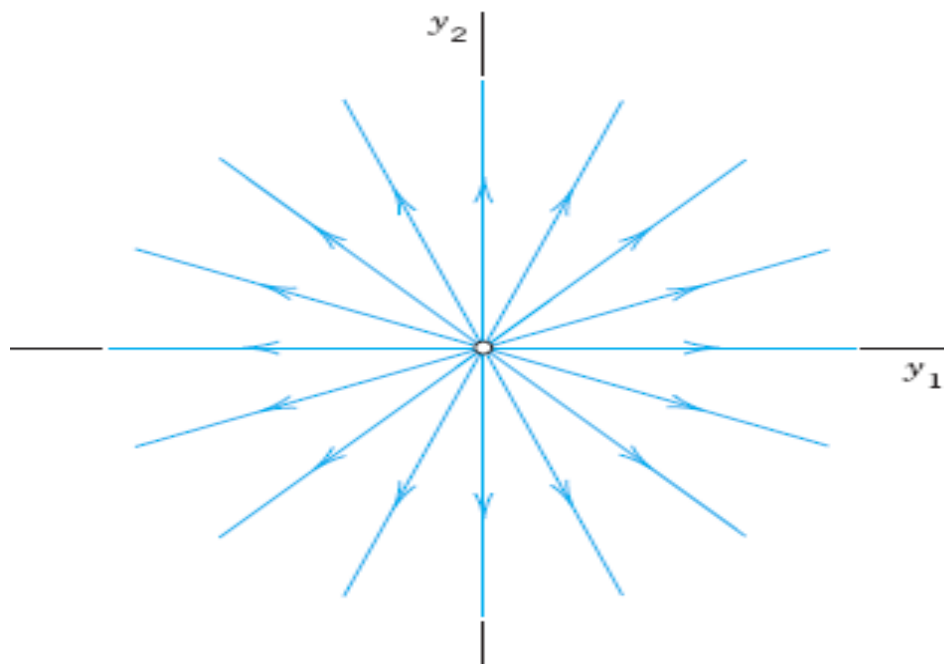
Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ στο $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, έχουμε **διπλή ιδιοτιμή** $\lambda_{1,2} = 1$ και κάθε $\vec{v} \neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα, έστω $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [0, 1]^T$ (γραμμικά ανεξάρτητα) και άρα **πλήρης**. Έχουμε για τη γενική λύση

$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 e^t + c_2 \vec{v}_2 e^t \Rightarrow y_1 = C y_2, C \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα Ι

Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ στο $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, έχουμε **διπλή ιδιοτιμή** $\lambda_{1,2} = 1$ και κάθε $\vec{v} \neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα, έστω $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [0, 1]^T$ (γραμμικά ανεξάρτητα) και άρα **πλήρης**. Έχουμε για τη γενική λύση

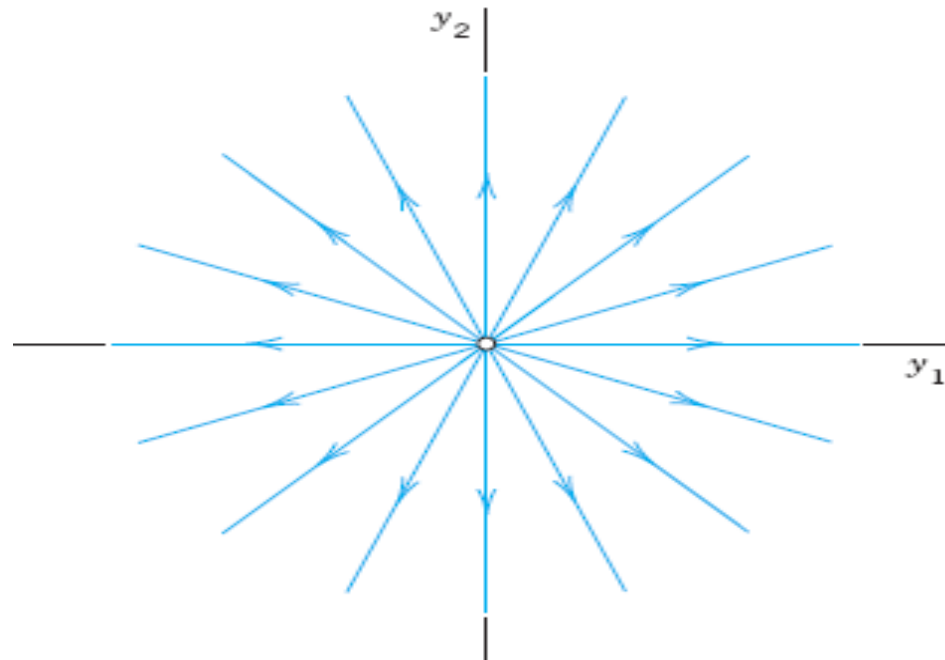
$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 e^t + c_2 \vec{v}_2 e^t \Rightarrow y_1 = C y_2, C \in \mathbb{R}$$



