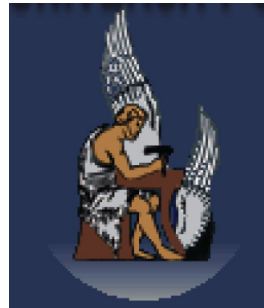


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 7η



Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2018

Γραμμικές Μή-Ομογενής Σ. Δ. Ε. 2ης Τάξης

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής .

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής .

Οποιοσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία λύση της ομογενούς

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής .

Οποιοσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία λύση της ομογενούς

Έστω y_p και $\tilde{y}_p$, δύο λύσεις της μη-ομογενούς (1)

$$L[y_p - \tilde{y}_p] = L[y_p] - L[\tilde{y}_p] = (2x + 1) - (2x + 1) = 0$$

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής .

Οποιοσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία λύση της ομογενούς

Έστω y_p και $\tilde{y}_p$, δύο λύσεις της μη-ομογενούς (1)

$$L[y_p - \tilde{y}_p] = L[y_p] - L[\tilde{y}_p] = (2x + 1) - (2x + 1) = 0$$

$$y = y_c + y_p$$

- y η γενική λύση της μη-ομογενούς (που ψάχνουμε)
- y_c η γενική λύση της ομογενούς (**συμπληρωματική λύση**)
- y_p **μια οποιαδήποτε λύση της μη-ομογενούς**

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Ι. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y_p = Ax + B$,

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y_p = Ax + B$,

$$y_p'' + 5y_p' + 6y_p = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y_p = Ax + B$,

$$y_p'' + 5y_p' + 6y_p = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \Rightarrow A = 1/3, B = -1/9$$

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y_p = Ax + B$,

$$y_p'' + 5y_p' + 6y_p = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \Rightarrow A = 1/3, B = -1/9$$

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x - 1}{9}$$

Η γενική λύση

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9}$$

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y_p = Ax + B$,

$$y_p'' + 5y_p' + 6y_p = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \Rightarrow A = 1/3, B = -1/9$$

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x - 1}{9}$$

Η γενική λύση

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9}$$

Προσοχή: Πρώτα υπολογίζουμε την $y = y_c + y_p$ και κατόπιν λύνουμε ως προς τις

σταθερές χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (όταν μας έχουν δωθεί).

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y_p = A \cos(2x) + B \sin(2x)$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y_p = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, B = 1/5$$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y_p = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, B = 1/5$$

Άρα

$$y_p = \frac{-\cos(2x) + 2\sin(x)}{10}$$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y_p = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, \quad B = 1/5$$

Άρα

$$y_p = \frac{-\cos(2x) + 2\sin(x)}{10}$$

- Γενικά αν

- $L[y] = e^{3x}$, μπορώ (ίσως) να επιλέξω $y_p = Ae^{3x}$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y_p = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, B = 1/5$$

Άρα

$$y_p = \frac{-\cos(2x) + 2\sin(x)}{10}$$

• Γενικά αν

- $L[y] = e^{3x}$, μπορώ (ίσως) να επιλέξω $y_p = Ae^{3x}$
- $L[y] = (1 + 2x^2)e^{-x} \cos(\pi x)$ επιλέγω
 $y_p = (A + Bx + Cx^2)e^{-x} \cos(\pi x) + (D + Ex + Fx^2)e^{-x} \sin(\pi x)$

. μπορεί όμως και να αποτύχουμε

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = Ae^{3x}$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y_p'' - 9y_p = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y_p'' - 9y_p = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}, \quad \text{σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων!}$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y_p'' - 9y_p = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}, \quad \text{σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων!}$$

Λύση: Επιλέγω τότε $y_p = Axe^{3x}$

$$y_p'' - 9y_p = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 4Ae^{3x}(= e^{3x}) \Rightarrow A = 1/4$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y_p'' - 9y_p = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}, \quad \text{σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων!}$$

Λύση: Επιλέγω τότε $y_p = Axe^{3x}$

$$y_p'' - 9y_p = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 4Ae^{3x}(= e^{3x}) \Rightarrow A = 1/4$$

$$y = y_c + y_p = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}xe^{3x}$$

. μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

..... μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = A x e^{3x}$$

..... μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = Axe^{3x}$$

Όμως ...

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{3x} \Rightarrow \text{η μαντεψιά θα αποτύχει!}$$

..... μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y_p = A x e^{3x}$$

Όμως ...

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{3x} \Rightarrow \text{η μαντεψιά θα αποτύχει!}$$

Λύση: Επιλέγω τότε $y_p = A x^2 e^{3x}$

Εν γένει, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με x την επιλογή μας όσες φορές χρειάζεται για να αποφύγουμε τη σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων, όχι όμως περισσότερες φορές!

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $L[\cdot]$

$$y_p = u + v \quad \Rightarrow \quad L[y] = L[u + v] = L[u] + L[v] = e^{2x} + \cos x$$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $L[\cdot]$

$$y_p = u + v \quad \Rightarrow \quad L[y] = L[u + v] = L[u] + L[v] = e^{2x} + \cos x$$

Παρατήρηση: Το να "μαντέψω κατάλληλα" μπορεί να είναι αποτελεσματικό αν το δεξί μέλος της εξίσωσης $L[y] = f(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων παραγώγων

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $L[\cdot]$

$$y_p = u + v \quad \Rightarrow \quad L[y] = L[u + v] = L[u] + L[v] = e^{2x} + \cos x$$

Παρατήρηση: Το να "μαντέψω κατάλληλα" μπορεί να είναι αποτελεσματικό αν το δεξή μέλος της εξίσωσης $L[y] = f(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων παραγώγων

Αντιπαράδειγμα:

$$y'' + y = \tan(x)$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί μια **ειδική λύση** y_p της $y'' - 4y = x + 3e^x$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί μια **ειδική λύση** y_p της $y'' - 4y = x + 3e^x$.

(Η λύση της ομογενούς (συμπληρωματική) $y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.)

Παράδειγμα

Να βρεθεί μια **ειδική λύση** y_p της $y'' - 4y = x + 3e^x$.

(Η λύση της ομογενούς (συμπληρωματική) $y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.)

Σύμφωνα με το προηγούμενο αρκεί να βρούμε μια λύση για κάθε μια από τις

$$y'' - 4y = x$$

και

$$y'' - 4y = 3e^x.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί μια **ειδική λύση** y_p της $y'' - 4y = x + 3e^x$.

(Η λύση της ομογενούς (συμπληρωματική) $y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.)

Σύμφωνα με το προηγούμενο αρκεί να βρούμε μια λύση για κάθε μια από τις

$$y'' - 4y = x$$

και

$$y'' - 4y = 3e^x.$$

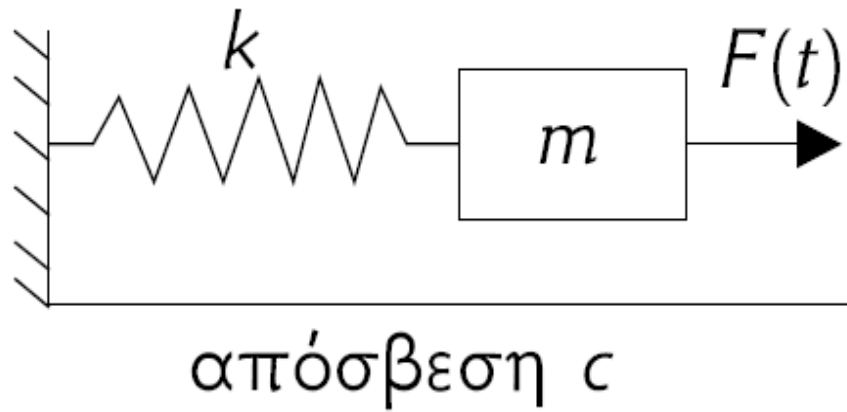
Για την πρώτη μια λύση είναι η $u = -x/4$, τη βρίσκουμε από την εξίσωση για $y'' - 4y = x$ μαντεύοντας ότι $u = Ax + B$, ενώ για τη δεύτερη είναι $v = -e^x$.

