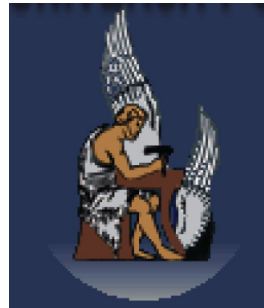


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 4η



Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2018

Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις 1ης Τάξης (συνέχεια)

Ακριβείς Δ.Ε. & Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Για την γενική περίπτωση όπου η Δ.Ε. 1ης τάξης είναι της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

Ακριβείς Δ.Ε. & Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Για την γενική περίπτωση όπου η Δ.Ε. 1ης τάξης είναι της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

Ας θυμηθούμε, από το λογισμό, ότι αν $g(t) = u(x(t), y(t))$ τότε

$$g'(t) = \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}.$$

Ιδιαίτερα αν έχουμε την $g(x) = u(x, y(x))$ τότε

$$g'(x) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} y'$$

.

Ακριβείς Δ.Ε. & Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Για την γενική περίπτωση όπου η Δ.Ε. 1ης τάξης είναι της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

Ας θυμηθούμε, από το λογισμό, ότι αν $g(t) = u(x(t), y(t))$ τότε

$$g'(t) = \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}.$$

Ιδιαίτερα αν έχουμε την $g(x) = u(x, y(x))$ τότε

$$g'(x) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} y'$$

Αν μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $u(x, y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

θα έχουμε ότι:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}y' = [u(x, y)]' = 0 \quad (2)$$

και η παραπάνω Δ.Ε. έχει λύση τη $u(x, y) = C$!!!

θα έχουμε ότι:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}y' = [u(x, y)]' = 0 \quad (2)$$

και η παραπάνω Δ.Ε. έχει λύση τη $u(x, y) = C$!!!

Ορισμός Η πρώτης τάξης Δ.Ε. (1) ονομάζεται **ακριβής** (ή **πλήρης**) αν υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

θα έχουμε ότι:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}y' = [u(x, y)]' = 0 \quad (2)$$

και η παραπάνω Δ.Ε. έχει λύση τη $u(x, y) = C$!!!

Ορισμός Η πρώτης τάξης Δ.Ε. (1) ονομάζεται **ακριβής** (ή **πλήρης**) αν υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Θεώρημα: Έστω $M(x, y), N(x, y)$ ορισμένες και συνεχείς σε ένα παραλληλόγραμμο R και επιπλέον οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y), \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ στο $\mathbb{R}$. Τότε **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να είναι η Δ.Ε. (1) ακριβής Δ.Ε. είναι να ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in R. \quad (3)$$

Η συνθήκη (3) θα μας δώσει και τη μέθοδο λύσης.

Μεθοδολογία Επίλυσης

Βήμα 1 Εξετάζουμε αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$. Αν ναι, τότε θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Μεθοδολογία Επίλυσης

Βήμα 1 Εξετάζουμε αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$. Αν ναι, τότε θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Βήμα 2 Ολοκληρώνουμε την $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ ως προς x και παίρνουμε

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) = \phi(x, y) + g(y)$$

Μεθοδολογία Επίλυσης

Βήμα 1 Εξετάζουμε αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$. Αν ναι, τότε θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Βήμα 2 Ολοκληρώνουμε την $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ ως προς x και παίρνουμε

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) = \phi(x, y) + g(y)$$

Βήμα 3 Βρίσκουμε τη συνάρτηση $g(y)$. Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς y , και λόγω ότι θέλουμε $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$ έχουμε

$$N(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} + g'(y).$$

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς $g'(y)$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε μια συνάρτηση $g_0(y)$ που την ικανοποιεί.

Τέλος έχουμε ότι η $u(x, y) = \phi(x, y) + g_0(y) = C$ είναι λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα I

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$3x(xy - 2) + (x^3 + 2y)y' = 0.$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3),

$$M(x, y) = 3x(xy - 2) = 3x^2y - 6x \Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^2 \text{ και}$$

$$N(x, y) = x^3 + 2y \Rightarrow \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 3x^2.$$

άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = c$.