Παράδειγμα I

Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ στο $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, έχουμε **διπλή ιδιοτιμή** $\lambda_{1,2} = 1$ και κάθε $\vec{v} \neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα, έστω $\vec{v}_1 = [1, 0]^T$ και $\vec{v}_2 = [0, 1]^T$ (γραμμικά ανεξάρτητα) και άρα **πλήρης**. Έχουμε για τη γενική λύση

$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 e^t + c_2 \vec{v}_2 e^t \Rightarrow y_1 = C y_2, C \in \mathbb{R}$$



Η παράσταση φάσεων περιέχει **(ασταθή) κόμβο πηγής**

Ατελείς Ιδιοτιμές

Ορισμός : **Ατελής** λέγεται μια ιδιοτιμή που δεν είναι πλήρης, δηλ. αν η αλγεβρική της πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη από τη γεωμετρική της.

Ατελείς Ιδιοτιμές

Ορισμός : **Ατελής** λέγεται μια ιδιοτιμή που δεν είναι πλήρης, δηλ. αν η αλγεβρική της πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη από τη γεωμετρική της.

Παράδειγμα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

Υπολογίζω τα ιδιοδιανύσματα

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = 0$$

Ατελείς Ιδιοτιμές

Ορισμός : **Ατελής** λέγεται μια ιδιοτιμή που δεν είναι πλήρης, δηλ. αν η αλγεβρική της πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη από τη γεωμετρική της.

Παράδειγμα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

Υπολογίζω τα ιδιοδιανύσματα

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = 0$$

άρα v_1 ελεύθερη μεταβλητή και το κάθε ιδιοδιάνυσμα είναι της μορφής

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 \in \mathbb{R}$$

Έχουμε βρεί όμως μία λύση (αλλά όχι τη γενική του συστήματος)

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}$$

Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός Εάν μία ιδιοτιμή λ ενός πίνακα A , έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** m , τότε μπορούμε να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα λύνοντας $(A - \lambda I)^m \vec{v} = \vec{0}$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**.

Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός Εάν μία ιδιοτιμή λ ενός πίνακα $\mathbf{A}$, έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** m , τότε μπορούμε να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα λύνοντας $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^m \vec{v} = \vec{0}$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**.

Παράδειγμα (συνέχεια) Δοκιμάζω (μαντεύω!) ότι η Δ.Ε. έχει και λύση την

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}$$

Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός Εάν μία ιδιοτιμή λ ενός πίνακα $\mathbf{A}$, έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** m , τότε μπορούμε να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα λύνοντας $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^m \vec{v} = \vec{0}$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**.

Παράδειγμα (συνέχεια) Δοκιμάζω (μαντεύω!) ότι η Δ.Ε. έχει και λύση την

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} \\ \vec{x}'_2 &= \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}\end{aligned}$$

Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός Εάν μία ιδιοτιμή λ ενός πίνακα $\mathbf{A}$, έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** m , τότε μπορούμε να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα λύνοντας $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^m \vec{v} = \vec{0}$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**.

