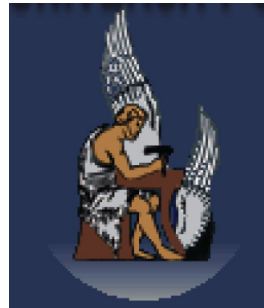


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 5η



Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2018

Μέρος 2ο
Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
Υψηλότερης Τάξης

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

• Για $n = 2$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad \text{κανονική μορφή} \quad (1)$$

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

- Για $n = 2$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad \text{κανονική μορφή} \quad (1)$$

- **Ομογενής** γραμμική εξίσωση όταν $f(x) = 0$.

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

- Για $n = 2$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad \text{κανονική μορφή} \quad (1)$$

- **Ομογενής** γραμμική εξίσωση όταν $f(x) = 0$.

- Παραδείγματα

$$y'' + k^2y = 0 \quad \text{Δύο λύσεις: } y_1 = \cos(kx), \quad y_2 = \sin(kx),$$

$$y'' - k^2y = 0 \quad \text{Δύο λύσεις: } y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = e^{-kx}.$$

Θεώρημα Υπέρθεσης

Αν $y_1(x), y_2(x)$ είναι **δύο λύσεις** της ομογενούς γραμμικής ΔΕ (1), τότε για κάθε $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

είναι επίσης λύση της (1).

Θεώρημα Υπέρθεσης

Αν $y_1(x), y_2(x)$ είναι **δύο λύσεις** της ομογενούς γραμμικής ΔΕ (1), τότε για κάθε $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

είναι επίσης λύση της (1).

Απόδειξη Έστω $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, τότε

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1 p y_1' + C_2 p y_2' + C_1 q y_1 + C_2 q y_2 \\ &= C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας

Έστω ότι p, q, f **συνεχείς συναρτήσεις** σ' ένα διάστημα I και x_0, b_0, b_1 σταθερές. Η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

έχει ακριβώς μία λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις **αρχικές συνθήκες**

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1.$$

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας

Έστω ότι p, q, f **συνεχείς συναρτήσεις** σ' ένα διάστημα I και x_0, b_0, b_1 σταθερές. Η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

έχει ακριβώς μία λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις **αρχικές συνθήκες**

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1.$$

Παραδείγματα

- $y'' + y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$

$$y(x) = b_0 \cos(x) + b_1 \sin(x)$$

- $y'' - y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$

$$y(x) = b_0 \cosh(x) + b_1 \sinh(x)$$

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός Οι μη μηδενικές, συναρτήσεις $y_1(x), \dots, y_n(x)$ είναι **γραμμικά εξαρτημένες** στο διάστημα I αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ που δεν είναι όλοι μηδέν ώστε να ισχύει

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in I \quad (\mathbf{A})$$

Εάν η $(\mathbf{A})$ ισχύει μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι **γραμμικά ανεξάρτητες**.

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός Οι μη μηδενικές, συναρτήσεις $y_1(x), \dots, y_n(x)$ είναι **γραμμικά εξαρτημένες** στο διάστημα I αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ που δεν είναι όλοι μηδέν ώστε να ισχύει

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in I \quad (\mathbf{A})$$

Εάν η $(\mathbf{A})$ ισχύει μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι **γραμμικά ανεξάρτητες**.

Παράδειγμα: Οι $y_1(x) = x$ και $y_2(x) = x^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\lambda \neq 0$ ώστε $x = \lambda x^2$ για κάθε $x \in I$.

Εάν a_1, b_1 δύο διαφορετικοί και μη μηδενικοί αριθμοί, αντικαθιστώντας στην $x = \lambda x^2$ παίρνουμε $a_1 = \lambda a_1^2$ και $b_1 = \lambda b_1^2$. Επομένως $1/a_1 = \lambda = 1/b_1$ που είναι άτοπο.

Παραδείγματα

- Οι συναρτήσεις $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$ και $y_3 = 1 + 4x^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Πράγματι, ισχύει $1 \cdot y_1(x) + 4 \cdot y_2(x) - 1 \cdot y_3(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Παραδείγματα

- Οι συναρτήσεις $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$ και $y_3 = 1 + 4x^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Πράγματι, ισχύει $1 \cdot y_1(x) + 4 \cdot y_2(x) - 1 \cdot y_3(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως είναι γραμμικά εξαρτημένες.