Παράδειγμα Ι

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$3x(xy - 2) + (x^3 + 2y)y' = 0.$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3),

$$M(x, y) = 3x(xy - 2) = 3x^2y - 6x \Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^2 \text{ και}$$

$$N(x, y) = x^3 + 2y \Rightarrow \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 3x^2.$$

άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = c$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = x^3y - 3x^2 + g(y).$$

Παράδειγμα Ι

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$3x(xy - 2) + (x^3 + 2y)y' = 0.$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3),

$$M(x, y) = 3x(xy - 2) = 3x^2y - 6x \Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^2 \text{ και}$$

$$N(x, y) = x^3 + 2y \Rightarrow \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 3x^2.$$

άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = c$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = x^3y - 3x^2 + g(y).$$

Βήμα 3 Παραγωγίζουμε την $u(x, y) = x^3y - 3x^2 + g(y)$ ως προς y και εφόσον $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = x^3 + 2y \Rightarrow$

$$x^3 + 2y = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^3 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2$$

Έχουμε ότι $u(x, y) = x^3y - 3x^2 + y^2 = C$ είναι λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα II

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\ln(x) - 2)y' = 0, \quad x > 0,$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}$ και $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$.
άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = C$.

Παράδειγμα II

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\ln(x) - 2)y' = 0, \quad x > 0,$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}$ και $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$.
άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = C$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = y \ln(x) + 3x^2 + g(y).$$

Παράδειγμα II

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\ln(x) - 2)y' = 0, \quad x > 0,$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}$ και $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$.
άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = C$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = y \ln(x) + 3x^2 + g(y).$$

Βήμα 3 Παραγωγίζουμε την $u(x, y) = y \ln(x) + 3x^2 + g(y)$ ως προς y
και εφόσον $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x, y) = \ln(x) - 2 \Rightarrow$

$$\ln(x) - 2 = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \ln(x) + g'(y) \Rightarrow g'(y) = -2 \Rightarrow g(y) = -2y$$

Έχουμε ότι $u(x, y) = y \ln(x) + 3x^2 - 2y = C$ είναι λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα δεν $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα δεν $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παρόλα αυτά αν πολ/σω τη Δ.Ε. με $1/x^2$

$$\frac{-y}{x^2} + \frac{1}{x}y' = 0$$

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα δεν $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παρ' όλα αυτά αν πολ/σω τη Δ.Ε. με $1/x^2$

$$\frac{-y}{x^2} + \frac{1}{x}y' = 0$$

η $u(x, y) = y/x = C$ είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα δεν $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παρ' όλα αυτά αν πολ/σω τη Δ.Ε. με $1/x^2$

$$\frac{-y}{x^2} + \frac{1}{x}y' = 0$$

η $u(x, y) = y/x = C$ είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Μπορώ να πάρω ακριβή Δ.Ε. και αν πολ/σω με

$$1/y^2, \quad 1/(xy), \quad 1/(x^2 + y^2)$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ για όλα τα (x, y) .

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ για όλα τα (x, y) .

- Υπάρχει μια συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε η ΔΕ

$$f(x, y)M(x, y) + f(x, y)N(x, y)y' = 0$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ για όλα τα (x, y) .

- Υπάρχει μια συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε η ΔΕ

$$f(x, y)M(x, y) + f(x, y)N(x, y)y' = 0$$

να είναι ακριβής; δηλ. να ισχύει $\frac{\partial(fM)}{\partial y} = \frac{\partial(fN)}{\partial x}$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ για όλα τα (x, y) .

- Υπάρχει μια συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε η ΔΕ

$$f(x, y)M(x, y) + f(x, y)N(x, y)y' = 0$$

να είναι ακριβής; δηλ. να ισχύει $\frac{\partial(fM)}{\partial y} = \frac{\partial(fN)}{\partial x}$

- Περιοριζόμαστε στις (ειδικές) περιπτώσεις όπου η $f(x, y)$ είναι μόνο συνάρτηση του x ή μόνο του y .

Αν $f(x, y) \equiv f(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x)$ τότε ...