Παράδειγμα (συνέχεια) Δοκιμάζω (μαντεύω!) ότι η Δ.Ε. έχει και λύση την

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)e^{3t}$$

$$\vec{x}'_2 = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}$$

$$\text{'Όμως } \vec{x}'_2 = \mathbf{A}\vec{x}_2 \Rightarrow \mathbf{A}\vec{x}_2 = \mathbf{A}(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)e^{3t} = \mathbf{A}\vec{v}_2 e^{3t} + \mathbf{A}\vec{v}_1 t e^{3t}$$

$$\text{'Άρα } \mathbf{A}\vec{v}_2 = 3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \text{ και } \mathbf{A}\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1 \text{ δηλ.}$$

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{και} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

και αν αυτές οι δύο ικανοποιούνται τότε το $\vec{x}_2$ είναι λύση.

Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός Εάν μία ιδιοτιμή λ ενός πίνακα $\mathbf{A}$, έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** m , τότε μπορούμε να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα λύνοντας $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^m \vec{v} = \vec{0}$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**.

Παράδειγμα (συνέχεια) Δοκιμάζω (μαντεύω!) ότι η Δ.Ε. έχει και λύση την

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)e^{3t}$$

$$\vec{x}'_2 = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}$$

$$\text{'Όμως } \vec{x}'_2 = \mathbf{A}\vec{x}_2 \Rightarrow \mathbf{A}\vec{x}_2 = \mathbf{A}(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)e^{3t} = \mathbf{A}\vec{v}_2 e^{3t} + \mathbf{A}\vec{v}_1 t e^{3t}$$

$$\text{'Άρα } \mathbf{A}\vec{v}_2 = 3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \text{ και } \mathbf{A}\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1 \text{ δηλ.}$$

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{και} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

και αν αυτές οι δύο ικανοποιούνται τότε το $\vec{x}_2$ είναι λύση.

Αντικαθιστώντας τη 2η στη 1η έχουμε

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Παράδειγμα (συνέχεια) Πρέπει να λύσω 2 (εύκολα) γραμμικά συστήματα

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \text{και} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

όπου μάλιστα εδώ $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ άρα η πρώτη ισχύει $\forall \vec{v}_2 = [a, b]^T \in \mathbb{R}^2$

Παράδειγμα (συνέχεια) Πρέπει να λύσω 2 (εύκολα) γραμμικά συστήματα

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \text{και} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

όπου μάλιστα εδώ $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ άρα η πρώτη ισχύει $\forall \vec{v}_2 = [a, b]^T \in \mathbb{R}^2$

Άρα αρκεί να σιγουρευτούμε ότι $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$, γράφοντας

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ισχύει για } a = 0, b = 1 \text{ (ή όποια άλλη τιμή)}$$

Παράδειγμα (συνέχεια) Πρέπει να λύσω 2 (εύκολα) γραμμικά συστήματα

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \text{και} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

όπου μάλιστα εδώ $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ άρα η πρώτη ισχύει $\forall \vec{v}_2 = [a, b]^T \in \mathbb{R}^2$

Άρα αρκεί να σιγουρευτούμε ότι $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$, γράφοντας

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ισχύει για } a = 0, b = 1 \text{ (ή όποια άλλη τιμή)}$$

Άρα η γενική λύση του συστήματος μας είναι

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^{3t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος – λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

- Βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ .

Αλγόριθμος – λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

- Βρίσκουμε το ιδιανόσημο $\vec{v}_1$ του λ .
- Βρίσκουμε το διάνυσμα $\vec{v}_2$ τ.ω.

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

Αλγόριθμος – λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

- Βρίσκουμε το ιδιαδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ .
- Βρίσκουμε το διάνυσμα $\vec{v}_2$ τ.ω.

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

- Οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις θα είναι

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda t}$$

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{\lambda t}$$

Αλγόριθμος – λ πολλαπλότητας k ατέλειας m

- Βρίσκουμε τα γενικευμένα ιδιοδιάνυσματα $\vec{v}$ του λ .

