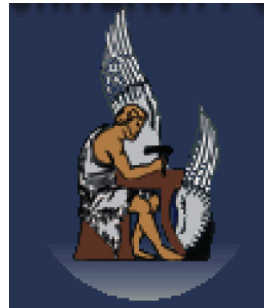


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 6η



Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2018

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Υψηλότερης Τάξης (συνέχεια)

Γενίκευση-Μεθοδολογία

Έστω η Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Μαντεύοντας ότι $y = e^{rx} \Rightarrow$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$$

η χαρακτηριστική (ή βοηθητική) εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0$$

Γενίκευση-Μεθοδολογία

Έστω η Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Μαντεύοντας ότι $y = e^{rx} \Rightarrow$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$$

η χαρακτηριστική (ή βοηθητική) εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0$$

Θεώρημα Έστω r_1 και r_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

(i) Αν $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(ii) Αν $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

Γενίκευση-Μεθοδολογία

Έστω η Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Μαντεύοντας ότι $y = e^{rx} \Rightarrow$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$$

η χαρακτηριστική (ή βοηθητική) εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0$$

Θεώρημα Έστω r_1 και r_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

(i) Αν $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(ii) Αν $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

Τι συμβαίνει αν έχω μιγαδικές ρίζες;;

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \quad \text{Taylor στο } x = 0$$

Τύπος του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{και} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \quad \text{Taylor στο } x = 0$$

Τύπος του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{και} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Ταυτότητες

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \quad \text{Taylor στο } x = 0$$

Τύπος του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{και} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Ταυτότητες

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i(2\theta)} = (e^{i\theta})^2 \Rightarrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{και} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Θέτοντας $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ και $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ έχουμε (από Euler)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Θέτοντας $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ και $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ έχουμε (από Euler)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Κάθε γραμ. συνδυασμός λύσεων είναι και αυτός λύση

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Θέτοντας $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ και $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ έχουμε (από Euler)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Κάθε γραμ. συνδυασμός λύσεων είναι και αυτός λύση

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Θεώρημα

Θεώρημα Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

είναι οι $\alpha \pm \beta i$ τότε η γενική της λύση είναι:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Παράδειγμα Ι

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 2r + 5 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις

$$r_1 = -1 + 2i, \quad r_2 = -1 - 2i.$$

Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x).$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 2r + 5 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις

$$r_1 = -1 + 2i, \quad r_2 = -1 - 2i.$$

Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x).$$

Για την ειδική λύση θα χρησιμοποιήσουμε $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

Από $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Από

$y'(x) = 2C_2 e^{-x} \cos(2x) - C_2 e^{-x} \sin(2x)$ και τη συνθήκη $y'(0) = 1$ παίρνουμε

$$1 = 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

Επομένως η λύση είναι $y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x)$.

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 3$.

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 3$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 9 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 3i$ και $r_2 = -3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 3$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 9 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 3i$ και $r_2 = -3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Για να βρούμε την **ειδική λύση**

από την $y(0) = 0$ παίρνουμε $0 = C_1$

από την $y'(0) = 3$ παίρνουμε $3 = 3C_2$.

Επομένως η ειδική λύση είναι η

$$y = \sin(3x).$$

Παράδειγμα III

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $16r^2 - 8r + 145$, η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 1/4 \pm 3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 e^{t/4} \cos(3t) + C_2 e^{t/4} \sin(3t).$$

Παράδειγμα III

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $16r^2 - 8r + 145$, η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 1/4 \pm 3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 e^{t/4} \cos(3t) + C_2 e^{t/4} \sin(3t).$$

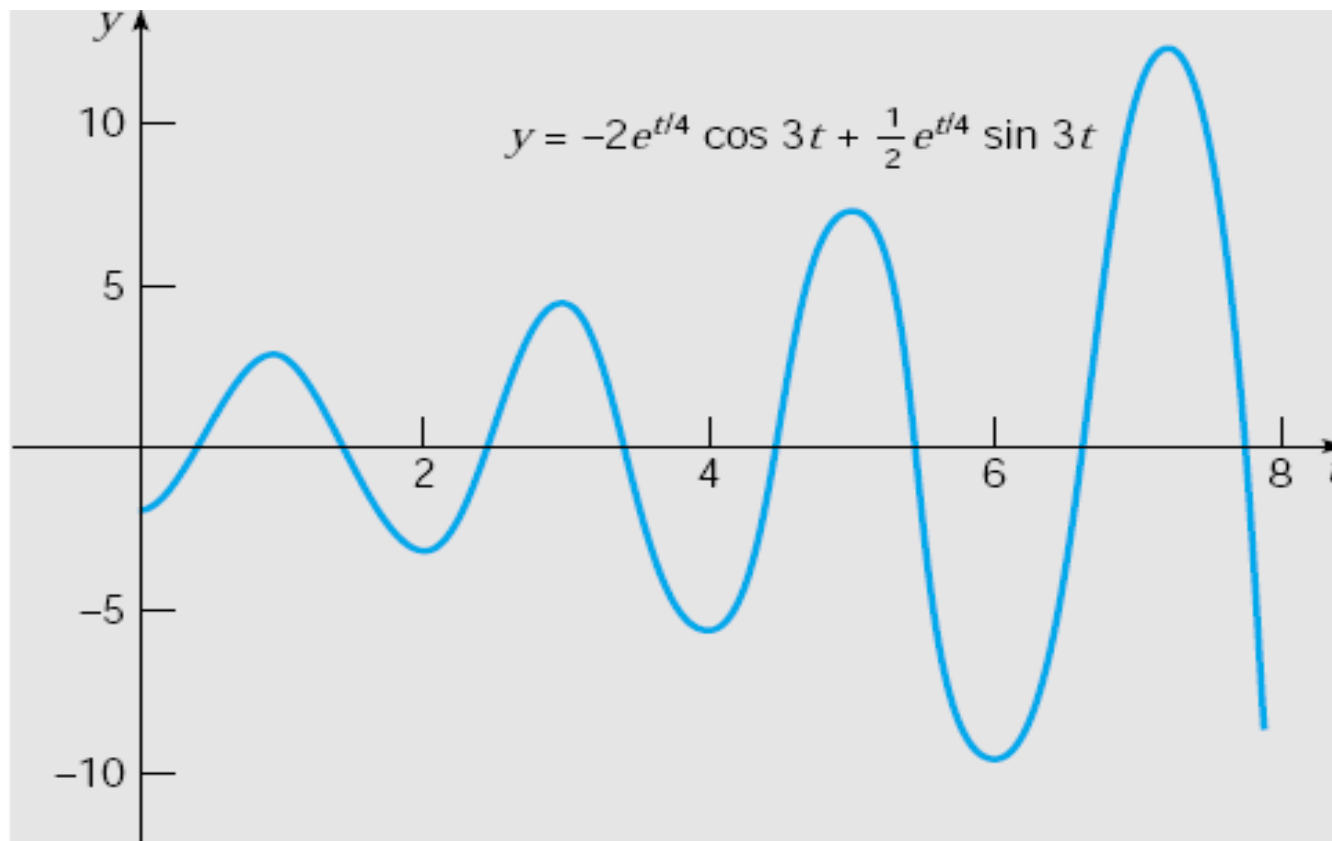
Για να βρούμε την **ειδική λύση**

από την $y(0) = -2$ παίρνουμε $C_1 = -2$

από την $y'(0) = 1$ παίρνουμε $C_2 = 1/2$.