- Οι συναρτήσεις $\sin(x)$, $\cos(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
Έστω $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 - x_2 \neq k\pi$. Τότε,

$$\lambda_1 \sin(x_1) + \lambda_2 \cos(x_1) = 0 \text{ και } \lambda_1 \sin(x_2) + \lambda_2 \cos(x_2) = 0.$$

Οι παραπάνω δύο ισότητες είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τους λ_1, λ_2 . Η **ορίζουσα** του συστήματος είναι η

Παραδείγματα

- Οι συναρτήσεις $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$ και $y_3 = 1 + 4x^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Πράγματι, ισχύει $1 \cdot y_1(x) + 4 \cdot y_2(x) - 1 \cdot y_3(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως είναι γραμμικά εξαρτημένες.

- Οι συναρτήσεις $\sin(x)$, $\cos(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
Έστω $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 - x_2 \neq k\pi$. Τότε,

$$\lambda_1 \sin(x_1) + \lambda_2 \cos(x_1) = 0 \text{ και } \lambda_1 \sin(x_2) + \lambda_2 \cos(x_2) = 0.$$

Οι παραπάνω δύο ισότητες είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τους λ_1, λ_2 . Η **ορίζουσα** του συστήματος είναι η

$$\begin{vmatrix} \sin(x_1) & \cos(x_1) \\ \sin(x_2) & \cos(x_2) \end{vmatrix} = \sin(x_1) \cos(x_2) - \cos(x_1) \sin(x_2) = \sin(x_1 - x_2) \neq 0$$

εφόσον $x_1 - x_2 \neq k\pi$. Έτσι έχουμε ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Γραμμική ανεξαρτησία-Γενίκευση

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y_1, \dots, y_n$ ορισμένες στο διάστημα I είναι $(n - 1)$ -φορές παραγωγίσιμες.

Για να εξετάσουμε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες $\forall x \in I$ την

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad (\star)$$

και εξετάζουμε αν υπάρχει μια μη-μηδενική λύση.

Γραμμική ανεξαρτησία-Γενίκευση

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y_1, \dots, y_n$ ορισμένες στο διάστημα I είναι $(n - 1)$ -φορές παραγωγίσιμες.

Για να εξετάσουμε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες $\forall x \in I$ την

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad (\star)$$

και εξετάζουμε αν υπάρχει μια μη-μηδενική λύση.

Επειδή οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, παραγωγίζοντας την $(\star)$, $(n - 1)$ φορές :

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \dots + \lambda_n y_n'(x) = 0 \quad (2)$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \quad (3)$$

Γραμμική ανεξαρτησία-Γενίκευση

Έτσι για κάθε $x \in I$ έχουμε ένα σύστημα n -εξισώσεων με n -αγνώστους, τους $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Η ορίζουσα αυτού του συστήματος για $x \in I$ είναι η

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Γραμμική ανεξαρτησία-Γενίκευση

Έτσι για κάθε $x \in I$ έχουμε ένα σύστημα n -εξισώσεων με n -αγνώστους, τους $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Η ορίζουσα αυτού του συστήματος για $x \in I$ είναι η

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Εάν υπάρχει $x_0 \in I$ ώστε $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ και άρα οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Η ορίζουσα $W(y_1, \dots, y_n)$ ονομάζεται **Wroskian ορίζουσα** των $y_1, \dots, y_n$.

Γραμμική ανεξαρτησία-Γενίκευση

Έτσι για κάθε $x \in I$ έχουμε ένα σύστημα n -εξισώσεων με n -αγνώστους, τους $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Η ορίζουσα αυτού του συστήματος για $x \in I$ είναι η

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Εάν υπάρχει $x_0 \in I$ ώστε $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ και άρα οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Η ορίζουσα $W(y_1, \dots, y_n)$ ονομάζεται **Wroskian ορίζουσα** των $y_1, \dots, y_n$.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν η $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$, τότε δεν μπορούμε να πούμε αν οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή όχι.

Γραμμική ανεξαρτησία & Σ.Δ.Ε

Θεώρημα 1

Εάν $y_1, \dots, y_n$ είναι λύσεις της ΔΕ

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0$$

στο διάστημα $[a, b]$ τότε **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι να υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, b]$ ώστε η Wronskian ορίζουσα των $y_1, \dots, y_n$ στο x_0 να είναι διάφορη του μηδέν.