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \vec{v} = \vec{0}, \quad \text{αλλά με} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}$$

Αλγόριθμος – λ πολλαπλότητας k ατέλειας m

- Βρίσκουμε τα γενικευμένα ιδιοδιάνυσματα $\vec{v}$ του λ .

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \vec{v} = \vec{0}, \quad \text{αλλά με} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}$$

- Για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ βρίσκουμε μια σειρά γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_k$ τ.ω.

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

$$\vdots$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_k = \vec{v}_{k-1}$$

Αλγόριθμος – λ πολλαπλότητας k ατέλειας m

- Βρίσκουμε τα γενικευμένα ιδιοδιάνυσματα $\vec{v}$ του λ .

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \vec{v} = \vec{0}, \quad \text{αλλά με} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}$$

- Για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ βρίσκουμε μια σειρά γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_k$ τ.ω.

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

$$\vdots$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_k = \vec{v}_{k-1}$$

- Κατασκευάζουμε τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda t}$$

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{\lambda t}$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_k = \left(\vec{v}_k + t \vec{v}_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \vec{v}_2 + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \vec{v}_1 \right) e^{\lambda t}$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί το σύστημα Δ.Ε. $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{y}$ και να κατασκευαστεί το επίπεδο φάσεων.

Παράδειγμα II

Να λυθεί το σύστημα Δ.Ε. $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{y}$ και να κατασκευαστεί το επίπεδο φάσεων.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί το σύστημα Δ.Ε. $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{y}$ και να κατασκευαστεί το επίπεδο φάσεων.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = [v_1, v_2]^T$ του $\lambda = 3$ (πολλαπλότητας 2).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 + v_2 = 0,$$

v_2 ελεύθερη μεταβλητή, άρα $v_2 = -1$ (ή όποια άλλη τιμή) και $v_1 = 1$

Παράδειγμα II

Να λυθεί το σύστημα Δ.Ε. $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{y}$ και να κατασκευαστεί το επίπεδο φάσεων.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = [v_1, v_2]^T$ του $\lambda = 3$ (πολλαπλότητας 2).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 + v_2 = 0,$$

v_2 ελεύθερη μεταβλητή, άρα $v_2 = -1$ (ή όποια άλλη τιμή) και $v_1 = 1$

Άρα $\vec{v}_1 = [1, -1]^T$ και θέλουμε τη λύση $\vec{y}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)e^{\lambda t}$, πρέπει

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

ισχύει για $b = 1$ (ή όποια άλλη τιμή) και $a = 0$

Παράδειγμα II (συνέχεια)

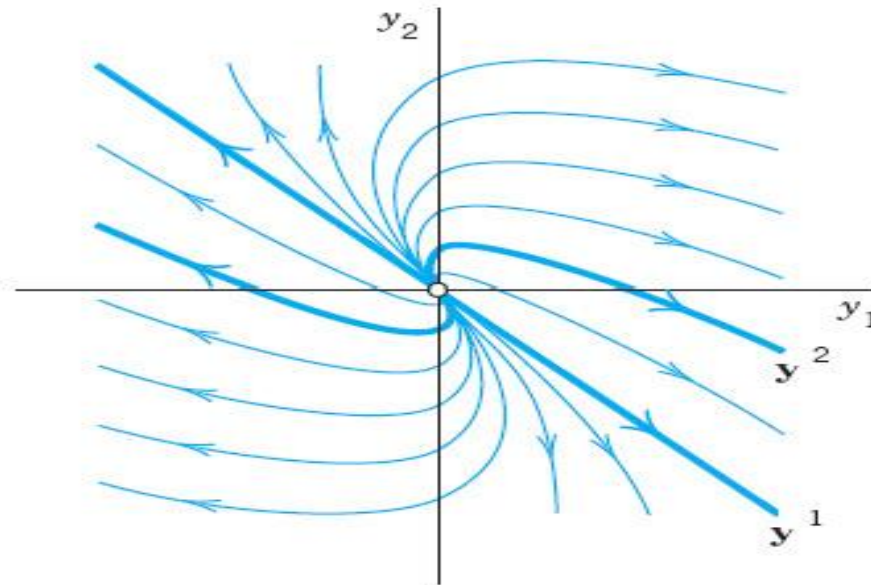
Άρα η γενική λύση είναι

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$

Παράδειγμα II (συνέχεια)