Επομένως μια ειδική λύση της $y'' - 4y = x + 3e^x$ είναι η

$$y_p = u + v = -x/4 - e^x$$

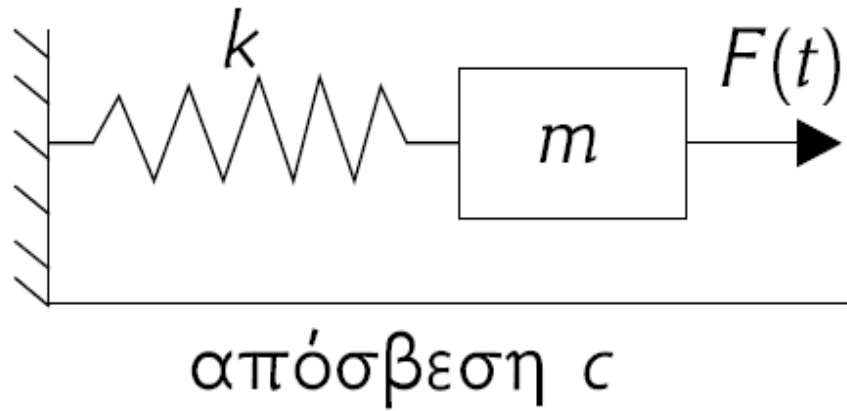
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΗ-ΟΜΟΓΕΝΩΝ Σ.Δ.Ε. 2ης Τάξης (με σταθερούς συντελεστές)

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις



Νόμος Χούκ, κανόνας απόσβεσης, 2ος νόμος Νεύτωνα

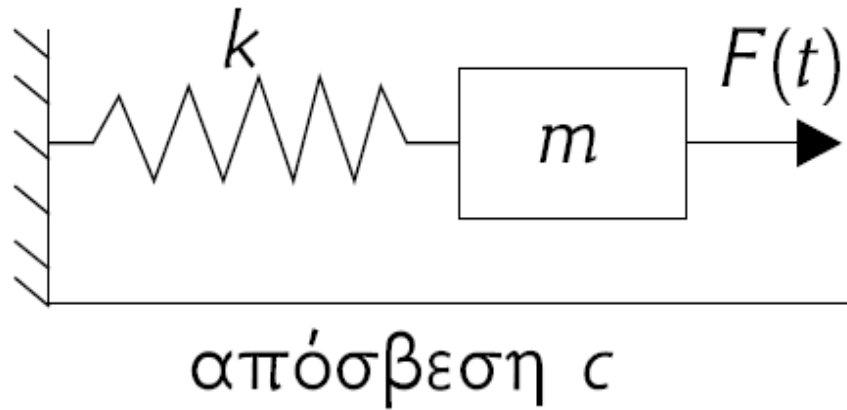
Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις



Νόμος Χούκ, κανόνας απόσβεσης, 2ος νόμος Νεύτωνα

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις



Νόμος Χούκ, κανόνας απόσβεσης, 2ος νόμος Νεύτωνα

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Ορισμοί:

- $F \neq 0 \Rightarrow$ **εξαναγκασμένη ταλάντωση** (F περιοδική)
- $c > 0 \Rightarrow$ κίνηση με απόσβεση
- $c = 0 \Rightarrow$ κίνηση χωρίς απόσβεση

Ι. Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση ($c = 0$) και συντονισμό

$$mx'' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

I. Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση ($c = 0$) και συντονισμό

$$mx'' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Συμπληρωματική λύση (**ομογενούς**) βλ. Διάλεξη 6:

$$x_c(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \text{ γωνιακή συχνότητα}$$

I. Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση ($c = 0$) και συντονισμό

$$mx'' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Συμπληρωματική λύση (**ομογενούς**) (βλ. Διάλεξη 6):

$$x_c(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \text{ γωνιακή συχνότητα}$$

Αν $\omega_0 \neq \omega$, **“μαντεύω”** ότι $x_p = A \cos(\omega t)$ και λύνοντας (**άσκηση**) με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t),$$

I. Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση ($c = 0$) και συντονισμό

$$mx'' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Συμπληρωματική λύση (**ομογενούς**) (βλ. Διάλεξη 6:

$$x_c(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \text{ γωνιακή συχνότητα}$$

Αν $\omega_0 \neq \omega$, **“μαντεύω”** ότι $x_p = A \cos(\omega t)$ και λύνοντας (**άσκηση**) με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t),$$

Η γενική λύση (υπέρθεση δύο συνημιτονοειδών)

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \\ &= C \cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10 \cos(\pi t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10 \cos(\pi t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Παράμετροι: $\omega = \pi$, $\omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4$, $F_0 = 10$, $m = 0.5$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10 \cos(\pi t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

$$\text{Παράμετροι: } \omega = \pi, \quad \omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4, \quad F_0 = 10, \quad m = 0.5$$

$$x(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + \frac{20}{16 - \pi^2} \cos(\pi t)$$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10 \cos(\pi t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

$$\text{Παράμετροι: } \omega = \pi, \quad \omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4, \quad F_0 = 10, \quad m = 0.5$$

$$x(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + \frac{20}{16 - \pi^2} \cos(\pi t)$$

$$\text{Από τις αρχικές συνθήκες} \Rightarrow C_2 = 0, C_1 = -20/(16 - \pi^2), \text{ άρα}$$

$$x(t) = \frac{20}{16 - \pi^2} (\cos(\pi t) - \cos(4t))$$

Παράδειγμα

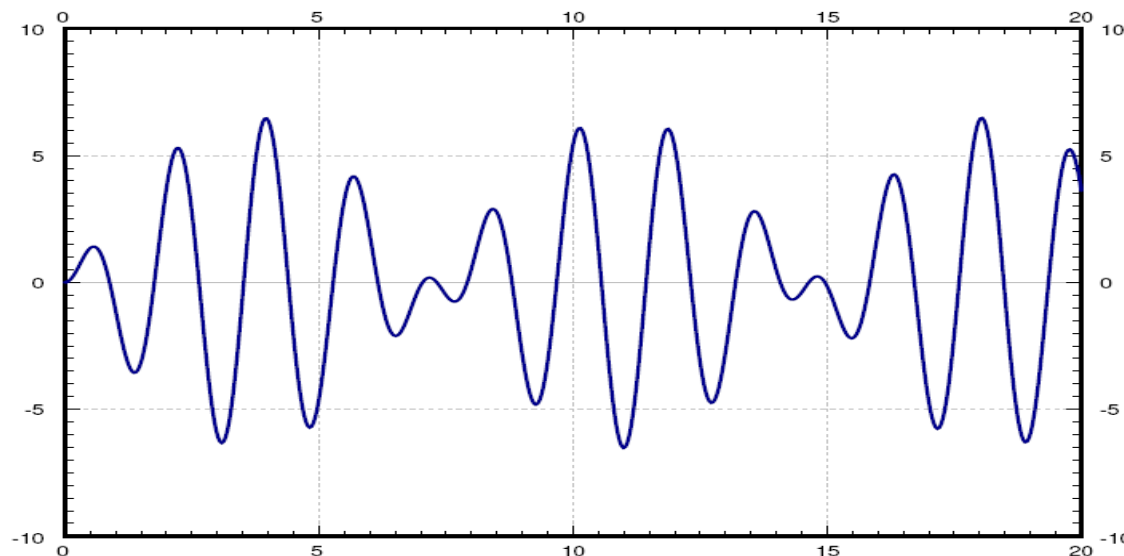
$$0.5x'' + 8x = 10 \cos(\pi t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

$$\text{Παράμετροι: } \omega = \pi, \quad \omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4, \quad F_0 = 10, \quad m = 0.5$$

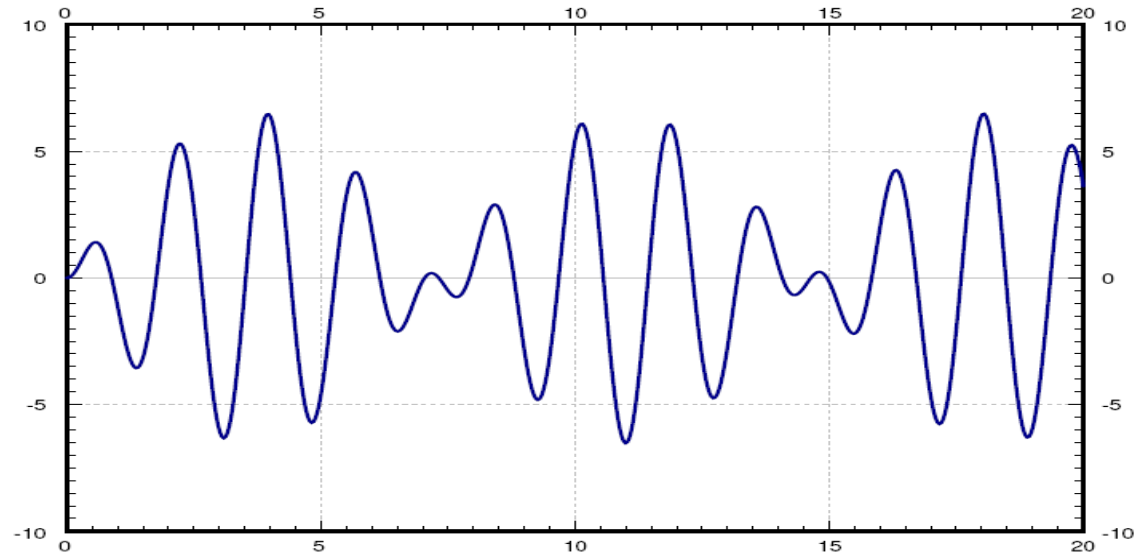
$$x(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + \frac{20}{16 - \pi^2} \cos(\pi t)$$