Γραμμική ανεξαρτησία & Σ.Δ.Ε

Θεώρημα 1

Εάν $y_1, \dots, y_n$ είναι λύσεις της ΔΕ

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0$$

στο διάστημα $[a, b]$ τότε **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι να υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, b]$ ώστε η Wronskian ορίζουσα των $y_1, \dots, y_n$ στο x_0 να είναι διάφορη του μηδέν.

Θεώρημα 2 (Abel)

Εάν y_1, y_2 είναι λύσεις της $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ σε ένα διάστημα I και η Wronskian ορίζουσα των y_1, y_2 δεν μηδενίζεται σε ένα σημείο $x_0 \in I$, ($W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$) τότε δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος.

Απόδειξη 2 Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad \text{και} \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Πολ/ντας την πρώτη με y_2 , τη δεύτερη με y_1 και αφαιρώντας κατά μέλη

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0. \quad (4)$$

Ο όρος στη **δεύτερη παρένθεση** είναι η Wronskian, $W(y_1, y_2)$ και η **πρώτη παρένθεση** είναι η παράγωγος της $W(y_1, y_2)$,

$$W'(y_1, y_2)(x) = (y_1(x)y_2'(x) - y_2y_1'(x))' = (y_1y_2'' - y_2y_1'')(x)$$

Συμβολίζοντας με $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$ η (4) παίρνει τη μορφή

$$W' + p(x)W = 0$$

που είναι **γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης** (υποβιβασμός της τάξης).

Η αρχική συνθήκη $W(y_1, y_2)(x_0) = W_0 \neq 0$ μας εξασφαλίζει ότι έχουμε μη μηδενική λύση στην παραπάνω εξίσωση.

Η μη- μηδενική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}.$$

Από την αρχική συνθήκη $W(y_1, y_2)(x_0) := W_0$ παίρνουμε τη λύση

$$W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds} \quad \text{και άρα } W(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in I.$$

Η μη-μηδενική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$W = C e^{-\int_{x_0}^x p(s) ds}.$$

Από την αρχική συνθήκη $W(y_1, y_2)(x_0) := W_0$ παίρνουμε τη λύση

$$W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p(s) ds} \quad \text{και άρα } W(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in I.$$

Άσκηση Έστω y_1 μια λύση της Δ.Ε. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Βρείτε μια λύση της y_2 που είναι γραμμικά ανεξάρτητη με την y_1 καθώς και τη γενική λύση.

(Απάντηση

$$y_2 = y_1 \int \left(\frac{C}{y_1^2} \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(s) ds} \right) dx.$$

Γραμμική ανεξαρτησία & και η Γενική λύση της Δ.Ε

Πρόταση Υπάρχουν ακριβώς n -γραμμικά ανεξάρτητες (θεμελιώδεις) λύσεις για την Δ.Ε.

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0 \quad (5)$$

στο διάστημα $I = [a, b]$.

Γραμμική ανεξαρτησία & και η Γενική λύση της Δ.Ε

Πρόταση Υπάρχουν ακριβώς n -γραμμικά ανεξάρτητες (**θεμελιώδεις**) λύσεις για την Δ.Ε.

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0 \quad (5)$$

στο διάστημα $I = [a, b]$.

Θεώρημα

Έστω $y_1, \dots, y_n$, n -γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε.

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0 \quad (6)$$

στο διάστημα $I = [a, b]$. Τότε εάν ϕ είναι μια λύση (**γενική λύση**) της Δ.Ε.

στο διάστημα I υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\phi = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n$$

στο διάστημα I .

Παράδειγμα

Έστω το Π.Α.Τ

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0, \quad y(1) = 4, y'(1) = 8, \quad x \in (0, \infty)$$

Δείξτε ότι οι $y_1(x) = x^3$ και $y_2(x) = x^{-1}$ είναι θεμελειώδεις λύσεις της ΔΕ και λύστε το Π.Α.Τ.

Παράδειγμα

Έστω το Π.Α.Τ

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0, \quad y(1) = 4, y'(1) = 8, \quad x \in (0, \infty)$$

Δείξτε ότι οι $y_1(x) = x^3$ και $y_2(x) = x^{-1}$ είναι θεμελειώδεις λύσεις της ΔΕ και λύστε το Π.Α.Τ.