Άρα η γενική λύση είναι

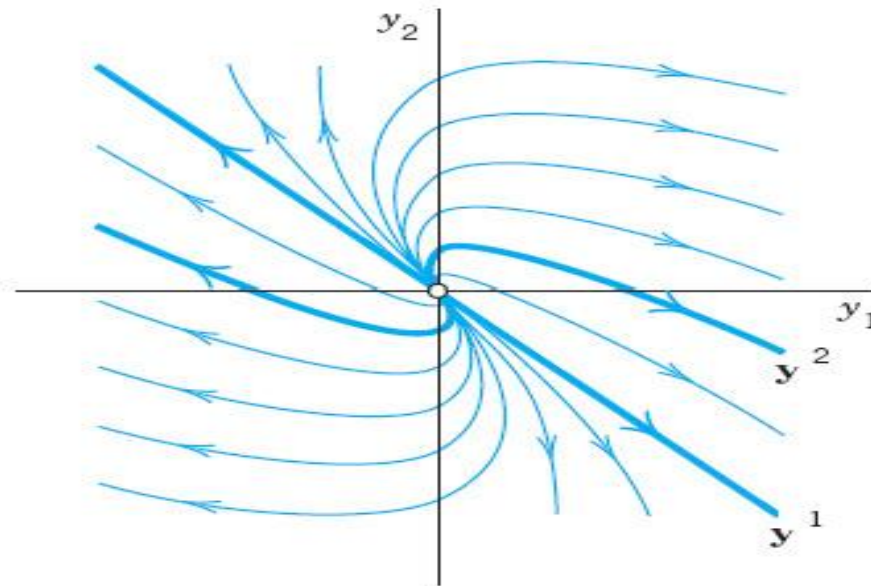
$$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$



Παράδειγμα II (συνέχεια)

Άρα η γενική λύση είναι

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$

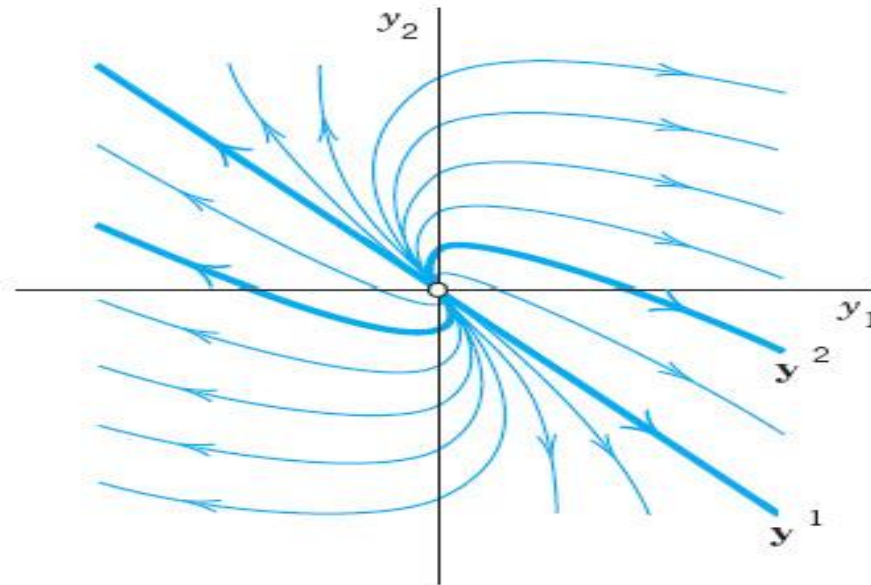


Η αρχή των αξόνων (κρίσιμο σημείο) λέγεται **(ασταθής) καταχρηστικός (ή νόθος) κόμβος**

Παράδειγμα II (συνέχεια)

Άρα η γενική λύση είναι

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$



Η αρχή των αξόνων (κρίσιμο σημείο) λέγεται **(ασταθής) καταχρηστικός (ή νόθος) κόμβος**

Παρατήρηση Άν οι ιδιοτιμή ήταν αρνητική οι τροχιές θα διέγραφαν αντίθετη φορά (πρός την αρχή των αξόνων) και θα είχαμε ευσταθή νόθο κόμβο.