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

...

$$\text{Αν } f(x, y) \equiv f(x) \Rightarrow \frac{\partial f M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f N}{\partial x}(x, y) \Rightarrow$$
$$M(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + f(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1)$$

Η (1) παίρνει τη μορφή

$$f(x) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = N(x, y) f'(x) + f(x) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \Rightarrow$$
$$N(x, y) f'(x) = f(x) \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right), \quad (2)$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

...

$$\text{Αν } f(x, y) \equiv f(x) \Rightarrow \frac{\partial f M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f N}{\partial x}(x, y) \Rightarrow$$
$$M(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + f(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1)$$

Η (1) παίρνει τη μορφή

$$f(x) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = N(x, y) f'(x) + f(x) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \Rightarrow$$
$$N(x, y) f'(x) = f(x) \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right), \quad (2)$$

και αν το δεξί μέλος είναι συνάρτηση του x

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \Rightarrow \quad (3)$$

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) dx} \quad (4)$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

Θεώρημα 1 Εάν στην εξίσωση $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ ισχύει ότι η συνάρτηση $\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$ είναι **συνάρτηση μόνο του x** , τότε η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα $f(x)$ ο οποίος δίνεται από

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) dx}.$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

Θεώρημα 1 Εάν στην εξίσωση $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ ισχύει ότι η συνάρτηση $\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$ είναι **συνάρτηση μόνο του x** , τότε η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα $f(x)$ ο οποίος δίνεται από

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) dx}.$$

Θεώρημα 2 Εάν στην εξίσωση $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ ισχύει ότι η συνάρτηση $\frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right)$ είναι **συνάρτηση μόνο του y** , τότε η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα $f(y)$ της μορφής

$$f(y) = e^{\int \frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) dy}.$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ

$$e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y' = 0, \quad y(0) = -1.$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ

$$e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y' = 0, \quad y(0) = -1.$$

Ισχύει ότι $\frac{\partial(e^{x+y} + ye^y)}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} + e^y + ye^y$ και $\frac{\partial(xe^y - 1)}{\partial x} = e^y$ και επομένως η ΔΕ δεν είναι ακριβής. **Υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας;**

$$\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y}{xe^y - 1} = \frac{e^{x+y} + ye^y}{xe^y - 1}$$

που δεν είναι συνάρτηση μόνο του x . Εξετάζουμε αν ισχύει το **Θεώρημα 2**.
Έχουμε

$$\frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{e^y - e^{x+y} - e^y - ye^y}{e^{x+y} + ye^y} = -1$$

και άρα υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας f που είναι συνάρτηση του y .

Από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι

$$f(y) = e^{\int (-1)dy} = e^{-y}.$$

Επομένως η παρακάτω Δ.Ε. είναι ακριβής.

$$e^{-y}(e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y') = e^x + y + (x - e^{-y})y' = 0$$

Από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι

$$f(y) = e^{\int (-1)dy} = e^{-y}.$$

Επομένως η παρακάτω Δ.Ε. είναι ακριβής.

$$e^{-y}(e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y') = e^x + y + (x - e^{-y})y' = 0$$

Βήμα 2 Ολοκληρώνοντας της $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^x + y$ ως προς x παίρνουμε

$$u(x, y) = e^x + xy + g(y).$$

Από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι

$$f(y) = e^{\int (-1)dy} = e^{-y}.$$

Επομένως η παρακάτω Δ.Ε. είναι ακριβής.

$$e^{-y}(e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y') = e^x + y + (x - e^{-y})y' = 0$$

Βήμα 2 Ολοκληρώνοντας της $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^x + y$ ως προς x παίρνουμε

$$u(x, y) = e^x + xy + g(y).$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x - e^{-y}$ παίρνουμε

$$x - e^{-y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x + g'(y) \quad \Rightarrow \quad g(y) = e^{-y}.$$