Αντικαθιστώντας τις $y_1(x), y_2(x)$ στη Δ.Ε. έχουμε

$$y_1'' - \frac{1}{x}y_1' - \frac{3}{x^2}y_1 = 0, \quad y_2'' - \frac{1}{x}y_2' - \frac{3}{x^2}y_2 = 0$$

Παράδειγμα

Έστω το Π.Α.Τ

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0, \quad y(1) = 4, y'(1) = 8, \quad x \in (0, \infty)$$

Δείξτε ότι οι $y_1(x) = x^3$ και $y_2(x) = x^{-1}$ είναι θεμελειώδεις λύσεις της ΔΕ και λύστε το Π.Α.Τ.

Αντικαθιστώντας τις $y_1(x), y_2(x)$ στη Δ.Ε. έχουμε

$$y_1'' - \frac{1}{x}y_1' - \frac{3}{x^2}y_1 = 0, \quad y_2'' - \frac{1}{x}y_2' - \frac{3}{x^2}y_2 = 0$$

η Wronskian στο $x_0 = 1$

$$W(y_1(1), y_2(1)) = \begin{vmatrix} x^3 & x^{-1} \\ 3x^2 & -x^{-2} \end{vmatrix}_{x_0=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Άρα οι $y_1(x), y_2(x)$ είναι θεμελειώδεις λύσεις της Δ.Ε.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ και από τις αρχικές συνθήκες

$$y(1) = c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) = 4$$

$$y'(1) = c_1 y_1'(1) + c_2 y_2'(1) = 8$$

έχουμε

$$c_1 + c_2 = 4$$

$$3c_1 - c_2 = 8$$

συνεπώς $c_1 = 3$ και $c_2 = 1$.

Άρα η γενική λύση είναι $y(x) = 3x^3 + \frac{1}{x}$.

Ια. Ομογενής Σ.Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

Ια. Ομογενής Σ.Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

Επιλέγω (μαντεύω!) ότι $y = e^{rx}$. Τότε, $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

Ια. Ομογενής Σ.Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

Επιλέγω (μαντεύω!) ότι $y = e^{rx}$. Τότε, $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0 \Rightarrow \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0 \Rightarrow \\ r^2 - 6r + 8 &= 0 \Rightarrow \\ (r - 2)(r - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Ια. Ομογενής Σ.Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

Επιλέγω (μαντεύω!) ότι $y = e^{rx}$. Τότε, $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0 \Rightarrow \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0 \Rightarrow \\ r^2 - 6r + 8 &= 0 \Rightarrow \\ (r - 2)(r - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, $y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$ δύο λύσεις (είναι γραμμικά ανεξάρτητες;)

Ια. Ομογενής Σ.Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

Επιλέγω (μαντεύω!) ότι $y = e^{rx}$. Τότε, $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0 \Rightarrow \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0 \Rightarrow \\ r^2 - 6r + 8 &= 0 \Rightarrow \\ (r - 2)(r - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, $y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$ δύο λύσεις (είναι γραμμικά ανεξάρτητες;)

Γενική λύση:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$$

Ειδική λύση:

$$\begin{aligned} -2 = y(0) &= C_1 + C_2, & 6 = y'(0) &= 2C_1 + 5C_2 \\ y &= -7e^{2x} + 5e^{4x} \end{aligned}$$

Γενίκευση-Μεθοδολογία

Έστω η Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Μαντεύοντας ότι $y = e^{rx} \Rightarrow$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$$

η **χαρακτηριστική (ή βοηθητική) εξίσωση**

$$ar^2 + br + c = 0$$

Γενίκευση-Μεθοδολογία

Έστω η Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Μαντεύοντας ότι $y = e^{rx} \Rightarrow$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$$

η χαρακτηριστική (ή βοηθητική) εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0$$

Θεώρημα Έστω r_1 και r_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

(i) Αν $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(ii) Αν $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

Γενίκευση-Μεθοδολογία

Έστω η Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Μαντεύοντας ότι $y = e^{rx} \Rightarrow$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow$$

η χαρακτηριστική (ή βοηθητική) εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0$$

Θεώρημα Έστω r_1 και r_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

(i) Αν $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(ii) Αν $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