Κρίσιμα σημεία-Ευστάθεια

- Για το κάθε σύστημα Σ.Δ.Ε. της μορφής $\vec{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \vec{y} = \mathbf{A}\vec{y}$ το σημείο όπου η κλήση y_1'/y_2' γίνεται απροσδιόριστη, $0/0$, λέγεται **κρίσιμο σημείο**.

Κρίσιμα σημεία-Ευστάθεια

- Για το κάθε σύστημα Σ.Δ.Ε. της μορφής $\vec{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \vec{y} = \mathbf{A}\vec{y}$ το σημείο όπου η κλήση y'_1/y'_2 γίνεται απροσδιόριστη, $0/0$, λέγεται **κρίσιμο σημείο**.
- $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det \mathbf{A} = \lambda^2 - p\lambda + q = 0$
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) \text{ και ισχύει } \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta} \text{ και}$$

Κρίσιμα σημεία-Ευστάθεια

- Για το κάθε σύστημα Σ.Δ.Ε. της μορφής $\vec{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \vec{y} = \mathbf{A}\vec{y}$ το σημείο όπου η κλήση y'_1/y'_2 γίνεται απροσδιόριστη, $0/0$, λέγεται **κρίσιμο σημείο**.
- $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det \mathbf{A} = \lambda^2 - p\lambda + q = 0$
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) \text{ και ισχύει } \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta} \text{ και}$$
$$\lambda^2 - p\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Κρίσιμα σημεία-Ευστάθεια

- Για το κάθε σύστημα Σ.Δ.Ε. της μορφής $\vec{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \vec{y} = \mathbf{A}\vec{y}$ το σημείο όπου η κλήση y'_1/y'_2 γίνεται απροσδιόριστη, $0/0$, λέγεται **κρίσιμο σημείο**.
- $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det \mathbf{A} = \lambda^2 - p\lambda + q = 0$
 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ και ισχύει $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ και
 $\lambda^2 - p\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$

Κριτήρια για είδος των κρίσιμων σημείων

Όνομα	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1\lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	Ιδιότητες
Κόμβος		$q > 0$	$\Delta \geq 0$	Πραγματικές Ομόσημες
Σαγματικό		$q < 0$	$\Delta > 0$	Πραγματικές Ετερόσημες
Κέντρο	$p = 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$	Φανταστικοί αριθμοί
Σπειροειδές	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	Μιγαδικές

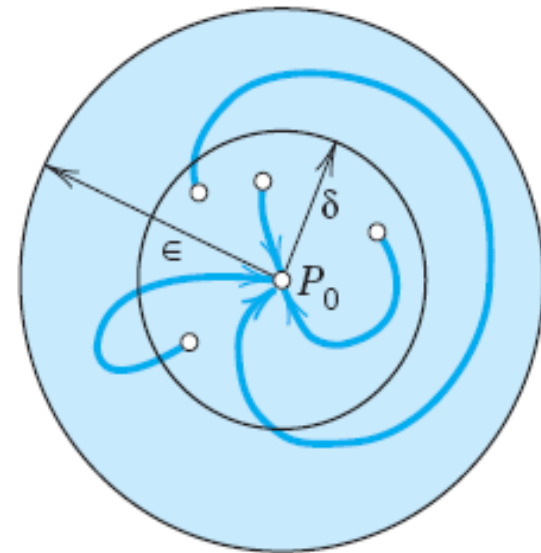
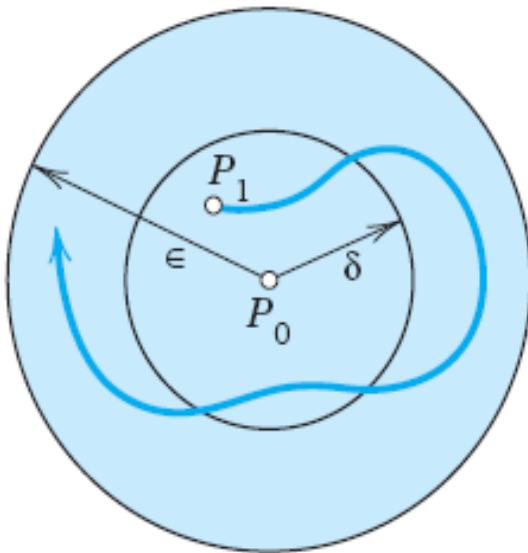
Ένα κρίσιμο σημείο P_0 λέγεται **ευσταθές** εάν όλες οι τροχιές κοντά (σε απόσταση $\delta > 0$) από το P_0 παραμένουν κοντά (σε απόσταση $\epsilon > 0$) στο P_0 στο χρόνο, αλλιώς λέγεται **ασταθές**.