Επομένως η γενική λύση είναι η

$$u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = C. \quad (5)$$

Για να βρούμε τη λύση που ικανοποιεί την $y(0) = -1$, αντικαθιστώντας στην (5) παίρνουμε $u(0, -1) = 1 + 0 + e$ και άρα η ειδική λύση είναι η

$$u(x, y) = e^x + xy + e^y = 1 + e$$

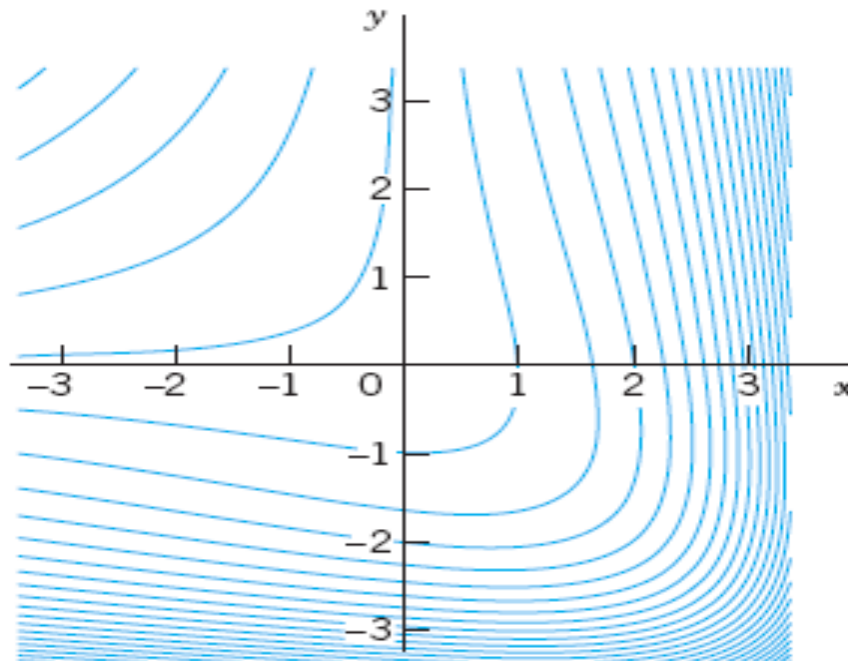
.

Επομένως η γενική λύση είναι η

$$u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = C. \quad (5)$$

Για να βρούμε τη λύση που ικανοποιεί την $y(0) = -1$, αντικαθιστώντας στην (5) παίρνουμε $u(0, -1) = 1 + 0 + e$ και άρα η ειδική λύση είναι η

$$u(x, y) = e^x + xy + e^y = 1 + e$$



Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Έχουμε $\frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = 1$ και $\frac{\partial(2xy - e^{-2y})}{\partial x}(x, y) = 2y \Rightarrow$ η ΔΕ **δεν είναι ακριβής**.

Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Έχουμε $\frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = 1$ και $\frac{\partial(2xy - e^{-2y})}{\partial x}(x, y) = 2y \Rightarrow$ η ΔΕ **δεν είναι ακριβής**.

Εάν $y \neq 0$ έχουμε (από Θ.2) $\frac{1}{y}(2y - 1) = 2 - \frac{1}{y}$ συνάρτηση του y και άρα ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η

$$f(y) = e^{\int (2 - 1/y) dy} = e^{2y} / |y|.$$

Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Έχουμε $\frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = 1$ και $\frac{\partial(2xy - e^{-2y})}{\partial x}(x, y) = 2y \Rightarrow$ η ΔΕ **δεν είναι ακριβής**.

Εάν $y \neq 0$ έχουμε (από Θ.2) $\frac{1}{y}(2y - 1) = 2 - \frac{1}{y}$ συνάρτηση του y και άρα ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η

$$f(y) = e^{\int (2 - 1/y) dy} = e^{2y} / |y|.$$

Επιλέγοντας την $f(x) = e^{2y}/y$ έχουμε ότι η ακριβής Δ.Ε.

$$y \frac{e^{2y}}{y} - (2xy - e^{-2y}) \frac{e^{2y}}{y} y' = e^{2y} - (2xe^{2y} - \frac{1}{y}) y' = 0$$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Άρα η γενική λύση είναι $u(x, y) = xe^{2y} - \ln(|y|) = C$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Άρα η γενική λύση είναι $u(x, y) = xe^{2y} - \ln(|y|) = C$