Τι συμβαίνει αν έχω μιγαδικές ρίζες;;

Παραδείγματα

- $y'' - k^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$

Παραδείγματα

- $y'' - k^2y = 0 \Rightarrow r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow y = C_1e^{-kx} + C_2e^{kx}$
- $y'' - 8y' + 16y = 0 \Rightarrow r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$

Παραδείγματα

- $y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$
- $y'' - 8y' + 16y = 0 \Rightarrow r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$$

Παραδείγματα

- $y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$
- $y'' - 8y' + 16y = 0 \Rightarrow r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$$

Είναι οι $y_1 = e^{4x}$ και $y_2 = x e^{4x}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις;;

Παραδείγματα

- $y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$
- $y'' - 8y' + 16y = 0 \Rightarrow r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$$

Είναι οι $y_1 = e^{4x}$ και $y_2 = x e^{4x}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις;;

$$y_2 = x e^{4x} \Rightarrow y_2' = e^{4x} + 4x e^{4x}, \quad y_2'' = 8e^{4x} + 16x e^{4x}$$

$$y_2'' - 8y_2' + 16y_2 = \dots = 0 \quad \text{άρα η } y_2 \text{ είναι λύση}$$

Παραδείγματα

- $y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$
- $y'' - 8y' + 16y = 0 \Rightarrow r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$$

Είναι οι $y_1 = e^{4x}$ και $y_2 = x e^{4x}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις;;

$$y_2 = x e^{4x} \Rightarrow y_2' = e^{4x} + 4x e^{4x}, \quad y_2'' = 8e^{4x} + 16x e^{4x}$$

$$y_2'' - 8y_2' + 16y_2 = \dots = 0 \quad \text{άρα η } y_2 \text{ είναι λύση}$$

Αν y_1, y_2 γραμ. εξαρτημένες $\Rightarrow y_2 = C y_1 \Rightarrow x e^{4x} = C e^{4x} \Rightarrow x = C$
άτοπο.

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στη πράξη

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στη πράξη
2. Γιατί προκύπτει όμως ότι η xe^{rx} είναι λύση;

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στη πράξη
2. Γιατί προκύπτει όμως ότι η xe^{rx} είναι λύση;
 - Έστω $r_1 \neq r_2$ τότε η $\frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1}$ είναι μία λύση

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στη πράξη

2. Γιατί προκύπτει όμως ότι η xe^{rx} είναι λύση;

- Έστω $r_1 \neq r_2$ τότε η $\frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1}$ είναι μία λύση
- Όταν $r_1 \rightarrow r_2 (= r)$ τότε, $\frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1} \rightarrow \frac{d}{dr}[e^{rx}] = xe^{rx}$, επίσης λύση

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στη πράξη

2. Γιατί προκύπτει όμως ότι η xe^{rx} είναι λύση;

- Έστω $r_1 \neq r_2$ τότε η $\frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1}$ είναι μία λύση
- Όταν $r_1 \rightarrow r_2 (= r)$ τότε, $\frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1} \rightarrow \frac{d}{dr}[e^{rx}] = xe^{rx}$, επίσης λύση

Άσκηση Εναλλακτικά αποδείξτε ότι αν έχουμε διπλή ρίζα η $y_2 = xe^{rx}$ είναι λύση της $ar^2 + br + c = 0$ με χρήση της άσκησης στη σελίδα 11.

Παράδειγμα

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1/2$.

Άρα η **γενική λύση** είναι

$$y = C_1 e^{t/2} + C_2 t e^{t/2}$$

Παράδειγμα

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1/2$.