Ένα κρίσιμο σημείο P_0 λέγεται **ευσταθές** εάν όλες οι τροχιές κοντά (σε απόσταση $\delta > 0$) από το P_0 παραμένουν κοντά (σε απόσταση $\epsilon > 0$) στο P_0 στο χρόνο, αλλιώς λέγεται **ασταθές**.

Ένα ευσταθές κρίσιμο σημείο P_0 το οποίο οι τροχιές των λύσεων τείνουν σ' αυτό λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές ή σημείο έλξης**

Ένα κρίσιμο σημείο P_0 λέγεται **ευσταθές** εάν όλες οι τροχιές κοντά (σε απόσταση $\delta > 0$) από το P_0 παραμένουν κοντά (σε απόσταση $\epsilon > 0$) στο P_0 στο χρόνο, αλλιώς λέγεται **ασταθές**.

Ένα ευσταθές κρίσιμο σημείο P_0 το οποίο οι τροχιές των λύσεων τείνουν σ' αυτό λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές ή σημείο έλξης**

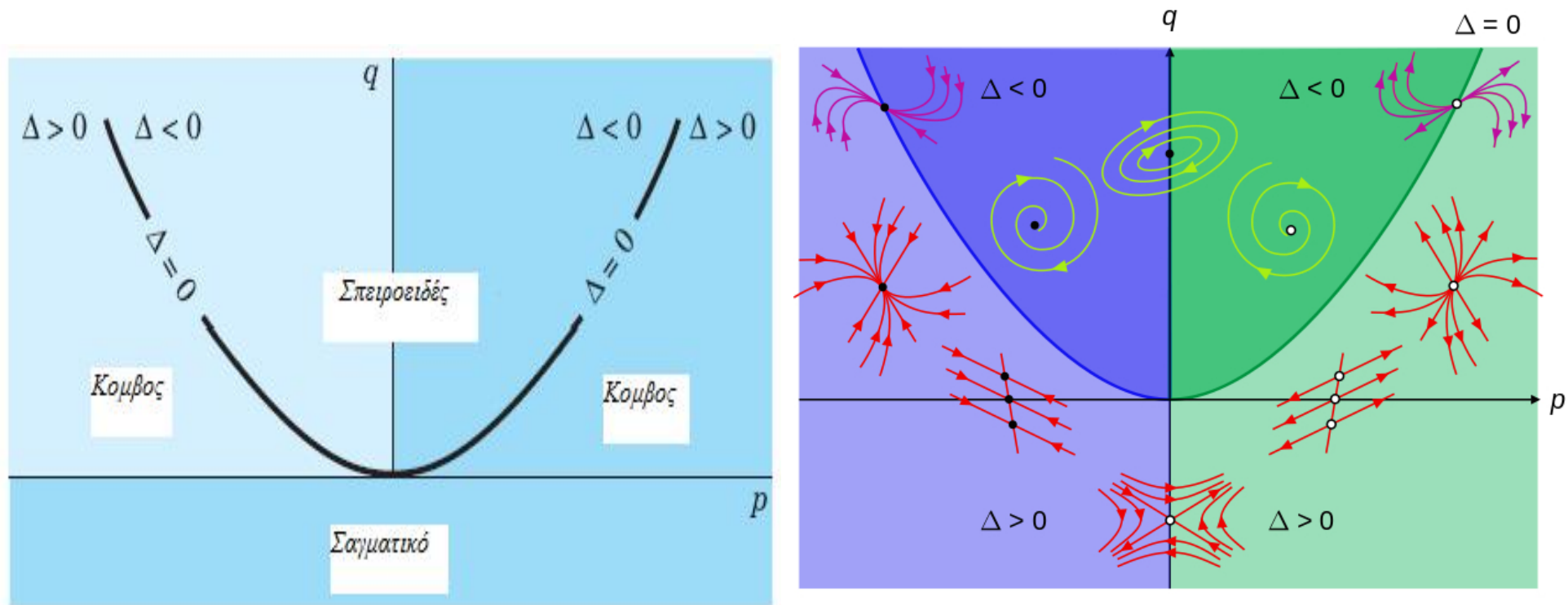


Κριτήρια ευστάθειας για κρίσιμα σημεία

Τύπος	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = p^2 - 4q$
(Ευσταθές) Σημείο έλξης	$p < 0$	$q > 0$	
Ευσταθές	$p \leq 0$	$q > 0$	
Ασταθές	ή $p > 0$	ή $q < 0$	

Κριτήρια ευστάθειας για κρίσιμα σημεία

Τύπος	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = p^2 - 4q$
(Ευσταθές) Σημείο έλξης	$p < 0$	$q > 0$	
Ευσταθές	$p \leq 0$	$q > 0$	
Ασταθές	ή $p > 0$	ή $q < 0$	



Τα σημεία ● ευσταθή και τα ○ ασταθή κρίσιμα σημεία

Παράδειγμα III

Τί είδους κρίσιμα σημεία υπάρχουν στην ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση (δες Διάλεξη 5);

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y \quad \Rightarrow \begin{matrix} u_1=y \\ u_2=y' \end{matrix}$$

Παράδειγμα III

Τί είδους κρίσιμα σημεία υπάρχουν στην ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση (δες Διάλεξη 5);