Από τις αρχικές συνθήκες $\Rightarrow C_2 = 0, C_1 = -20/(16 - \pi^2)$, άρα

$$x(t) = \frac{20}{16 - \pi^2} (\cos(\pi t) - \cos(4t))$$

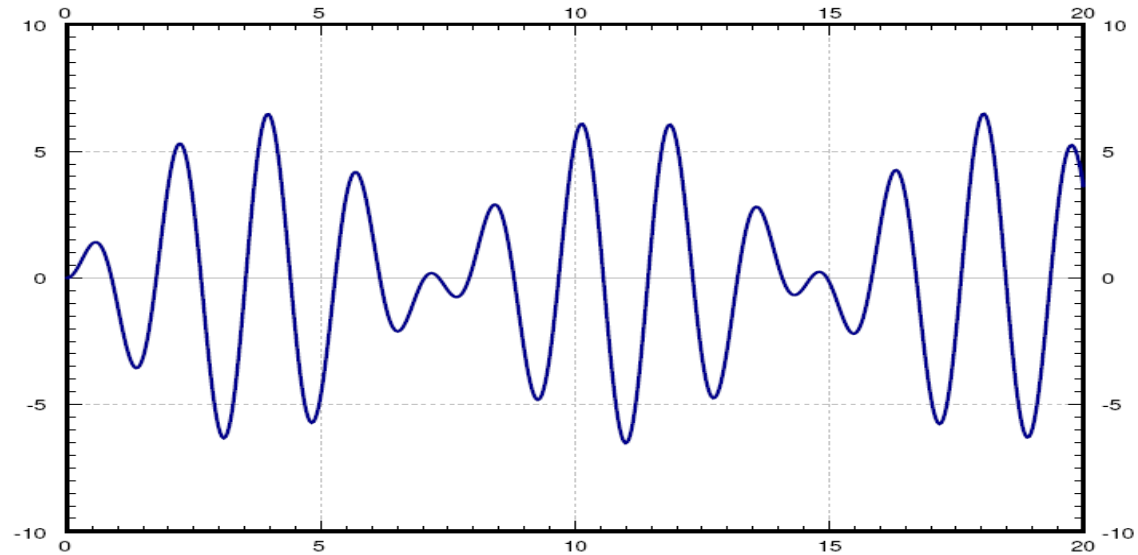


Παράδειγμα (συνέχεια)



$$2 \sin \left(\frac{A - B}{2} \right) \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) = \cos B - \cos A$$

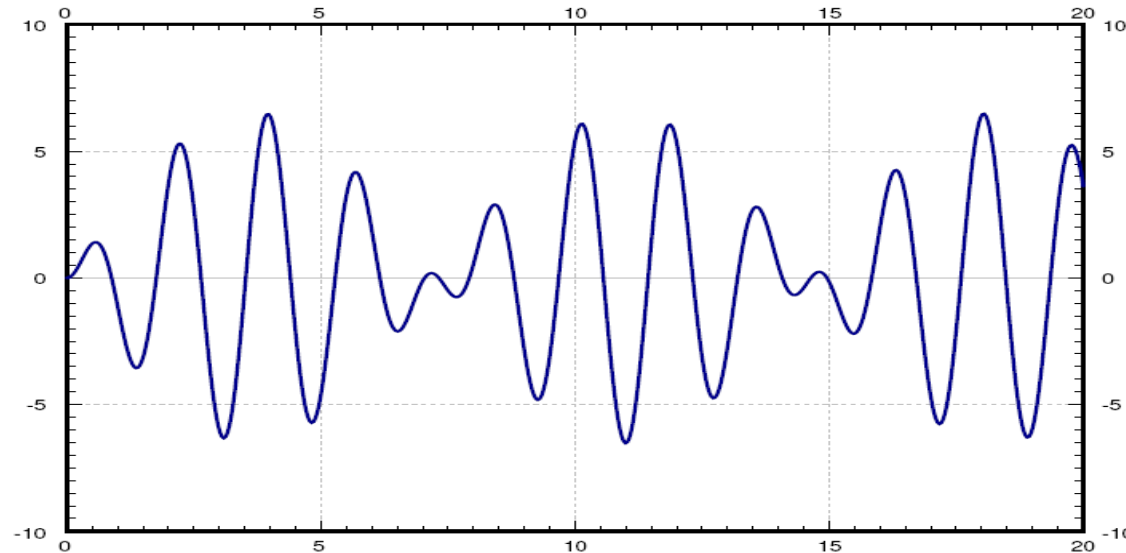
Παράδειγμα (συνέχεια)



$$2 \sin \left(\frac{A - B}{2} \right) \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) = \cos B - \cos A$$

$$x(t) = \frac{20}{16 - \pi^2} \left(2 \sin \left(\frac{4 - \pi}{2} t \right) \sin \left(\frac{4 + \pi}{2} t \right) \right)$$

Παράδειγμα (συνέχεια)



$$2 \sin \left(\frac{A - B}{2} \right) \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) = \cos B - \cos A$$

$$x(t) = \frac{20}{16 - \pi^2} \left(2 \sin \left(\frac{4 - \pi}{2} t \right) \sin \left(\frac{4 + \pi}{2} t \right) \right)$$

Η $x(t)$ είναι ένα υψηλής συχνότητας κύμα, το εύρος του οποίου διαμορφώνεται από ένα κύμα χαμηλής συχνότητας.

Συντονισμός ($\omega = \omega_0$)

Η μαντεψιά $x_p = A \cos(\omega t)$ είναι λύση της ομογενούς (δεν μας κάνει),
άρα δοκιμάζω

$$x_p(t) = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$$

Συντονισμός ($\omega = \omega_0$)

Η μαντεψιά $x_p = A \cos(\omega t)$ είναι λύση της ομογενούς (δεν μας κάνει),
άρα δοκιμάζω

$$x_p(t) = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$$

Η εξίσωση είναι

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \text{αντικαθιστώντας όπου } x \text{ την } x_p$$

$$2B\omega \cos(\omega t) - 2A\omega \sin(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad B = \frac{F_0}{2m\omega}$$

Συντονισμός ($\omega = \omega_0$)

Η μαντεψιά $x_p = A \cos(\omega t)$ είναι λύση της ομογενούς (δεν μας κάνει),
άρα δοκιμάζω

$$x_p(t) = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$$

Η εξίσωση είναι

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \text{αντικαθιστώντας όπου } x \text{ την } x_p$$

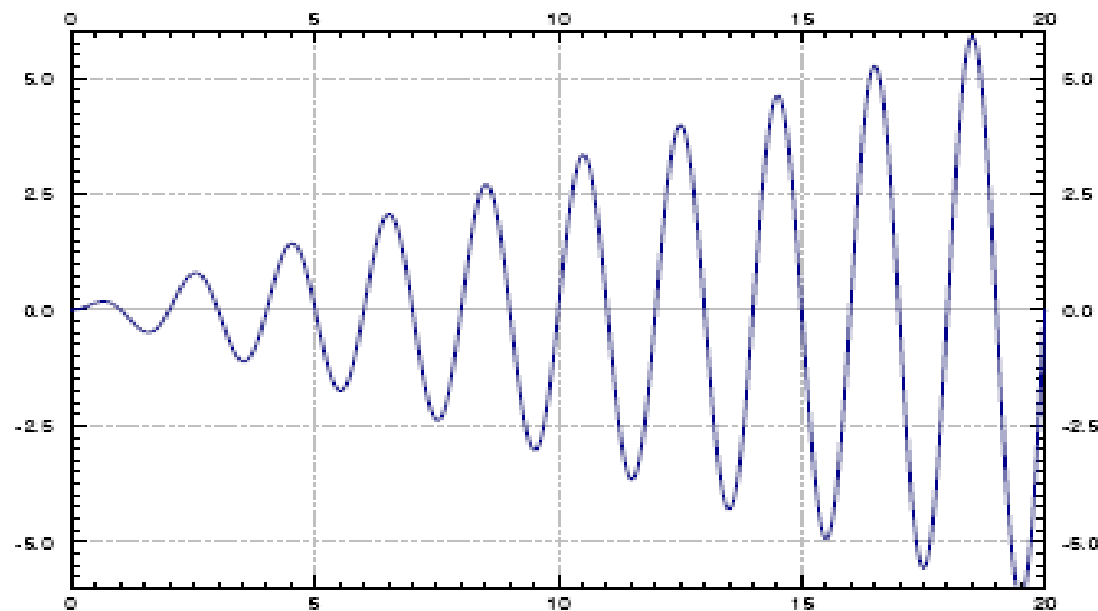
$$2B\omega \cos(\omega t) - 2A\omega \sin(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad B = \frac{F_0}{2m\omega}$$