Άρα η **γενική λύση** είναι

$$y = C_1 e^{t/2} + C_2 t e^{t/2}$$

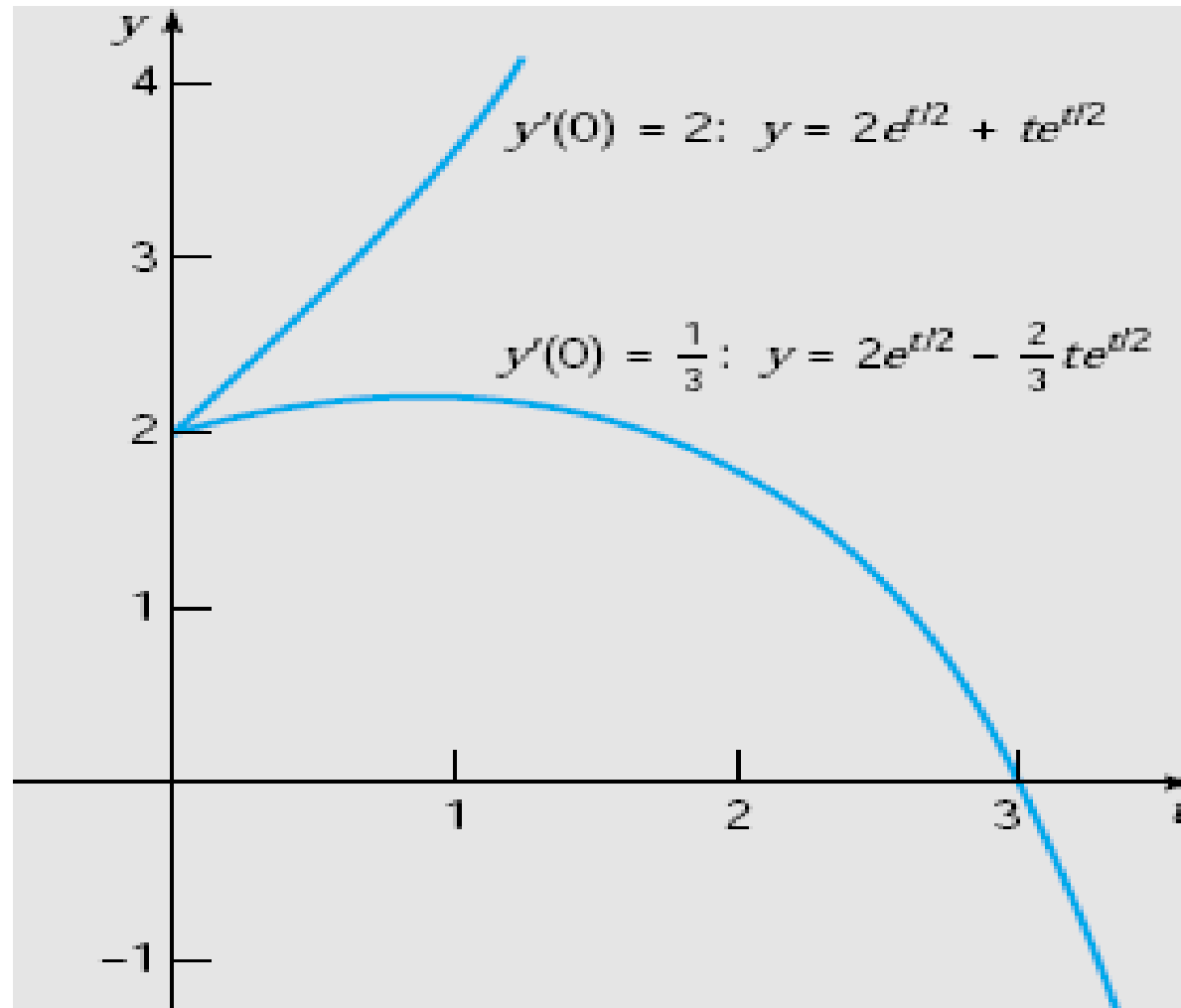
Η πρώτη συνθήκη απαιτεί $y(0) = C_1 = 2$

Παραγωγίζοντας τη λύση, η δεύτερη συνθήκη απαιτεί

$$y'(0) = \frac{1}{2}C_1 + C_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow C_2 = -2/3$$

Άρα η **ειδική λύση**

$$y = 2e^{t/2} - \frac{2}{3}te^{t/2}$$



Υπάρχει μία **κρίσιμη αρχική κλίση**, $y'(0) = y_0$, με τιμή μεταξύ $1/3$ και 2 , και αυτή διαχωρίζει τις λύσεις που αυξάνονται θετικά από αυτές που τελικά γίνονται αρνητικές.

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \quad \text{Taylor στο } x = 0$$

Τύπος του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{και} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \quad \text{Taylor στο } x = 0$$

Τύπος του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{και} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Ταυτότητες

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Μιγαδικοί αριθμοί & ο τύπος του Euler

$$a + bi \in \mathbb{C}, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \quad \text{Taylor στο } x = 0$$

Τύπος του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{και} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Ταυτότητες

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i(2\theta)} = (e^{i\theta})^2 \Rightarrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{και} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε.