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y \quad \Rightarrow \begin{matrix} u_1=y \\ u_2=y' \end{matrix}$$

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \vec{u}$$

Παράδειγμα III

Τί είδους κρίσιμα σημεία υπάρχουν στην ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση (δες Διάλεξη 5);

$$my'' + cy' + ky = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y \Rightarrow \begin{matrix} u_1=y \\ u_2=y' \end{matrix}$$

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2 \Rightarrow \vec{u}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \vec{u}$$

$$\text{Έχουμε } \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow$$

Παράδειγμα III

Τί είδους κρίσιμα σημεία υπάρχουν στην ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση (δες Διάλεξη 5):

$$my'' + cy' + ky = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y \Rightarrow \begin{matrix} u_1=y \\ u_2=y' \end{matrix}$$

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2 \Rightarrow \vec{u}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \vec{u}$$

$$\text{Έχουμε } \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow$$

$p = -c/m$, $q = k/m$, $\Delta = (c/m)^2 - 4k/m$ και από τους πίνακες

- Χωρίς απόσβεση, $c = 0$, τότε $p = 0$, $q > 0$, κέντρο
- Ασθενώς φθίνουσα ταλάντωση $c^2 < 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta < 0$, σπριροειδές σημείο έλξης
- Κρίσιμα φθίνουσα ταλάντωση $c^2 = 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta = 0$ σημείο έλξης
- Ισχυρά φθίνουσα ταλάντωση $c^2 > 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta > 0$, σημείο έλξης

*mathlets.org/mathlets/linear-phase-portraits-matrix-entry/
mathlets.org/daimp/LinPhasePorMatrix.html*