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{F_0}{2m\omega} t \sin(\omega t), \quad \text{η γενική λύση}$$

- Ο όρος $\frac{F_0}{2m\omega} t$ αυξάνει καθώς $t \rightarrow \infty$.
- Οι δύο πρώτοι όροι ταλαντώνονται μεταξύ $\pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

Συντονισμός (συνέχεια)

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{F_0}{2m\omega} t \sin(\omega t)$$



Σχήμα 1: $C_1 = C_2 = 0, F_0 = 2, m = 1, \omega = \pi$

II. Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad p = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

II. Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad p = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Οι ρίζες του χαρακτ. πολυωνύμου του **ομογενούς** προβλήματος: $r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$

$$x_c = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & \text{αν } c^2 > 4km \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}, & \text{αν } c^2 = 4km \\ e^{-pt} (C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)), & \text{αν } c^2 < 4km \text{ με } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $x_c(t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$.

II. Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad p = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Οι ρίζες του χαρακτ. πολυωνύμου του **ομογενούς** προβλήματος: $r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$

$$x_c = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & \text{αν } c^2 > 4km \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}, & \text{αν } c^2 = 4km \\ e^{-pt} (C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)), & \text{αν } c^2 < 4km \text{ με } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $x_c(t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Για τη λύση της μη-ομογενούς, επιλέγω,

$$x_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

II. Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad p = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Οι ρίζες του χαρακτ. πολυωνύμου του **ομογενούς** προβλήματος: $r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$

$$x_c = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & \text{αν } c^2 > 4km \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}, & \text{αν } c^2 = 4km \\ e^{-pt} (C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)), & \text{αν } c^2 < 4km \text{ με } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $x_c(t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Για τη λύση της μη-ομογενούς, επιλέγω,

$$x_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$((\omega_0^2 - \omega)B - 2\omega pA) \sin(\omega t) + ((\omega_0^2 - \omega)A + 2\omega pB) \cos(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \Rightarrow$$

II. Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad p = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Οι ρίζες του χαρακτ. πολυωνύμου του **ομογενούς** προβλήματος: $r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$

$$x_c = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & \text{αν } c^2 > 4km \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}, & \text{αν } c^2 = 4km \\ e^{-pt} (C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)), & \text{αν } c^2 < 4km \text{ με } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $x_c(t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Για τη λύση της μη-ομογενούς, επιλέγω,

$$x_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$((\omega_0^2 - \omega)B - 2\omega pA) \sin(\omega t) + ((\omega_0^2 - \omega)A + 2\omega pB) \cos(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \Rightarrow$$

παίρνουμε

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega)F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$B = \frac{2\omega p F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

παίρνουμε

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega)F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$B = \frac{2\omega p F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Άρα η συγκεκριμένη ειδική λύση

$$x_p = \frac{(\omega_0^2 - \omega)F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos(\omega t) + \frac{2\omega p F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin(\omega t)$$

παίρνουμε

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega)F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$
$$B = \frac{2\omega p F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Άρα η συγκεκριμένη ειδική λύση

$$x_p = \frac{(\omega_0^2 - \omega)F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos(\omega t) + \frac{2\omega p F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin(\omega t)$$

Η γενική λύση

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Εναλλακτικός τρόπος: βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Εναλλακτικός τρόπος: βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

και τη μετακίνηση φάσης

$$\tan \gamma = \frac{B}{A} = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Εναλλακτικός τρόπος: βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

και τη μετακίνηση φάσης

$$\tan \gamma = \frac{B}{A} = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Τότε η συγκεκριμένη λύση

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

Εναλλακτικός τρόπος: βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

και τη μετακίνηση φάσης

$$\tan \gamma = \frac{B}{A} = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Τότε η συγκεκριμένη λύση

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

Παρατήρηση Όταν $\omega = \omega_0 \Rightarrow A = 0, B = C = \frac{F_0}{2m\omega p}$ και $\gamma = \pi/2$

Γενικευμένη λύση

$$x = x_c + x_p$$

Η x_c = μεταβατική λύση (x_{tr}) και x_p = ευσταθής περιοδική λύση (x_{sp})

Γενικευμένη λύση

$$x = x_c + x_p$$

Η x_c = μεταβατική λύση (x_{tr}) και x_p = ευσταθής περιοδική λύση (x_{sp})

Παρατηρήσεις

- Η λύση $x_c = x_{tr} \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$, δηλ. για μεγάλο t ο όρος x_{tr} είναι αμελητέος
- Η x_{sp} δεν εμπλέκει σταθερές, οι αρχ. συνθ. επηρεάζουν μόνο την x_{tr}

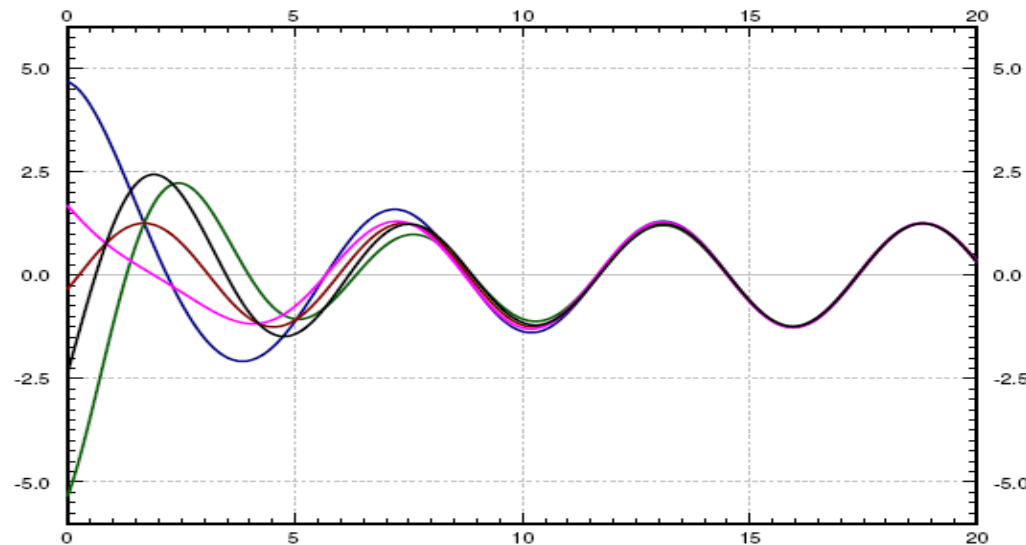
Γενικευμένη λύση

$$x = x_c + x_p$$

Η x_c = μεταβατική λύση (x_{tr}) και x_p = ευσταθής περιοδική λύση (x_{sp})

Παρατηρήσεις

- Η λύση $x_c = x_{tr} \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$, δηλ. για μεγάλο t ο όρος x_{tr} είναι αμελητέος
- Η x_{sp} δεν εμπλέκει σταθερές, οι αρχ. συνθ. επηρεάζουν μόνο την x_{tr}



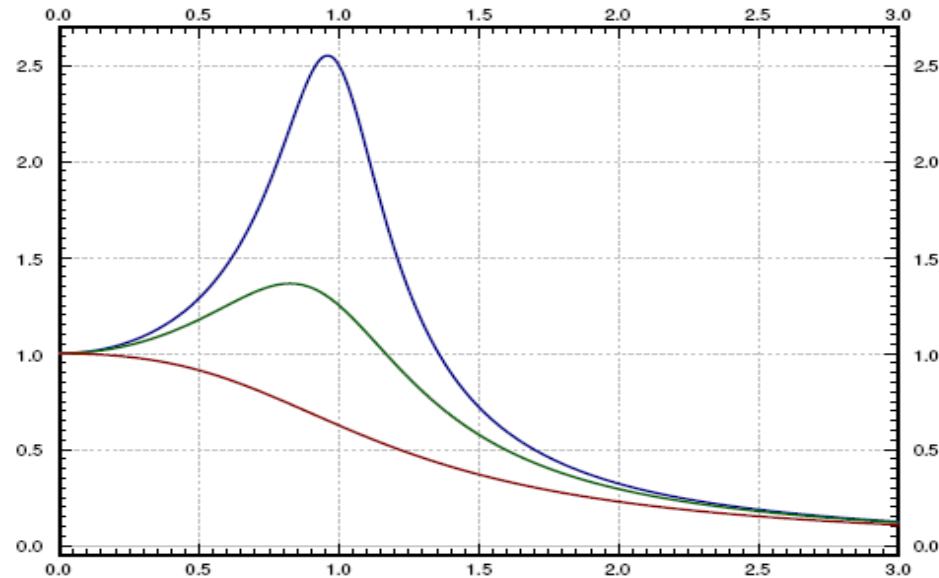
Σχήμα 2: Λύσεις για διαφορετικές αρχικ. συνθ. με $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$, $c = 0.7$, $\omega = 1.1$