Επομένως η ειδική λύση είναι η

$$y = -2e^{t/4} \cos(3t) + \frac{1}{2}e^{t/4} \sin(3t).$$



Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι αύξουσες ταλαντώσεις (λόγω του $\alpha = 1/4 > 0$).

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$$

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 + C_3$$

$$2 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3$$

$$3 = y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3$$

$$C_1 = -1/4, C_2 = 1 \text{ και } C_3 = 1/4$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$$

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 + C_3$$

$$2 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3$$

$$3 = y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3$$

$$C_1 = -1/4, C_2 = 1 \text{ και } C_3 = 1/4$$

$$y = \frac{1}{4}e^{-x} + e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r - 1)^3 = 0$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1)^3 = 0$$

$$y = \overbrace{(c_0 + c_1x + c_2x^2)e^x}^{\text{όροι προερχόμενοι από την } r=1} + \underbrace{c_4}_{\text{από την } r=0}.$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1)^3 = 0$$

$$y = \overbrace{(c_0 + c_1x + c_2x^2)e^x}^{\text{όροι προερχόμενοι από την } r=1} + \underbrace{c_4}_{\text{από την } r=0}.$$

Αν προκύψουν μιγαδικές ρίζες (πάντα σε ζεύγη $r = \alpha \pm \beta i$)

$$(c_0 + c_1x + \cdots + c_{k-1}x^k)e^{\alpha x} \cos \beta x + (d_0 + d_1x + \cdots + d_{k-1}x^k)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

όπου $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ και $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$ είναι τυχαίες σταθερές.

Παράδειγμα III

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Παράδειγμα III

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = 0,$$

$$(r^2 - 2r + 2)^2 = 0,$$

$$((r - 1)^2 + 1)^2 = 0$$

Οι ρίζες $1 \pm i$, με πολλαπλότητα 2, άρα

Παράδειγμα III

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = 0,$$

$$(r^2 - 2r + 2)^2 = 0,$$

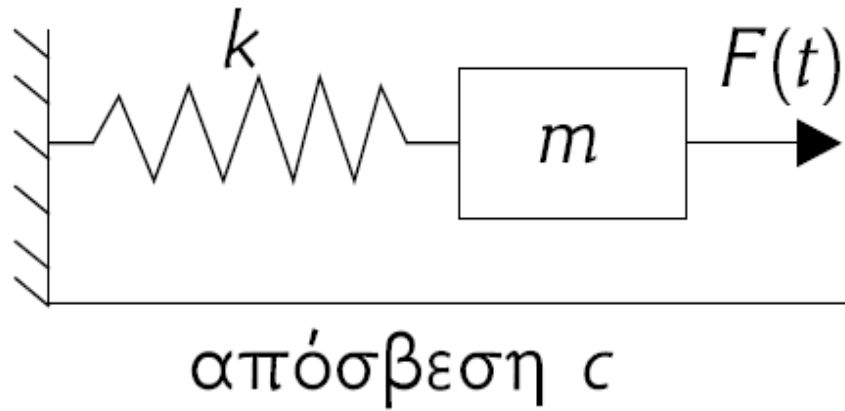
$$((r - 1)^2 + 1)^2 = 0$$

Οι ρίζες $1 \pm i$, με πολλαπλότητα 2, άρα

$$y = (c_0 + c_1x)e^x \cos x + (d_0 + d_1x)e^x \sin x$$

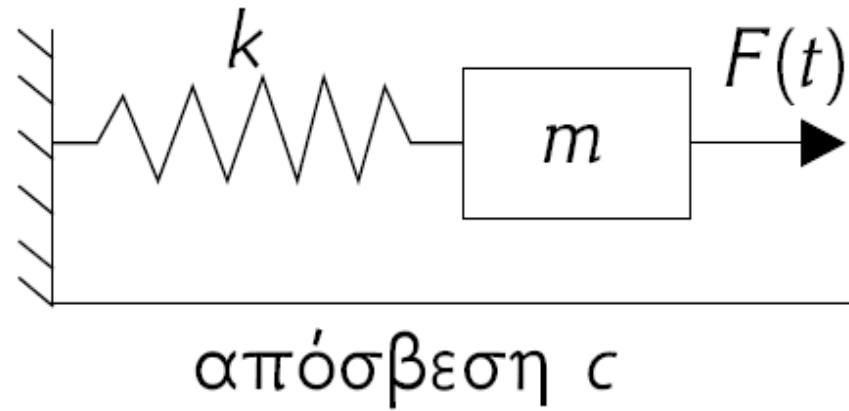
Γραμμικές Δ.Ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές Εφαρμογές

Ταλαντώσεις



Νόμος Χούκ, κανόνας απόσβεσης, 2ος νόμος Νεύτωνα

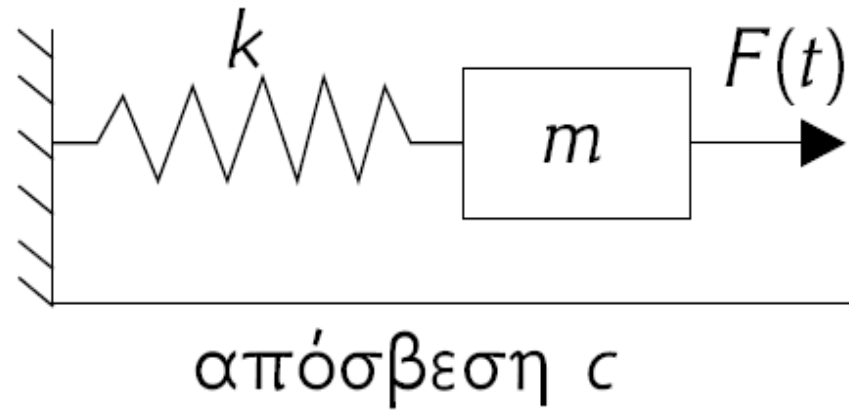
Ταλαντώσεις



Νόμος Χούκ, κανόνας απόσβεσης, 2ος νόμος Νεύτωνα

$$mx'' + \zeta x' + kx = F(t)$$

Ταλαντώσεις



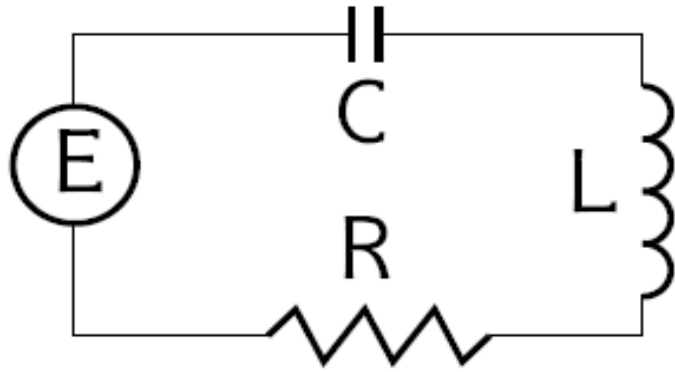
Νόμος Χούκ, κανόνας απόσβεσης, 2ος νόμος Νεύτωνα