Γενικές Παρατηρήσεις:

- Η λύση των γραμμικών Δ.Ε. 1ης τάξης που είδαμε

$$y' + p(x)y = f(x)$$

αποτελούν ειδική περίπτωση, με ολοκ. παράγοντα $r(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Άρα η γενική λύση είναι $u(x, y) = xe^{2y} - \ln(|y|) = C$

Γενικές Παρατηρήσεις:

- Η λύση των γραμμικών Δ.Ε. 1ης τάξης που είδαμε

$$y' + p(x)y = f(x)$$

αποτελούν ειδική περίπτωση, με ολοκ. παράγοντα $r(x) = e^{\int p(x)dx}$.

- Στις γραμμικές Δ.Ε. μπορούμε να έχουμε γενική λύση με μία αυθαίρετη σταθερά (από την οποία έπονται όλες οι λύσεις). Στις μη-γραμμικές αυτό δεν ισχύει (συνήθως έχουμε πεπλεγμένη λύση).

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - u^2} du = dx$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - u^2} du = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = x + C$$

$\Rightarrow$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - u^2} du = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = x + C$$

$$\Rightarrow \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = e^{2x+2C}$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - u^2} du = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = x + C$$

$$\Rightarrow \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = e^{2x+2C} \Rightarrow \frac{u + 1}{u - 1} = De^{2x}$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - u^2} du = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = x + C$$

$$\Rightarrow \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = e^{2x+2C} \Rightarrow \frac{u + 1}{u - 1} = De^{2x} \Rightarrow \frac{x - y + 2}{x - y} = De^{2x}$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - u^2} du = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = x + C$$

$$\Rightarrow \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = e^{2x+2C} \Rightarrow \frac{u + 1}{u - 1} = De^{2x} \Rightarrow \frac{x - y + 2}{x - y} = De^{2x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{Dxe^{2x} - x - 2}{De^{2x} - 1},$$

Αλλαγή μεταβλητών

- Αν η Δ.Ε. δεν είναι διαχωρίσιμη ούτε γραμμική
- Αν δεν μπορώ να βρώ ολοκληρωτικό παράγοντα μόνο ως προς x ή μόνο ως προς y .

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη νέα μεταβλητή $u \equiv u(x)$

$$u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - u^2} du = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = x + C$$

$$\Rightarrow \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| = e^{2x+2C} \Rightarrow \frac{u + 1}{u - 1} = De^{2x} \Rightarrow \frac{x - y + 2}{x - y} = De^{2x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{Dxe^{2x} - x - 2}{De^{2x} - 1}, \quad \text{όμως και οι } u = 1, u = -1 \text{ είναι επίσης λύσεις}$$

Για $u = 1 \Rightarrow y = x$ και για $u = -1 \Rightarrow y = x + 2$ (για $D = 0$).

Αλλαγή μεταβλητών

- Εφαρμόζεται όπως και η αντίστοιχη μεθοδολογία στο λογισμό
- Βασίζεται σε μαντεψιές (και δοκιμές)

Αλλαγή μεταβλητών

- Εφαρμόζεται όπως και η αντίστοιχη μεθοδολογία στο λογισμό
- Βασίζεται σε μαντεψιές (και δοκιμές)
- Υπάρχουν όμως και κάποιες βοηθητικές βασικές αρχές

Πίνακας 1: Μαντεψιές στην αλλαγή μεταβλητών

Όταν έχουμε στη Δ.Ε.	Δοκίμασε $u =$
yy'	y^2
y^2y'	y^3
$\cos(y)y'$	$\sin(y)$
$\sin(y)y'$	$\cos(y)$
$y'e^y$	e^y

Αλλαγή μεταβλητής - Εξισώσεις Bernoulli

Οι Δ.Ε. της παρακάτω μορφής ονομάζονται εξισώσεις Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Αλλαγή μεταβλητής - Εξισώσεις Bernoulli

Οι Δ.Ε. της παρακάτω μορφής ονομάζονται εξισώσεις Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

- Οι $p(x)$ και $q(x)$ υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις
- Για $n = 0$ ή $n = 1$ γραμμική Δ.Ε. (ξέρουμε να την λύσουμε!)