(Φυσικός) Συντονισμός με απόσβεση

Τι σημαίνει συντονισμός με απόσβεση και ποιά είναι η μέγιστη τιμή του πλάτους C της ευσταθούς περιοδικής λύσης x_{sp} ;

(Φυσικός) Συντονισμός με απόσβεση

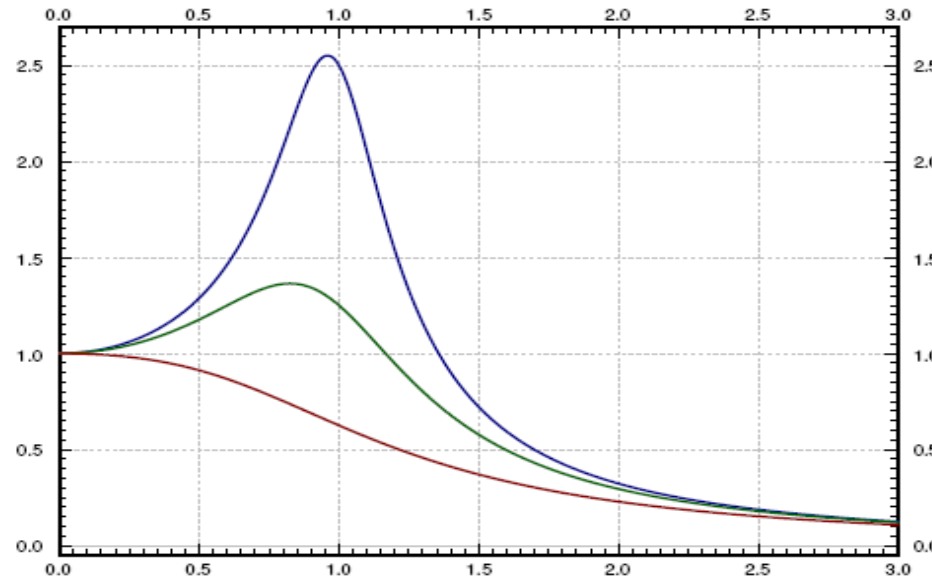
Τι σημαίνει συντονισμός με απόσβεση και ποιά είναι η μέγιστη τιμή του πλάτους C της ευσταθούς περιοδικής λύσης x_{sp} :



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση του $C(\omega)$ με $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$. Η πάνω καμπύλη είναι για $c = 0.4$, η μεσαία για $c = 0.8$, και η κάτω για $c = 1.6$

(Φυσικός) Συντονισμός με απόσβεση

Τι σημαίνει συντονισμός με απόσβεση και ποιά είναι η μέγιστη τιμή του πλάτους C της ευσταθούς περιοδικής λύσης x_{sp} :



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση του $C(\omega)$ με $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$. Η πάνω καμπύλη είναι για $c = 0.4$, η μεσαία για $c = 0.8$, και η κάτω για $c = 1.6$

Η τιμή του ω όπου το $C(\omega)$ γίνεται μέγιστο λέγεται **φυσική συχνότητα συντονισμού** και το μέγιστο αυτό πλάτος **φυσικό πλάτος συντονισμού**.

Υπολογισμός μέγιστου πλάτους

Η συγκεκριμένη λύση

$$x_p = x_{sp} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

Υπολογισμός μέγιστου πλάτους

Η συγκεκριμένη λύση

$$x_p = x_{sp} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

$$C'(\omega) = \frac{-4\omega(2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2)F_0}{m((2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)^{3/2}}$$

μηδενίζεται όταν $\omega = 0$ ή όταν $2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0$ δηλ. όταν

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} \quad \text{ή} \quad \omega = 0$$

Υπολογισμός μέγιστου πλάτους

Η συγκεκριμένη λύση

$$x_p = x_{sp} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

$$C'(\omega) = \frac{-4\omega(2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2)F_0}{m((2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)^{3/2}}$$

μηδενίζεται όταν $\omega = 0$ ή όταν $2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0$ δηλ. όταν

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} \quad \text{ή} \quad \omega = 0$$

- Αν $\omega = 0$ τότε δεν υπάρχει ουσιαστικά φυσικός συντονισμός
- Η ποσότητα $\omega_0^2 - 2p^2 > 0$ στη πρώτη περίπτωση
- Αν $c = 0$ ή $c \ll$ η συχνότητα συντονισμού $\omega \rightarrow \omega_0$

II. Μέθοδος (Διακύμανσης—Μεταβολής) των Παραμέτρων (Lagrange)

Γενική μεθοδολογία (εύρεσης μιας ειδικής λύσης) για Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad L[y] = f(x)$$

II. Μέθοδος (Διακύμανσης—Μεταβολής) των Παραμέτρων (Lagrange)

Γενική μεθοδολογία (εύρεσης μιας **ειδικής λύσης**) για Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad L[y] = f(x)$$

Γενική λύση: $y = \text{συμπληρωματική} + \text{ειδική} = y_c + y_p$

II. Μέθοδος (Διακύμανσης—Μεταβολής) των Παραμέτρων (Lagrange)

Γενική μεθοδολογία (εύρεσης μιας ειδικής λύσης) για Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad L[y] = f(x)$$

Γενική λύση: $y = \text{συμπληρωματική} + \text{ειδική} = y_c + y_p$

(1) Αρχικά θα βρούμε την λύση της ομογενούς $L[y] = 0$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_{1,2} \text{ σταθερές και } y_{1,2}(x) \text{ γραμ. ανεξάρτητες}$$

II. Μέθοδος (Διακύμανσης—Μεταβολής) των Παραμέτρων (Lagrange)

Γενική μεθοδολογία (εύρεσης μιας **ειδικής λύσης**) για Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad L[y] = f(x)$$

Γενική λύση: $y = \text{συμπληρωματική} + \text{ειδική} = y_c + y_p$

(1) Αρχικά θα βρούμε την λύση της ομογενούς $L[y] = 0$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_{1,2} \text{ σταθερές και } y_{1,2}(x) \text{ γραμ. ανεξάρτητες}$$

(2) Θεωρούμε ότι

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2, \quad u_{1,2} \text{ αυθαίρετες συναρτήσεις, και τότε}$$

II. Μέθοδος (Διακύμανσης—Μεταβολής) των Παραμέτρων (Lagrange)

Γενική μεθοδολογία (εύρεσης μιας **ειδικής λύσης**) για Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad L[y] = f(x)$$

Γενική λύση: $y = \text{συμπληρωματική} + \text{ειδική} = y_c + y_p$

(1) Αρχικά θα βρούμε την λύση της ομογενούς $L[y] = 0$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_{1,2} \text{ σταθερές και } y_{1,2}(x) \text{ γραμ. ανεξάρτητες}$$

(2) Θεωρούμε ότι

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2, \quad u_{1,2} \text{ αυθαίρετες συναρτήσεις, και τότε}$$

$$y'_p = (u'_1 y_1 + u'_2 y_2) + (u_1 y'_1 + u_2 y'_2),$$

II. Μέθοδος (Διακύμανσης—Μεταβολής) των Παραμέτρων (Lagrange)

Γενική μεθοδολογία (εύρεσης μιας **ειδικής λύσης**) για Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \Leftrightarrow L[y] = f(x)$$

Γενική λύση: $y = \text{συμπληρωματική} + \text{ειδική} = y_c + y_p$

(1) Αρχικά θα βρούμε την λύση της ομογενούς $L[y] = 0$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_{1,2} \text{ σταθερές και } y_{1,2}(x) \text{ γραμ. ανεξάρτητες}$$

(2) Θεωρούμε ότι

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2, \quad u_{1,2} \text{ αυθαίρετες συναρτήσεις, και τότε}$$

$$y'_p = (u'_1 y_1 + u'_2 y_2) + (u_1 y'_1 + u_2 y'_2),$$

και επιβάλλουμε να ισχύει ότι $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$ ($\star$), τότε