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Ορισμοί:

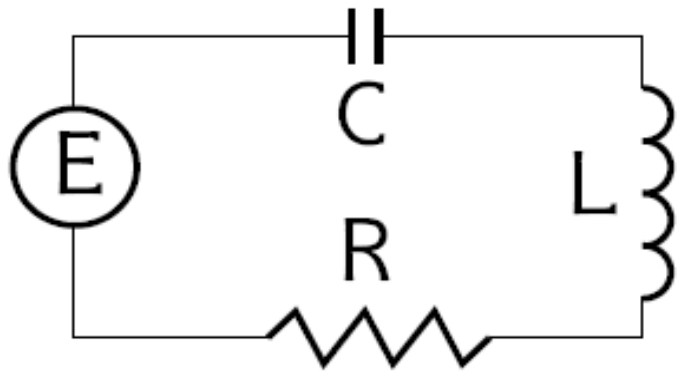
- $F \neq 0 \Rightarrow$ εξαναγκασμένη ταλάντωση
- $F = 0 \Rightarrow$ μη-εξαναγκασμένη (ελεύθερη) ταλάντωση
- $c > 0 \Rightarrow$ κίνηση με απόσβεση
- $c = 0 \Rightarrow$ κίνηση χωρίς απόσβεση

Κυκλώματα RLC



R αντίσταση, πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L , πυκνωτής χωρητικότητας C και ηλεκτρική πηγή τάσης $E(t)$.

Κυκλώματα RLC



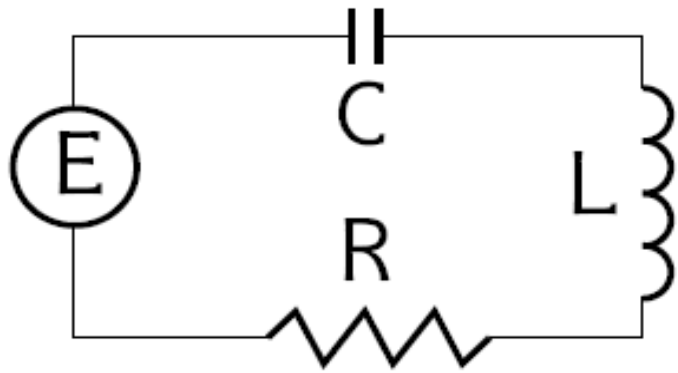
R αντίσταση, πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L , πυκνωτής χωρητικότητας C και ηλεκτρική πηγή τάσης $E(t)$.

Αν $Q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή και $I(t)$ το ρεύμα που διαρέει το κύκλωμα
 $\Rightarrow Q' = I$.

Από θεμελιώδεις νόμους

$$LI(t)' + RI(t) + Q(t)/C = E(t) \quad \text{και παραγωγίζοντας}$$

Κυκλώματα RLC



R αντίσταση, πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L , πυκνωτής χωρητικότητας C και ηλεκτρική πηγή τάσης $E(t)$.

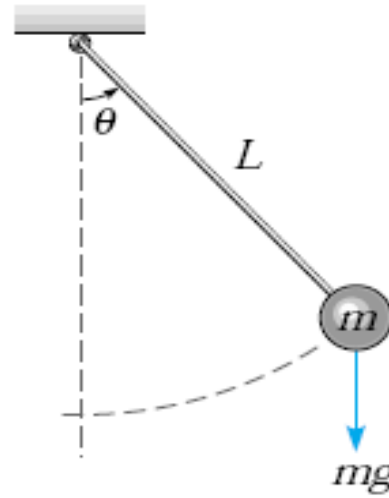
Αν $Q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή και $I(t)$ το ρεύμα που διαρέει το κύκλωμα
 $\Rightarrow Q' = I$.

Από θεμελιώδεις νόμους

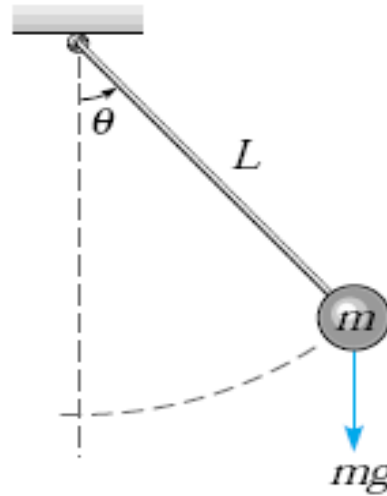
$$LI(t)' + RI(t) + Q(t)/C = E(t) \quad \text{και παραγωγίζοντας}$$

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)$$

Εκκρεμή



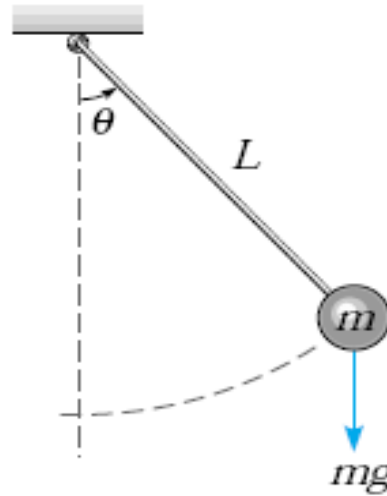
Εκκρεμή



Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα!