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε.

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε.

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Θέτοντας $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ και $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ έχουμε (από Euler)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Μεθοδολογία (συνέχεια)-Μιγαδικές Ρίζες

Χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε.

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \mu\epsilon \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Θέτοντας $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ και $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ έχουμε (από Euler)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Κάθε γραμ. συνδυασμός λύσεων είναι και αυτός λύση

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Θεώρημα

Θεώρημα Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της Δ.Ε.

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

είναι οι $\alpha \pm \beta i$ τότε η γενική της λύση είναι:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Παράδειγμα Ι

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 2r + 5 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις

$$r_1 = -1 + 2i, \quad r_2 = -1 - 2i.$$

Η **γενική λύση** της Δ.Ε. είναι η

$$y = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x).$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 2r + 5 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις

$$r_1 = -1 + 2i, \quad r_2 = -1 - 2i.$$

Η **γενική λύση** της Δ.Ε. είναι η

$$y = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x).$$

Για την **ειδική λύση** θα χρησιμοποιήσουμε $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

Από $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Από

$y'(x) = 2C_2 e^{-x} \cos(2x) - C_2 e^{-x} \sin(2x)$ και τη συνθήκη $y'(0) = 1$ παίρνουμε

$$1 = 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

Επομένως η λύση (για τις δοσμένες αρχ. τιμές) είναι $y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x)$.

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 3$.

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 3$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 9 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 3i$ και $r_2 = -3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Παράδειγμα II

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 3$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 + 9 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 3i$ και $r_2 = -3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Για να βρούμε την ειδική λύση

από την $y(0) = 0$ παίρνουμε $0 = C_1$

από την $y'(0) = 3$ παίρνουμε $3 = 3C_2$.

Επομένως η ειδική λύση είναι η

$$y = \sin(3x).$$

Παράδειγμα III

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $16r^2 - 8r + 145$, η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 1/4 \pm 3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 e^{t/4} \cos(3t) + C_2 e^{t/4} \sin(3t).$$

Παράδειγμα III

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $16r^2 - 8r + 145$, η οποία έχει λύσεις τις $r_1 = 1/4 \pm 3i$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = C_1 e^{t/4} \cos(3t) + C_2 e^{t/4} \sin(3t).$$