II. Μέθοδος (Διακύμανσης—Μεταβολής) των Παραμέτρων (Lagrange)

Γενική μεθοδολογία (εύρεσης μιας **ειδικής λύσης**) για Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \Leftrightarrow L[y] = f(x)$$

Γενική λύση: $y = \text{συμπληρωματική} + \text{ειδική} = y_c + y_p$

(1) Αρχικά θα βρούμε την λύση της ομογενούς $L[y] = 0$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_{1,2} \text{ σταθερές και } y_{1,2}(x) \text{ γραμ. ανεξάρτητες}$$

(2) Θεωρούμε ότι

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2, \quad u_{1,2} \text{ αυθαίρετες συναρτήσεις, και τότε}$$

$$y_p' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2'),$$

και επιβάλλουμε να ισχύει ότι $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$ ($\star$), τότε

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'$$

Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας τις y'_p και y''_p στη Δ.Ε. και εφόσον οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x), \quad (**)$$

Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας τις y'_p και y''_p στη Δ.Ε. και εφόσον οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x), \quad (**)$$

Άρα έχουμε ότι $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ είναι (ειδική) λύση της Δ.Ε. αν ισχύουν οι $(*)$ και $(**)$

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (1)$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x) \quad (2)$$

Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας τις y_p' και y_p'' στη Δ.Ε. και εφόσον οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x), \quad (**)$$

Άρα έχουμε ότι $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ είναι (ειδική) λύση της Δ.Ε. αν ισχύουν οι $(*)$ και $(**)$

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \quad (1)$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \quad (2)$$

Η ορίζουσα των (1) και (2) είναι αυτή του Wronski με $W(y_1, y_2) \neq 0$ (εφόσον οι y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς)

Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας τις y'_p και y''_p στη Δ.Ε. και εφόσον οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x), \quad (**)$$

Άρα έχουμε ότι $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ είναι (ειδική) λύση της Δ.Ε. αν ισχύουν οι $(*)$ και $(**)$

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (1)$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x) \quad (2)$$

Η ορίζουσα των (1) και (2) είναι αυτή του Wronski με $W(y_1, y_2) \neq 0$

(εφόσον οι y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς)

(3) Λύνουμε ως προς u'_1 και u'_2 συναρτήσει των $f(x), y_1, y_2$, και έστω

$$u'_1 = \phi_1(x) \quad \text{και} \quad u'_2 = \phi_2(x)$$

Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας τις y'_p και y''_p στη Δ.Ε. και εφόσον οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x), \quad (**)$$

Άρα έχουμε ότι $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ είναι (ειδική) λύση της Δ.Ε. αν ισχύουν οι $(*)$ και $(**)$

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (1)$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x) \quad (2)$$

Η ορίζουσα των (1) και (2) είναι αυτή του Wronski με $W(y_1, y_2) \neq 0$

(εφόσον οι y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς)

(3) Λύνουμε ως προς u'_1 και u'_2 συναρτήσει των $f(x), y_1, y_2$, και έστω

$$u'_1 = \phi_1(x) \quad \text{και} \quad u'_2 = \phi_2(x)$$

$$\Rightarrow u_1(x) = \int \phi_1(x) + \overbrace{D_1}^{=0} \quad \text{και} \quad u_2(x) = \int \phi_2(x) + \overbrace{D_2}^{=0}$$

Θεώρημα (Lagrange)

Αν για τη Δ.Ε.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (A)$$

οι συναρτήσεις p, q και f είναι συνεχείς σε ένα ανοικτό διάστημα I , και αν οι συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. που αντιστοιχεί στην (A) , τότε **μια μερική λύση** της Δ.Ε. (A) είναι η

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dx$$

και η **γενική λύση** της (A) είναι

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$$

Προσοχή: Για να ισχύει το Θεώρημα, πρέπει η Δ.Ε. να είναι γραμμένη στη μορφή (A) .

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + y = \tan(x)$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + y = \tan(x)$

Η **λύση της ομογενούς** (άσκηση) είναι η

$$y_c = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + y = \tan(x)$

Η **λύση της ομογενούς** (άσκηση) είναι η

$$y_c = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Για τη λύση της μη-ομογενούς θα εξετάσουμε για, μερική, λύση τη

$$y_p = u_1(x) \cos(x) + u_2(x) \sin(x).$$

Τότε σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο παίρνουμε το σύστημα (1) και (2)

$$\cos(x)u_1' + \sin(x)u_2' = 0$$

$$-\sin(x)u_1' + \cos(x)u_2' = \tan(x).$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + y = \tan(x)$

Η **λύση της ομογενούς** (άσκηση) είναι η

$$y_c = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Για τη λύση της μη-ομογενούς θα εξετάσουμε για, μερική, λύση τη

$$y_p = u_1(x) \cos(x) + u_2(x) \sin(x).$$

Τότε σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο παίρνουμε το σύστημα (1) και (2)

$$\cos(x)u_1' + \sin(x)u_2' = 0$$

$$-\sin(x)u_1' + \cos(x)u_2' = \tan(x).$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση (άσκηση)

$$u_1' = -\tan(x) \sin(x), \quad u_2' = \sin(x).$$

Έτσι έχουμε ότι

$$u_1(x) = \int u_1' dx = \int -\tan(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1} \right| + \sin(x) \quad (3)$$

$$u_2(x) = \int u_2' dx = \int \sin(x) dx = -\cos(x) \quad (4)$$

Επομένως η συγκεκριμένη **ειδική λύση** είναι

$$\begin{aligned} y_p &= u_1(x) \cos(x) + u_2(x) \sin(x) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1} \right| \cos(x) + \sin(x) \cos(x) - \cos(x) \sin(x) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1} \right| \cos(x) \end{aligned}$$

και η **γενική λύση**

$$y = y_c + y_p$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 2y' + y = \ln(x)$.

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 2y' + y = \ln(x)$.

Η ομογενής ΔΕ $y'' - 2y' + y = 0$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $k^2 - 2k + 1 = 0$ που έχει **διπλή ρίζα** το $k = 1$.

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 2y' + y = \ln(x)$.

Η ομογενής ΔΕ $y'' - 2y' + y = 0$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $k^2 - 2k + 1 = 0$ που έχει **διπλή ρίζα** το $k = 1$.

Έτσι η **λύση της ομογενούς** είναι η

$$y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 2y' + y = \ln(x)$.

Η ομογενής ΔΕ $y'' - 2y' + y = 0$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $k^2 - 2k + 1 = 0$ που έχει **διπλή ρίζα** το $k = 1$.

Έτσι η **λύση της ομογενούς** είναι η

$$y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Για τη λύση της μη-ομογενούς θα εξετάσουμε για λύση τη

$$y_p = u_1(x) e^x + u_2(x) x e^x.$$

Τότε σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο παίρνουμε το σύστημα (1) και (2)

$$e^x u_1' + x e^x u_2' = 0$$

$$e^x u_1' + (e^x + x e^x) u_2' = \ln(x).$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 2y' + y = \ln(x)$.

Η ομογενής ΔΕ $y'' - 2y' + y = 0$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $k^2 - 2k + 1 = 0$ που έχει **διπλή ρίζα** το $k = 1$.

Έτσι η **λύση της ομογενούς** είναι η

$$y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Για τη λύση της μη-ομογενούς θα εξετάσουμε για λύση τη

$$y_p = u_1(x) e^x + u_2(x) x e^x.$$

Τότε σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο παίρνουμε το σύστημα (1) και (2)

$$e^x u_1' + x e^x u_2' = 0$$

$$e^x u_1' + (e^x + x e^x) u_2' = \ln(x).$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση (άσκηση)

$$u_1' = -xe^{-x} \ln(x), \quad u_2' = e^{-x} \ln(x).$$

Έτσι έχουμε, ολοκληρώνοντας, ότι

$$u_2(x) = -e^{-x} \ln(x) + \int \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (5)$$

$$u_1(x) = xe^{-x} \ln(x) + e^{-x} + e^{-x} \ln(x) - \int \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (6)$$

Επομένως η **ειδική λύση** είναι

$$y_p = u_1(x)e^x + xu_2(x)e^x = 1 + \ln(x) + e^{-x}(x-1) \int \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

και η **γενική λύση**

$$y = y_c + y_p$$

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' - \frac{y'}{x} = x. \quad (7)$$

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' - \frac{y'}{x} = x. \quad (7)$$

Αρχικά θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς ΔΕ

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0. \quad (8)$$

Αυτή γράφεται ως

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = C_1 x, \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2, \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Έτσι έχουμε ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (8) είναι οι $y_1 = x^2$ και $y_2 = 1$. Για να βρούμε τη γενική λύση της ΔΕ (7) θα πρέπει να λύσουμε