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

Εκκρεμή



Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα!

$$\theta'' + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$



$$\theta'' + \frac{g}{L} \theta = 0, \quad \text{υπόθεση ότι } \sin(\theta) \approx \theta \text{ σε radians}$$

A. Απλή αρμονική κίνηση (ελεύθερη χωρίς απόσβεση $c = 0$)

$$mx'' + kx = 0 \Leftrightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = k/m$$

A. Απλή αρμονική κίνηση (ελεύθερη χωρίς απόσβεση $c = 0$)

$$mx'' + kx = 0 \Leftrightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = k/m$$

Η λύση

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

A. Απλή αρμονική κίνηση (ελεύθερη χωρίς απόσβεση $c = 0$)

$$mx'' + kx = 0 \Leftrightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = k/m$$

Η λύση

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Από τριγωνομετρική ταυτότητα (άσκηση)

$$A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t - \gamma), \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \gamma = B/A$$

A. Απλή αρμονική κίνηση (ελεύθερη χωρίς απόσβεση $c = 0$)

$$mx'' + kx = 0 \Leftrightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = k/m$$

Η λύση

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Από τριγωνομετρική ταυτότητα (**άσκηση**)

$$A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t - \gamma), \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \gamma = B/A$$

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \gamma)$$

με C το **πλάτος** της ταλάντωσης, ω_0 η (γωνιακή) **συχνότητα** (σε radians¹) και γ η **μετατόπιση φάσης**

¹Συνήθης συχνότητα $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$ και περίοδος $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Πρόβλημα

Έστω ότι $m = 2\text{kg}$ και $k = 8\text{N/m}$. Το σύστημα μάζας ελατηρίου βρίσκεται σ' ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα 1m/sec . Το όχημα συγκρούεται και σταματά. Η μάζα η οποία μέχρι τότε ήταν σε θέση 0.5m μακριά από τη θέση ισορροποίας (προς τη κατεύθυνση της κίνησης) αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποιά είναι η συχνότητα και ποιο το πλάτος της ταλάντωσης;

Πρόβλημα

Έστω ότι $m = 2kg$ και $k = 8N/m$. Το σύστημα μάζας ελατηρίου βρίσκεται σ' ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα $1m/sec$. Το όχημα συγκρούεται και σταματά. Η μάζα η οποία μέχρι τότε ήταν σε θέση $0.5m$ μακριά από τη θέση ισορροποίας (προς τη κατεύθυνση της κίνησης) αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποιά είναι η συχνότητα και ποιο το πλάτος της ταλάντωσης;

Το μοντέλο του προβλήματος

$$2x'' + 8x = 0, \quad x(0) = 0.5, \quad x'(0) = 1$$

Πρόβλημα

Έστω ότι $m = 2kg$ και $k = 8N/m$. Το σύστημα μάζας ελατηρίου βρίσκεται σ' ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα $1m/sec$. Το όχημα συγκρούεται και σταματά. Η μάζα η οποία μέχρι τότε ήταν σε θέση $0.5m$ μακριά από τη θέση ισορροποίας (προς τη κατεύθυνση της κίνησης) αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποιά είναι η συχνότητα και ποιο το πλάτος της ταλάντωσης;

Το μοντέλο του προβλήματος

$$2x'' + 8x = 0, \quad x(0) = 0.5, \quad x'(0) = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{4} = 2, \quad \text{συχνότητα} \quad \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \text{ Hertz}$$

Πρόβλημα

Έστω ότι $m = 2kg$ και $k = 8N/m$. Το σύστημα μάζας ελατηρίου βρίσκεται σ' ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα $1m/sec$. Το όχημα συγκρούεται και σταματά. Η μάζα η οποία μέχρι τότε ήταν σε θέση $0.5m$ μακριά από τη θέση ισορροπίας (προς τη κατεύθυνση της κίνησης) αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποιά είναι η συχνότητα και ποιο το πλάτος της ταλάντωσης;

Το μοντέλο του προβλήματος

$$2x'' + 8x = 0, \quad x(0) = 0.5, \quad x'(0) = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{4} = 2, \quad \text{συχνότητα} \quad \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \text{ Hertz}$$

Η γενική λύση

$$x(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

Πρόβλημα

Έστω ότι $m = 2kg$ και $k = 8N/m$. Το σύστημα μάζας ελατηρίου βρίσκεται σ' ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα $1m/sec$. Το όχημα συγκρούεται και σταματά. Η μάζα η οποία μέχρι τότε ήταν σε θέση $0.5m$ μακριά από τη θέση ισορροποίας (προς τη κατεύθυνση της κίνησης) αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποιά είναι η συχνότητα και ποιο το πλάτος της ταλάντωσης;

Το μοντέλο του προβλήματος

$$2x'' + 8x = 0, \quad x(0) = 0.5, \quad x'(0) = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{4} = 2, \quad \text{συχνότητα } \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \text{ Hertz}$$

Η γενική λύση

$$x(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

- $x(0) = 0.5 \Rightarrow A = 0.5 \Rightarrow x' = -0.5 \sin(2t) + B \cos(2t)$

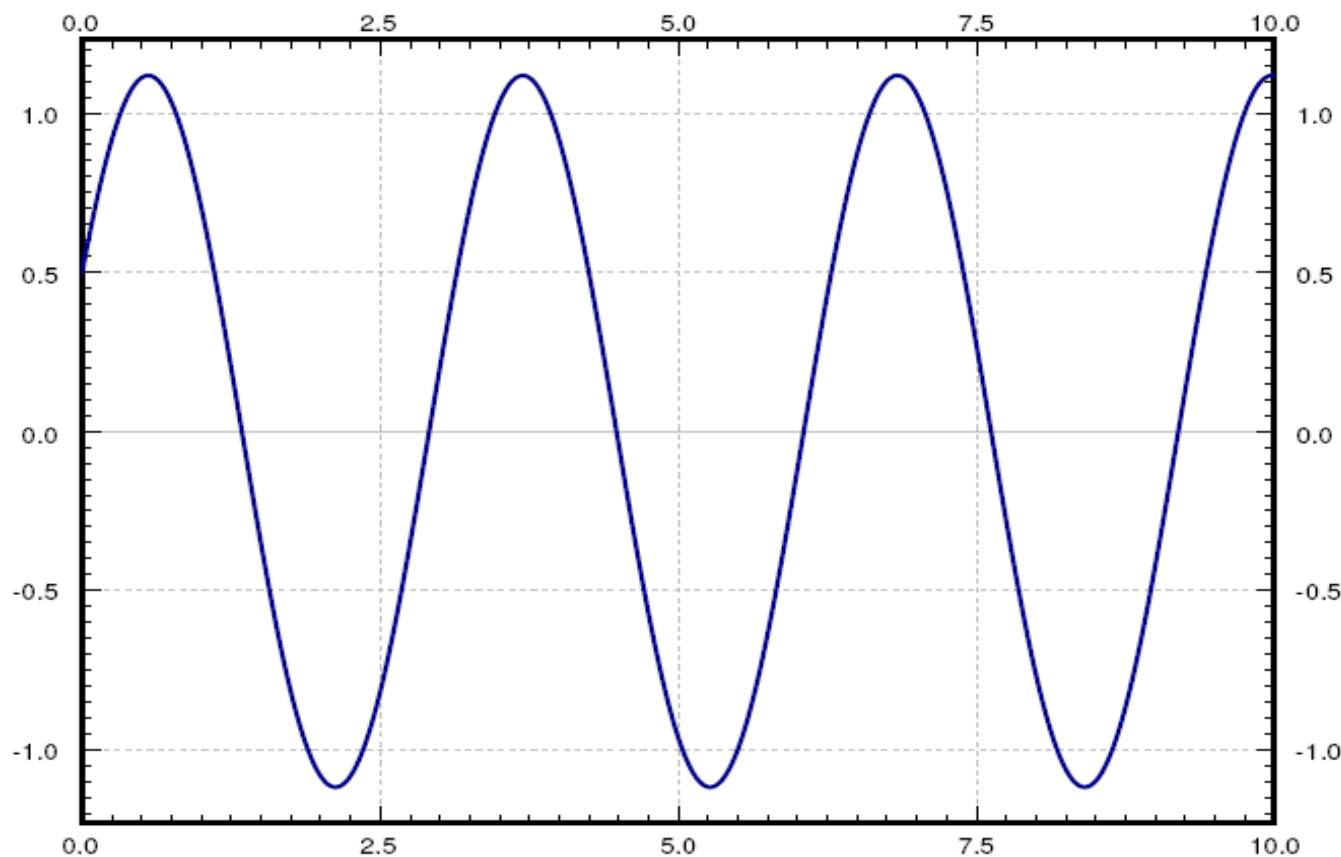
- $x'(0) = 1 \Rightarrow B = 1$ και άρα πλάτος $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1.25} \approx 1.118$