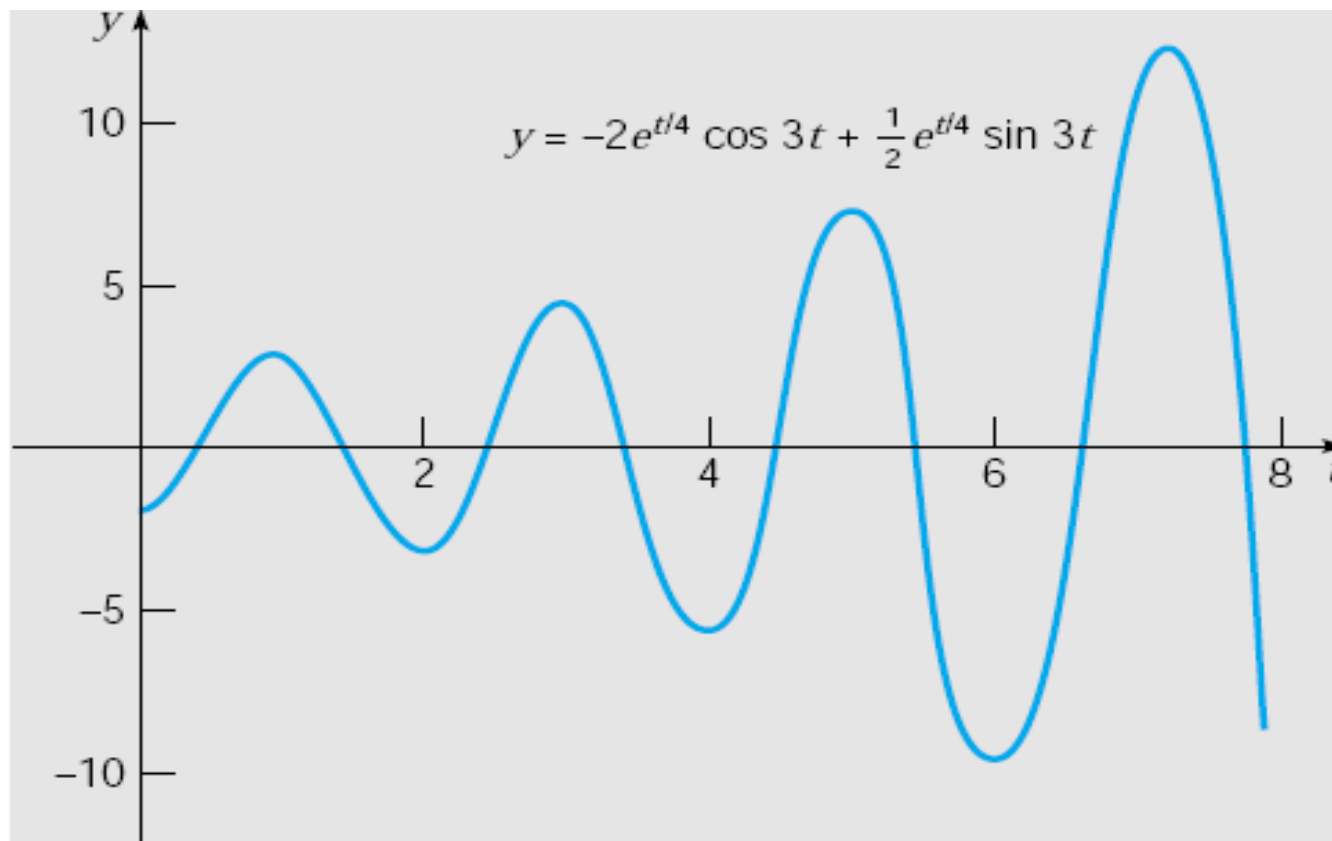
Για να βρούμε την ειδική λύση

από την $y(0) = -2$ παίρνουμε $C_1 = -2$

από την $y'(0) = 1$ παίρνουμε $C_2 = 1/2$.

Επομένως η ειδική λύση είναι η

$$y = -2e^{t/4} \cos(3t) + \frac{1}{2}e^{t/4} \sin(3t).$$



Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι αύξουσες ταλαντώσεις (λόγω του $\alpha = 1/4 > 0$).

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$$

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 + C_3$$

$$2 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3$$

$$3 = y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3$$

$$C_1 = -1/4, C_2 = 1 \text{ και } C_3 = 1/4$$

Ιβ. Ομογενής Σ.Δ.Ε ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Παράδειγμα Ι

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$$

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 + C_3$$

$$2 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3$$

$$3 = y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3$$

$$C_1 = -1/4, C_2 = 1 \text{ και } C_3 = 1/4$$

$$y = \frac{1}{4}e^{-x} + e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r - 1)^3 = 0$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1)^3 = 0$$

$$y = \overbrace{(c_0 + c_1x + c_2x^2)e^x}^{\text{όροι προερχόμενοι από την } r=1} + \underbrace{c_4}_{\text{από την } r=0}.$$

Παράδειγμα II

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1)^3 = 0$$

$$y = \overbrace{(c_0 + c_1x + c_2x^2)e^x}^{\text{όροι προερχόμενοι από την } r=1} + \underbrace{c_4}_{\text{από την } r=0}.$$

Αν προκύψουν μιγαδικές ρίζες (πάντα σε ζεύγη $r = \alpha \pm \beta i$)

$$(c_0 + c_1x + \cdots + c_{k-1}x^k)e^{\alpha x} \cos \beta x + (d_0 + d_1x + \cdots + d_{k-1}x^k)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

όπου $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ και $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$ είναι τυχαίες σταθερές.

Παράδειγμα III

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Παράδειγμα III

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = 0,$$

$$(r^2 - 2r + 2)^2 = 0,$$

$$((r - 1)^2 + 1)^2 = 0$$

Οι ρίζες $1 \pm i$, με πολλαπλότητα 2, άρα

Παράδειγμα III

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = 0,$$

$$(r^2 - 2r + 2)^2 = 0,$$

$$((r - 1)^2 + 1)^2 = 0$$

Οι ρίζες $1 \pm i$, με πολλαπλότητα 2, άρα

$$y = (c_0 + c_1x)e^x \cos x + (d_0 + d_1x)e^x \sin x$$