το σύστημα

$$u_1' x^2 + u_2' = 0$$

$$u_1' 2x + u_2' 0 = x.$$

Από τις λύσεις του συστήματος και ολοκληρώνοντας

$$u_1 = \frac{x}{2}, \quad u_2 = -\frac{x^3}{6}.$$

το σύστημα

$$u_1' x^2 + u_2' = 0$$

$$u_1' 2x + u_2' 0 = x.$$

Από τις λύσεις του συστήματος και ολοκληρώνοντας

$$u_1 = \frac{x}{2}, \quad u_2 = -\frac{x^3}{6}.$$

Άρα μια **ειδική λύση** της ΔΕ είναι η

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Επομένως η **γενική λύση** της (7) είναι η

$$y = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + c_1 x^2 + c_2.$$

Παράδειγμα IV

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3, \quad x > 0$$

Παράδειγμα IV

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3, \quad x > 0$$

Παρατηρώ ότι **η ομογενής** Δ.Ε. που αντιστοιχεί είναι της **μορφής Euler**, συνεπώς για να υπολογίσω τη λύση της έχω τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = 1$$

Παράδειγμα IV

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3, \quad x > 0$$

Παρατηρώ ότι **η ομογενής** Δ.Ε. που αντιστοιχεί είναι της **μορφής Euler**, συνεπώς για να υπολογίσω τη λύση της έχω τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = 1$$

Συνεπώς (βλ. Διάλεξη 6) οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς είναι

$$y_1(x) = x \quad \text{και} \quad y_2(x) = x \ln(x) \Rightarrow$$

Παράδειγμα IV

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3, \quad x > 0$$

Παρατηρώ ότι **η ομογενής** Δ.Ε. που αντιστοιχεί είναι της **μορφής Euler**, συνεπώς για να υπολογίσω τη λύση της έχω τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = 1$$

Συνεπώς (βλ. Διάλεξη 6) οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς είναι

$$y_1(x) = x \quad \text{και} \quad y_2(x) = x \ln(x) \Rightarrow$$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + C_2 x \ln(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα IV

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3, \quad x > 0$$

Παρατηρώ ότι **η ομογενής** Δ.Ε. που αντιστοιχεί είναι της **μορφής Euler**, συνεπώς για να υπολογίσω τη λύση της έχω τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = 1$$

Συνεπώς (βλ. Διάλεξη 6) οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς είναι

$$y_1(x) = x \quad \text{και} \quad y_2(x) = x \ln(x) \Rightarrow$$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + C_2 x \ln(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Για τη ειδική λύση της μη-ομογενούς υποθέτουμε

$$y_p = u_1(x)x + u_2(x)x \ln(x)$$

Για να ισχύει το Θεώρημα Lagrange

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 8x$$

Για να ισχύει το Θεώρημα Lagrange

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 8x$$

Τότε σύμφωνα με την μέθοδο Lagrange παίρνουμε το σύστημα

$$xu'_1 + x \ln(x)u'_2 = 0$$

$$u'_1 + (\ln(x) + 1)u'_2 = 8x.$$

Για να ισχύει το Θεώρημα Lagrange

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 8x$$

Τότε σύμφωνα με την μέθοδο Lagrange παίρνουμε το σύστημα

$$xu'_1 + x \ln(x)u'_2 = 0$$

$$u'_1 + (\ln(x) + 1)u'_2 = 8x.$$

Η ορίζουσα του Wronski είναι $W(y_1, y_2) = x$, άρα

$$-y_1 \int \frac{y_2 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dx \quad \Rightarrow \quad -x \int \frac{x \ln(x) 8x}{x} = -2x^3 \ln(x) + 2x^3$$

$$y_2 \int \frac{y_1 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dx \quad \Rightarrow \quad x \ln(x) \int \frac{x 8x}{x} = 2x^3 \ln(x)$$

Για να ισχύει το Θεώρημα Lagrange

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 8x$$

Τότε σύμφωνα με την μέθοδο Lagrange παίρνουμε το σύστημα

$$xu'_1 + x \ln(x)u'_2 = 0$$

$$u'_1 + (\ln(x) + 1)u'_2 = 8x.$$

Η ορίζουσα του Wronski είναι $W(y_1, y_2) = x$, άρα

$$-y_1 \int \frac{y_2 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dx \quad \Rightarrow \quad -x \int \frac{x \ln(x) 8x}{x} = -2x^3 \ln(x) + 2x^3$$

$$y_2 \int \frac{y_1 \cdot f}{W(y_1, y_2)} dx \quad \Rightarrow \quad x \ln(x) \int \frac{x 8x}{x} = 2x^3 \ln(x)$$

Η γενική λύση

$$y = y_c + y_p = C_1 x + C_2 x \ln(x) + 2x^3$$

Ασκήσεις

- Αν γνωρίζουμε ότι η $y_1 = x$ είναι λύση της Δ.Ε. $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$, βρείτε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση y_2 (μέθοδος ελάτωσης της τάξης, $y_2 = uy_1$) (Απαντ. $y_2 = x \ln(|x|) + 1$)
- Για της εξισώσεις Euler της μορφής $a(x + 1)^2 y'' + b(x + 1)y' + cy = 0$ και $a(\alpha x + \beta)^2 y'' + b(\alpha x + \beta)y' + cy = 0$, δείξτε ότι μπορούμε να τις λύσουμε θέτοντας $y = (x + 1)^m$ και $y = (\alpha x + \beta)^m$ αντίστοιχα.
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + 4y' + 3y = x$ με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών (Απαν. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$)
- Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών (Απαν. $C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81})e^{3x}$.)
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - y' = x^2 - 1$ με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών (Απαν. $y = C_1 + C_2 e^x - (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)$.)
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - y = 3e^{2x} \cos(x)$ με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών (Απαν. $C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x}(\frac{3}{10} \cos(x) + \frac{3}{5} \sin(x))$.)
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + 4y = \cos(2x)$ με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών (Απαν. $C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x \sin(2x)$.)

- Αν $y_1 = x$ και $y_2 = x^3$ είναι λύσεις της αντιστοιχης ομογενούς της Δ.Ε.
 $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$, βρείτε με τη μέθοδο Lagrange μια ειδική λύση της και στη συνέχεια βρείτε την γενική λύση (Απαν. $y_p = 2e^x(x^2 - x)$)
- Να βρεθεί μια γενική λύση της Δ.Ε. $x^2y'' - 2y = x^2$, με χρήση της μεθόδου Lagrange (Απαν. $y = C_1x^2 + C_2\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2 \ln(|x|) - \frac{1}{9}x^2$)
- Να βρεθεί μια γενική λύση της Δ.Ε. $y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$, με χρήση της μεθόδου Lagrange (Απαν. $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \cos(x) \ln(\cos(x)) + x \sin(x)$).
- Να βρεθεί μια γενική λύση της Δ.Ε. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, x > 0$, με χρήση της μεθόδου Lagrange (Απαν. $y = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + x \ln(x)e^x$)

Εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης & ειδικές περιπτώσεις Δ.Ε 2ης τάξης

ΔΕ της μορφής $y^{(n)} = f(x)$

Η πιο απλή μορφή ΔΕ τάξης n όπου $f(x)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Για να βρούμε τη συνάρτηση y θα κάνουμε διαδοχικές ολοκληρώσεις. Ολοκληρώνοντας την $y^{(n)} = f(x)$ παίρνουμε την

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + C_1$$

όπου x_0 είναι ένα σταθερό σημείο και C_1 η σταθερά ολοκλήρωσης. Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά παίρνουμε την

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t f(s)ds + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο μετά από n -διαδοχικές ολοκληρώσεις

παίρνουμε

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx}_{n-\text{φορές}} + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

Εάν θέλουμε να βρούμε μια ειδική λύση με αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

οι παραπάνω εξισώσεις μας δείχνουν ότι αρκεί να πάρουμε $C_k = y_{n-k}$,
 $k = 0, \dots, n-1$.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' = \sin(kx)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.
Ολοκληρώνοντας την ΔΕ παίρνουμε

$$y'(x) = \int_0^x \sin(kt) dt + C_1 = \frac{-1}{k}(\cos(kx) - 1) + C_1.$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' = \sin(kx)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.
Ολοκληρώνοντας την ΔΕ παίρνουμε

$$y'(x) = \int_0^x \sin(kt) dt + C_1 = \frac{-1}{k}(\cos(kx) - 1) + C_1.$$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά παίρνουμε

$$y(x) = -\frac{1}{k^2} \sin(kx) + \frac{x}{k} + C_1x + C_2.$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' = \sin(kx)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.
Ολοκληρώνοντας την ΔΕ παίρνουμε

$$y'(x) = \int_0^x \sin(kt) dt + C_1 = \frac{-1}{k}(\cos(kx) - 1) + C_1.$$

Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά παίρνουμε

$$y(x) = -\frac{1}{k^2} \sin(kx) + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Για να βρούμε την ειδική λύση, από $y(0) = 0$ και τη $y(x)$ παίρνουμε

$$0 = y(0) = \frac{1}{k^2} \sin(0) + 0 + C_1 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Από την $y'(0) = 1$ παίρνουμε $1 = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + C_1 \Rightarrow C_1 = 1$. Επομένως η λύση μας είναι η $y = -\frac{\sin(kx)}{k^2} + x\left(\frac{1}{k} + 1\right)$.