Η λύση του προβλήματος

Η λύση του προβλήματος

Γενικά, για αυτή την κίνηση, $x(0) = A$ και $x'(0) = \omega_0 B$

$$x(t) = 0.5 \cos(2t) + \sin(2t)$$



Β. Ελεύθερη κίνηση με απόσβεση ($c \neq 0$)

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ και } p = \frac{c}{2m}$$

Β. Ελεύθερη κίνηση με απόσβεση ($c \neq 0$)

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ και } p = \frac{c}{2m}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 + 2pr + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

Β. Ελεύθερη κίνηση με απόσβεση ($c \neq 0$)

$$mx'' + cx' + kx = 0 \Rightarrow x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ και } p = \frac{c}{2m}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 + 2pr + \omega^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

Πραγματικές ρίζες όταν

$$p^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2} \geq 0$$

Β. Ελεύθερη κίνηση με απόσβεση ($c \neq 0$)

$$mx'' + cx' + kx = 0 \Rightarrow x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ και } p = \frac{c}{2m}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 + 2pr + \omega^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

Πραγματικές ρίζες όταν

$$p^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2} \geq 0$$

Τι γίνεται όταν οι ρίζες είναι μιγαδικές;

B1. Ισχυρά φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km > 0 \Rightarrow r_2 < r_1 < 0$, άρα η λύση

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{έχει}$$

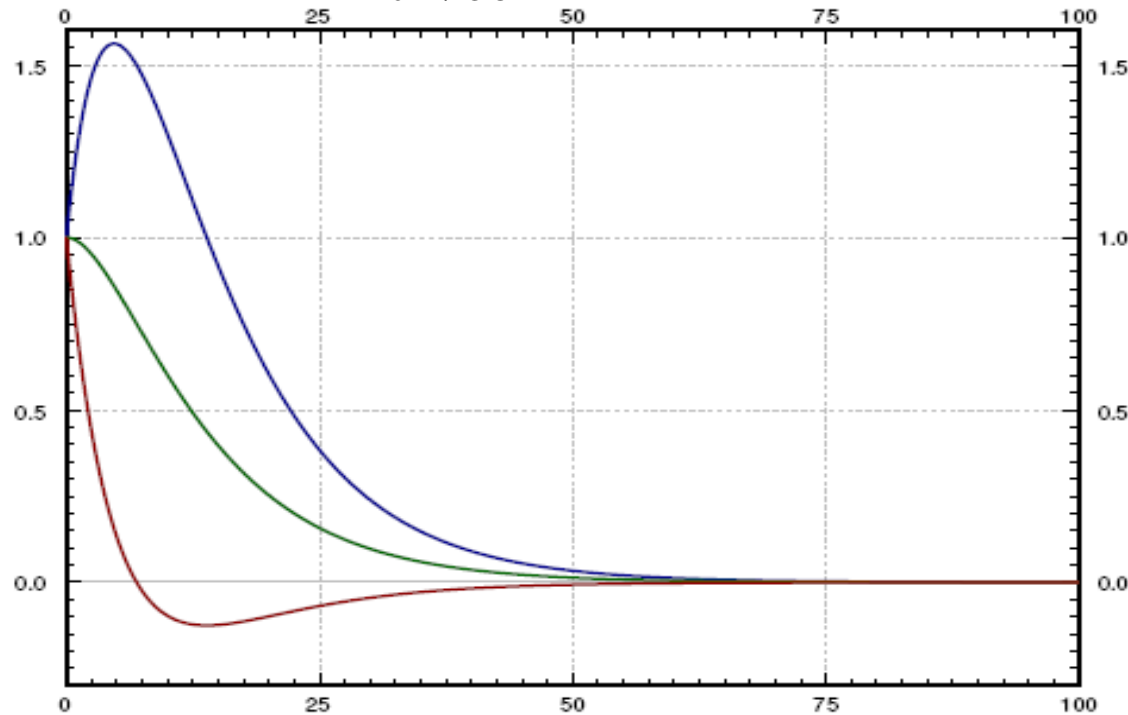
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Β1. Ισχυρά φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km > 0 \Rightarrow r_2 < r_1 < 0$, άρα η λύση

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{έχει}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$



Σχήμα 1: Ισχυρά φθίνουσα κίνηση για διάφορες αρχικές τιμές

B2. Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ &= -p \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 \end{aligned}$$

B2. Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ &= -p \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 \end{aligned}$$

Η λύση

$$x(t) = e^{-pt} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t))$$

B2. Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ &= -p \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 \end{aligned}$$

Η λύση

$$x(t) = e^{-pt} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t))$$

ή

$$x(t) = Ce^{-pt} \cos(\omega_1 t - \gamma)$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

B2. Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ &= -p \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 \end{aligned}$$

Η λύση

$$x(t) = e^{-pt} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t))$$

ή

$$x(t) = Ce^{-pt} \cos(\omega_1 t - \gamma)$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- **Περικλείουσες καμπύλες:** $\pm Ce^{-pt}$ (μέγιστο πλάτος ταλάντωσης κάθε χρονική στιγμή)

B2. Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ &= -p \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 \end{aligned}$$

Η λύση

$$x(t) = e^{-pt} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t))$$

ή

$$x(t) = Ce^{-pt} \cos(\omega_1 t - \gamma)$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- **Περικλείουσες καμπύλες:** $\pm Ce^{-pt}$ (μέγιστο πλάτος ταλάντωσης κάθε χρονική στιγμή)
- $c \uparrow \Rightarrow \omega_1 \downarrow$

B2. Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ &= -p \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 \end{aligned}$$

Η λύση

$$x(t) = e^{-pt} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t))$$

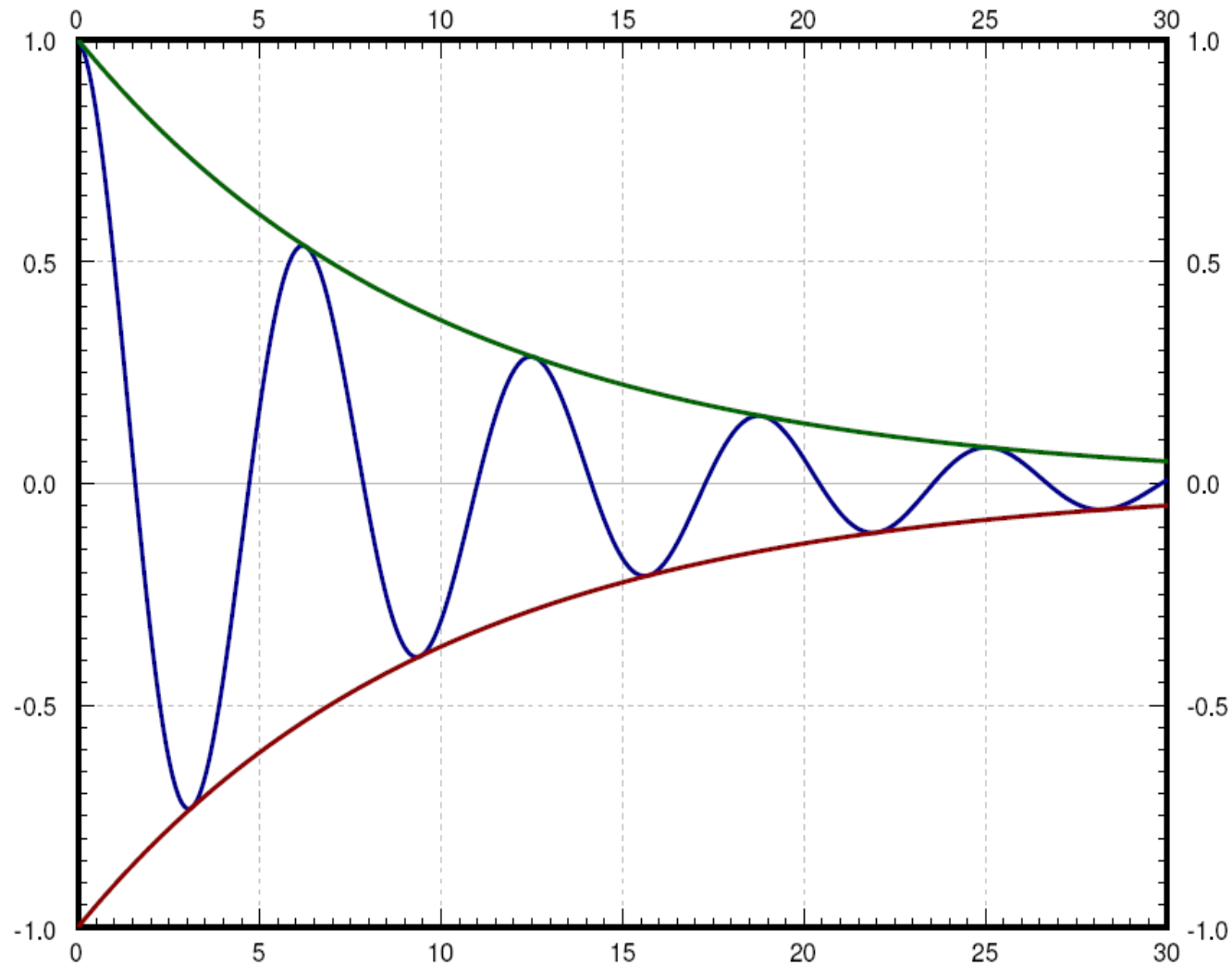
ή

$$x(t) = C e^{-pt} \cos(\omega_1 t - \gamma)$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- **Περικλείουσες καμπύλες:** $\pm C e^{-pt}$ (μέγιστο πλάτος ταλάντωσης κάθε χρονική στιγμή)
- $c \uparrow \Rightarrow \omega_1 \downarrow$
- $c \downarrow \Rightarrow p \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega_0$

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση



Σχήμα 2: Ασθενώς φθίνουσα κίνηση και περικλείουσες καμπύλες

Δεύτερης τάξης Δ.Ε. με μη-σταθερούς συντελετές : Euler-Cauchy Εξισώσεις

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Δεύτερης τάξης Δ.Ε. με μη-σταθερούς συντελετές : Euler-Cauchy Εξισώσεις

$$x^2 y''(x) + ax y'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$y = x^m$$

Δεύτερης τάξης Δ.Ε. με μη-σταθερούς συντελετές : Euler-Cauchy Εξισώσεις

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$y = x^m$$

Τότε $y' = mx^{m-1}$ και $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ και αντικατάσταση στη (1)

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

και η x^m θα είναι λύση αν m ρίζα της χαρ. εξίσωσης δηλ.

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}(1-a) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}$$

Δεύτερης τάξης Δ.Ε. με μη-σταθερούς συντελετές : Euler-Cauchy Εξισώσεις

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$y = x^m$$

Τότε $y' = mx^{m-1}$ και $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ και αντικατάσταση στη (1)

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

και η x^m θα είναι λύση αν m ρίζα της χαρ. εξίσωσης δηλ.

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}(1-a) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}$$

Euler-Cauchy: Παράδειγμα I

$$x^2 y'' + 1.5xy' - 0.5y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + 0.5m - 0.5 = 0 \quad \text{έχει ρίζες} \quad m_1 = 0.5, \quad m_2 = -1$$

Euler-Cauchy: Παράδειγμα I

$$x^2 y'' + 1.5xy' - 0.5y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 + 0.5m - 0.5 = 0 \quad \text{έχει ρίζες} \quad m_1 = 0.5, \quad m_2 = -1$$

Η γενική λύση τότε

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} = C_1 \sqrt{x} + \frac{C_2}{x}$$

Η $y_1 = x^{0.5}$ και $y_2 = 1/x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (και παράγουν όλη την κλάση λύσεων) άρα **θεμελιώδεις λύσεις**.