Εξισώσεις της μορφής $f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$

Οι ΔΕ της μορφής $f(x, y') = 0$ δεν περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση y .

Εξισώσεις της μορφής $f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$

Οι ΔΕ της μορφής $f(x, y') = 0$ δεν περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση y .

Αντικατάσταση $u = y'$ παίρνουμε $u' = y''$ και κάνοντας αντικατάσταση στην ΔΕ παίρνουμε την

$$\frac{du}{dx} = f(x, u).$$

Λύνοντας αυτή τη ΔΕ βρίσκουμε το u ως συνάρτηση του x .

Από την $y' = u$ ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την y .

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$.

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$.

Θέτοντας $u = y'$ η ΔΕ γίνεται $x^2 \frac{du}{dx} + 2xu - 1 = 0$ (πρώτης τάξης).

Ας παρατηρήσουμε ότι $x \neq 0$, διαφορετικά θα είχαμε ότι $-1 = 0$.

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$.

Θέτοντας $u = y'$ η ΔΕ γίνεται $x^2 \frac{du}{dx} + 2xu - 1 = 0$ (πρώτης τάξης).

Ας παρατηρήσουμε ότι $x \neq 0$, διαφορετικά θα είχαμε ότι $-1 = 0$.

Διαιρώντας με x^2 παίρνουμε τη ΔΕ

$$u' + \frac{2}{x}u - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$.

Θέτοντας $u = y'$ η ΔΕ γίνεται $x^2 \frac{du}{dx} + 2xu - 1 = 0$ (πρώτης τάξης).

Ας παρατηρήσουμε ότι $x \neq 0$, διαφορετικά θα είχαμε ότι $-1 = 0$.

Διαιρώντας με x^2 παίρνουμε τη ΔΕ

$$u' + \frac{2}{x}u - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Ο **ολοκληρωτικός παράγοντας** αυτής της ΔΕ είναι $r(x) = x^2$ και έτσι παίρνουμε την εξίσωση

$$x^2 u' + 2xu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad [x^2 u]' = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 u = x + C.$$

Έτσι έχουμε ότι $u = \frac{1}{x} + \frac{C}{x}$ και χρησιμοποιώντας ότι $u = y'$ παίρνουμε

$$y = \ln(|x|)(C + 1) + C_1.$$

Παράδειγμα II

Η ΔΕ $y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}$ μας δίνει το ύψος ενός καλωδίου που έχει κρεμαστεί σε δύο στύλους.

Παράδειγμα II

Η ΔΕ $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}$ μας δίνει το ύψος ενός καλωδίου που έχει κρεμαστεί σε δύο στύλους.

Αντικατάσταση $y' = u$ και τότε η Δ.Ε. γίνεται

$$u' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + u^2}$$

Παράδειγμα II

Η ΔΕ $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}$ μας δίνει το ύψος ενός καλωδίου που έχει κρεμαστεί σε δύο στύλους.

Αντικατάσταση $y' = u$ και τότε η Δ.Ε. γίνεται

$$u' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + u^2}$$

και διαχωρίζοντας τις μεταβλητές

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{a}dx.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \sinh^{-1}(u) = \frac{x}{a} + C \Rightarrow u = \sinh\left(\frac{x}{a} + C\right).$$

Επειδή $u = \frac{dy}{dx}$ έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a} + c\right) \Rightarrow y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C\right) + C_1.$$

$$\text{\textbf{Δ.Ε. της μορφής}} \quad f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Η Δ.Ε. $y'' = f(y, y')$ δηλαδή εξίσωση 2ης τάξης που **δεν περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x** και ανάγεται σε ΔΕ πρώτης τάξης είναι,

Δ.Ε. της μορφής $f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Η Δ.Ε. $y'' = f(y, y')$ δηλαδή εξίσωση 2ης τάξης που **δεν περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x** και ανάγεται σε ΔΕ πρώτης τάξης είναι,

Κάνουμε πάλι την αντικατάσταση $y' = u$ αλλά τώρα **θα θεωρήσουμε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή** και το u ως την άγνωστη συνάρτηση.

Δ.Ε. της μορφής $f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Η Δ.Ε. $y'' = f(y, y')$ δηλαδή εξίσωση 2ης τάξης που **δεν περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x** και ανάγεται σε ΔΕ πρώτης τάξης είναι,

Κάνουμε πάλι την αντικατάσταση $y' = u$ αλλά τώρα **θα θεωρήσουμε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή** και το u ως την άγνωστη συνάρτηση.

Τότε από κανόνα αλυσίδας έχουμε ότι

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}.$$

Αντικαθιστώντας στην ΔΕ παίρνουμε την

$$u \frac{du}{dy} = f(y, u).$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε το u ως συνάρτηση του y και μιας σταθεράς C

$$u = u(y, C).$$

Αντικαθιστώντας στην $\frac{dy}{dx} = u$ παίρνουμε μια ΔΕ πρώτης τάξης,

$$\frac{dy}{dx} = u(y, C).$$

Διαχωρίζοντας μεταβλητές παίρνουμε την

$$\frac{dy}{u(y, C)} = dx.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε γενική λύση της ΔΕ.

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + (y')^2 = 0$. Με την αντικατάσταση $y' = u$, θεωρώντας το y ανεξάρτητη μεταβλητή, παίρνουμε ότι $uu' = y''$.

Έτσι η ΔΕ μετατρέπεται στην

$$yu u' + u^2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι χωριζόμενων μεταβλητών και γράφεται ως

$$yu u' = -u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u} = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{C}{y}.$$

Επομένως

$$y' = \frac{C}{y} \quad \Rightarrow \quad yy' = C \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2Cx + C_1.$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $3y'' = y^{-5/3}$.

Η ΔΕ είναι της μορφής $y'' = f(y', y)$. Αν κάνουμε την αντικατάσταση $\frac{dy}{dx} = u$ η ΔΕ μετατρέπεται στην

$$3u \frac{du}{dy} = y^{-5/3} \quad \Leftrightarrow \quad 3uu' = y^{-5/3}.$$

Ολοκληρώνοντας (ως προς y) παίρνουμε

$$u^2 = C - y^{-2/3} \quad \Rightarrow \quad u = \pm \sqrt{C - y^{-2/3}}.$$

Επειδή $\frac{dy}{dx} = u$ με αντικατάσταση από τη παραπάνω εξίσωση παίρνουμε την

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C - y^{-2/3}}} = dx = \pm \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{Cy^{2/3} - 1}} = dx$$

και άρα

$$x = \pm \int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{Cy^{2/3} - 1}} + C_1.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό το υπολογίζουμε με την αντικατάσταση $Cy^{2/3} - 1 = t^2$ και άρα

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{1/2} C^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad dy = 3t(t^2 + 1)^{1/2} C^{-1/2} dt.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση βρίσκουμε

$$x = \pm \frac{1}{C^2} \sqrt{Cy^{2/3} - 1} (Cy^{2/3} + 2) + C_1.$$

και άρα

$$x = \pm \int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{Cy^{2/3} - 1}} + C_1.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό το υπολογίζουμε με την αντικατάσταση $Cy^{2/3} - 1 = t^2$ και άρα

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{1/2} C^{-1/2} \Rightarrow dy = 3t(t^2 + 1)^{1/2} C^{-1/2} dt.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση βρίσκουμε

$$x = \pm \frac{1}{C^2} \sqrt{Cy^{2/3} - 1} (Cy^{2/3} + 2) + C_1.$$

• Γενικότερα αν έχουμε τη ΔΕ $f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ τότε με την αντικατάσταση $u = y'$ παίρνουμε μια ΔΕ τάξης μικρότερη κατά ένα από την αρχική, με ανεξάρτητη μεταβλητή την y και άγνωστη την u . Λύνοντας αυτή τη ΔΕ βρίσκουμε τη συνάρτηση $u = y'$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη y .