Euler-Cauchy: Παράδειγμα II

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \text{έχει **διπλή ρίζα** } m = 3$$

Τι γίνεται σε αυτή τη περίπτωση;

Euler-Cauchy: Παράδειγμα II

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \text{έχει **διπλή ρίζα** } m = 3$$

Τι γίνεται σε αυτή τη περίπτωση;

Στις ρίζες της χαρ. εξίσωσης, στη γενική περίπτωση, έχω τη διπλή ρίζα

$m = \frac{1}{2}(1 - a)$ αν $(1 - a)^2 - 4b = 0$, τότε η (1) γίνεται

$$x^2 y'' + axy' + \frac{1}{4}(1 - a)^2 y = 0 \quad \text{ή} \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1 - a)^2}{4x^2}y = 0$$

και γνωρίζω μόνο μία λύση, τη $y_1 = x^{(1-a)/2}$.

Euler-Cauchy: Παράδειγμα II

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \text{έχει **διπλή ρίζα** } m = 3$$

Τι γίνεται σε αυτή τη περίπτωση;

Στις ρίζες της χαρ. εξίσωσης, στη γενική περίπτωση, έχω τη διπλή ρίζα

$m = \frac{1}{2}(1 - a)$ αν $(1 - a)^2 - 4b = 0$, τότε η (1) γίνεται

$$x^2 y'' + axy' + \frac{1}{4}(1 - a)^2 y = 0 \quad \text{ή} \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1 - a)^2}{4x^2}y = 0$$

και γνωρίζω μόνο μία λύση, τη $y_1 = x^{(1-a)/2}$.

Ψάχνω μια δεύτερη λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη από τη y_1 (**διαδικασία ελάπωσης της τάξης**, βλ. Διάλεξη 5-Άσκηση)

Euler-Cauchy: Παράδειγμα II

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \text{έχει **διπλή ρίζα** } m = 3$$

Τι γίνεται σε αυτή τη περίπτωση;

Στις ρίζες της χαρ. εξίσωσης, στη γενική περίπτωση, έχω τη διπλή ρίζα

$m = \frac{1}{2}(1 - a)$ αν $(1 - a)^2 - 4b = 0$, τότε η (1) γίνεται

$$x^2 y'' + axy' + \frac{1}{4}(1 - a)^2 y = 0 \quad \text{ή} \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1 - a)^2}{4x^2}y = 0$$

και γνωρίζω μόνο μία λύση, τη $y_1 = x^{(1-a)/2}$.

Ψάχνω μια δεύτερη λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη από τη y_1 (**διαδικασία ελάπωσης της τάξης**, βλ. Διάλεξη 5-Άσκηση)

$$y_2 = x^m \ln(x)$$

Euler-Cauchy: Παράδειγμα III

$$x^2 y'' + 0.6xy' + 16.04y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 - 0.4m + 26.04 = 0 \quad \text{έχει **μιγαδικές ρίζες** } m_{1,2} = 0.2 \pm 4i$$

Τι γίνεται σε αυτή τη περίπτωση; Θέλω πραγματικές λύσεις!

Euler-Cauchy: Παράδειγμα III

$$x^2 y'' + 0.6xy' + 16.04y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 - 0.4m + 26.04 = 0 \quad \text{έχει **μιγαδικές ρίζες** } m_{1,2} = 0.2 \pm 4i$$

Τι γίνεται σε αυτή τη περίπτωση; Θέλω πραγματικές λύσεις!

Με χρήση της ταυτότητας $x = e^{\ln x}$ και τον τύπο του Euler

$$x^{m_1} = x^{0.2}(\cos(4 \ln x) + i \sin(4 \ln x))$$

$$x^{m_2} = x^{0.2}(\cos(4 \ln x) - i \sin(4 \ln x))$$

Αφαιρώντας και προσθέτοντας τις δύο παραπάνω, παίρνουμε

$$y_1 = x^{0.2} \cos(4 \ln x) \quad \text{και} \quad y_2 = x^{0.2} \sin(4 \ln x)$$

Euler-Cauchy: Παράδειγμα III

$$x^2 y'' + 0.6xy' + 16.04y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 - 0.4m + 26.04 = 0 \quad \text{έχει μιγαδικές ρίζες} \quad m_{1,2} = 0.2 \pm 4i$$

Τι γίνεται σε αυτή τη περίπτωση; Θέλω πραγματικές λύσεις!

Με χρήση της ταυτότητας $x = e^{\ln x}$ και τον τύπο του Euler

$$x^{m_1} = x^{0.2}(\cos(4 \ln x) + i \sin(4 \ln x))$$

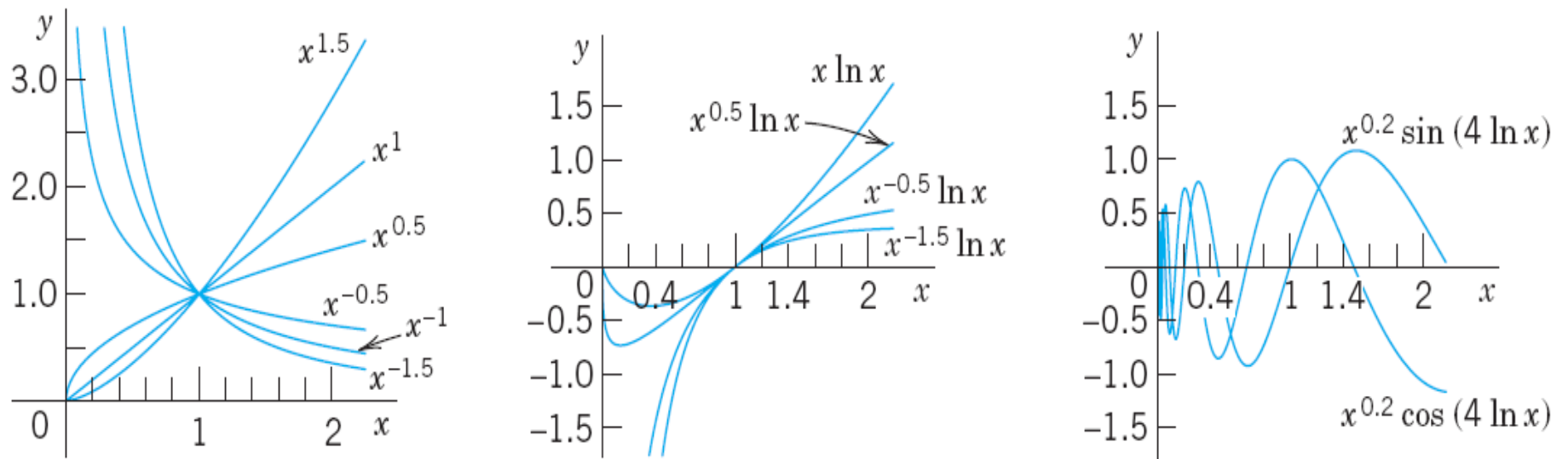
$$x^{m_2} = x^{0.2}(\cos(4 \ln x) - i \sin(4 \ln x))$$

Αφαιρώντας και προσθέτοντας τις δύο παραπάνω, παίρνουμε

$$y_1 = x^{0.2} \cos(4 \ln x) \quad \text{και} \quad y_2 = x^{0.2} \sin(4 \ln x)$$

Η γενική λύση

$$y(x) = x^{0.2} (C_1 \cos(4 \ln x) + C_2 \sin(4 \ln x))$$



Σχήμα 3: Συναρτήσεις βάσης για τις εξισώσεις Euler-Cauchy: (αριστερά) για πραγματικές ρίζες, διπλή ρίζα (μέση) και μιγαδικές (δεξιά)

Γραμμικές Μή-Ομογενής Σ. Δ. Ε. 2ης Τάξης

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής

Οποιοσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία λύση της ομογενούς

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής

Οποιοσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία λύση της ομογενούς

Έστω y_p και $\tilde{y}_p$, δύο λύσεις της μη-ομογενούς (1)

$$L[y_p - \tilde{y}_p] = L[y_p] - L[\tilde{y}_p] = (2x + 1) - (2x + 1) = 0$$

Γενική λύση μη-ομογενούς γραμμικής Δ.Ε.

(με σταθερούς συντελεστές)

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

όπου $L[\cdot]$ συμβολικά ο διαφορικός τελεστής

Οποιοσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία λύση της ομογενούς

Έστω y_p και $\tilde{y}_p$, δύο λύσεις της μη-ομογενούς (1)

$$L[y_p - \tilde{y}_p] = L[y_p] - L[\tilde{y}_p] = (2x + 1) - (2x + 1) = 0$$

$$y = y_c + y_p$$

- y η γενική λύση της μη-ομογενούς
- y_c η γενική λύση της ομογενούς (**συμπληρωματική λύση**)
- y_p **μια οποιαδήποτε λύση της μη-ομογενούς**

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y = Ax + B$,

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y = Ax + B$,

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y = Ax + B$,

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \Rightarrow A = 1/3, B = -1/9$$

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y = Ax + B$,

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \Rightarrow A = 1/3, B = -1/9$$

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x - 1}{9}$$

Η γενική λύση

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9}$$

I. Μέθοδος Απροσδιόριστων (ή προσδιοριστέων) Συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \Leftrightarrow L[y] = 2x + 1 \quad (1)$$

Μαντεύω $y = Ax + B$,

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B)$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \Rightarrow A = 1/3, B = -1/9$$

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x - 1}{9}$$

Η γενική λύση

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9}$$

Προσοχή: Πρώτα υπολογίζουμε την $y = y_c + y_p$ και κατόπιν λύνουμε ως προς τις σταθερές χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y = A \cos(2x) + B \sin(2x)$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y = A \cos(2x) + B \sin(2x)$

$$-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, B = 1/5$$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, B = 1/5$$

Άρα

$$y_p = \frac{-\cos(2x) + 2\sin(x)}{10}$$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, B = 1/5$$

Άρα

$$y_p = \frac{-\cos(2x) + 2\sin(x)}{10}$$

- Γενικά αν

- $L[y] = e^{3x}$ μπορώ (ίσως) να επιλέξω $y = Ae^{3x}$

Παράδειγματα-Μαντεψιές

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, επιλέγω $y = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 2A \cos(2x) + 2B \sin(2x) = \cos(2x)$

Για ισότητα

$$-4A + 4B + 2A = 1, \text{ και } -4B - 4A + 2B = 0 \Rightarrow A = -1/10, B = 1/5$$

Άρα

$$y_p = \frac{-\cos(2x) + 2\sin(x)}{10}$$

• Γενικά αν

- $L[y] = e^{3x}$ μπορώ (ίσως) να επιλέξω $y = Ae^{3x}$
- $L[y] = (1 + 2x^2)e^{-x} \cos(\pi x)$ επιλέγω
 $y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x} \cos(\pi x) + (D + Ex + Fx^2)e^{-x} \sin(\pi x)$

. μπορεί όμως και να αποτύχουμε

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y = Ae^{3x}$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω } y = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}, \quad \text{σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων!}$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω } y = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}, \quad \text{σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων!}$$

Λύση: Επιλέγω τότε $y = Axe^{3x}$

$$y'' - 9y = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 4Ae^{3x}(= e^{3x}) \Rightarrow A = 1/4$$

..... μπορεί όμως και να αποτύχουμε

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω } y = Ae^{3x}$$

Αντικαθιστώ

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}, \quad \forall A$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}, \quad \text{σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων!}$$

Λύση: Επιλέγω τότε $y = Axe^{3x}$

$$y'' - 9y = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 4Ae^{3x} (= e^{3x}) \Rightarrow A = 1/4$$

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{4} x e^{3x}$$

. μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

..... μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y = Axe^{3x}$$

..... μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y = Axe^{3x}$$

Όμως ...

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{3x} \Rightarrow \text{η μαντεψιά θα αποτύχει!}$$

..... μπορεί όμως ακόμη να αποτύχουμε (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x} \quad \text{μπορώ (ίσως) να επιλέξω} \quad y = Axe^{3x}$$

Όμως ...

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{3x} \Rightarrow \text{η μαντεψιά θα αποτύχει!}$$

Λύση: Επιλέγω τότε $y = Ax^2 e^{3x}$

Εν γένει, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με x την επιλογή μας όσες φορές χρειάζεται για να αποφύγουμε τη σύμπτωση (πολλαπλότητα) λύσεων, όχι όμως περισσότερες φορές!

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $L[\cdot]$

$$y = u + v \quad \Rightarrow \quad L[y] = L[u + v] = L[u] + L[v] = e^{2x} + \cos x$$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $L[\cdot]$

$$y = u + v \quad \Rightarrow \quad L[y] = L[u + v] = L[u] + L[v] = e^{2x} + \cos x$$

Παρατήρηση Το να "μαντέψω κατάλληλα" μπορεί να είναι αποτελεσματικό αν το δεξή μέλος της εξίσωσης $L[y] = f(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων παραγώγων

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$L[y] = e^{2x} + \cos x$$

- Αν u η λύση της εξίσωσης $L[u] = e^{2x}$
- Αν v η λύση της εξίσωσης $L[v] = \cos x$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $L[\cdot]$

$$y = u + v \quad \Rightarrow \quad L[y] = L[u + v] = L[u] + L[v] = e^{2x} + \cos x$$

Παρατήρηση Το να "μαντέψω κατάλληλα" μπορεί να είναι αποτελεσματικό αν το δεξί μέλος της εξίσωσης $L[y] = f(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων παραγώγων

Αντιπαράδειγμα:

$$y'' + y = \tan(x)$$