Αλλαγή μεταβλητής - Εξισώσεις Bernoulli

Οι Δ.Ε. της παρακάτω μορφής ονομάζονται εξισώσεις Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

- Οι $p(x)$ και $q(x)$ υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις
- Για $n = 0$ ή $n = 1$ γραμμική Δ.Ε. (ξέρουμε να την λύσουμε!)
- Περιγράφει την κίνηση σωματιδίου στο οποίο η επιβράδυνση στην κίνηση εξαρτάται από την ταχύτητά του (το n δεν είναι απαραίτητα ακέραιος)

Αλλαγή μεταβλητής - Εξισώσεις Bernoulli

Οι Δ.Ε. της παρακάτω μορφής ονομάζονται εξισώσεις Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

- Οι $p(x)$ και $q(x)$ υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις
- Για $n = 0$ ή $n = 1$ γραμμική Δ.Ε. (ξέρουμε να την λύσουμε!)
- Περιγράφει την κίνηση σωματιδίου στο οποίο η επιβράδυνση στην κίνηση εξαρτάται από την ταχύτητά του (το n δεν είναι απαραίτητα ακέραιος)
- Αλλαγή μεταβλητής για μετατροπή σε γραμμική Δ.Ε.

$$u = y^{1-n}$$

Παράδειγμα I-Bernoulli

$$xy' + y(x + 1) + xy^5 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Παράδειγμα I-Bernoulli

$$xy' + y(x + 1) + xy^5 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-5} = y^{-4}$$

Παράδειγμα I-Bernoulli

$$xy' + y(x + 1) + xy^5 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-5} = y^{-4} \Rightarrow u' = -4y^{-5}y'$$

Παράδειγμα I-Bernoulli

$$xy' + y(x + 1) + xy^5 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-5} = y^{-4} \Rightarrow u' = -4y^{-5}y' \Rightarrow y' = \frac{-y^5}{4}u'$$

Παράδειγμα I-Bernoulli

$$xy' + y(x + 1) + xy^5 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-5} = y^{-4} \Rightarrow u' = -4y^{-5}y' \Rightarrow y' = \frac{-y^5}{4}u'$$

$$(1) \Rightarrow \frac{-xy^5}{4}u' + y(x + 1) + xy^5 = 0 \Rightarrow \frac{-x}{4}u' + y^{-4}(x + 1) + x = 0$$

Παράδειγμα I-Bernoulli

$$xy' + y(x + 1) + xy^5 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-5} = y^{-4} \Rightarrow u' = -4y^{-5}y' \Rightarrow y' = \frac{-y^5}{4}u'$$

$$(1) \Rightarrow \frac{-xy^5}{4}u' + y(x + 1) + xy^5 = 0 \Rightarrow \frac{-x}{4}u' + y^{-4}(x + 1) + x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{4}u' + u(x + 1) + x = 0 \Rightarrow u' + \frac{4(x + 1)}{x}u = 4$$

Παράδειγμα I-Bernoulli

$$xy' + y(x + 1) + xy^5 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-5} = y^{-4} \Rightarrow u' = -4y^{-5}y' \Rightarrow y' = \frac{-y^5}{4}u'$$

$$(1) \Rightarrow \frac{-xy^5}{4}u' + y(x + 1) + xy^5 = 0 \Rightarrow \frac{-x}{4}u' + y^{-4}(x + 1) + x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{4}u' + u(x + 1) + x = 0 \Rightarrow u' + \frac{4(x + 1)}{x}u = 4$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας

$$r(x) = \exp \left(\int \frac{-4(x + 1)}{x} dx \right) = e^{-4x - 4 \ln(x)} = e^{-4x} x^{-4} = \frac{e^{-4x}}{x^4}$$

Παράδειγμα I-Bernoulli (συνέχεια)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-4x}}{x^4} u \right] = 4 \frac{e^{-4x}}{x^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-4x}}{x^4} u = \int_{x_0=1}^x 4 \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1$$

Παράδειγμα I-Bernoulli (συνέχεια)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-4x}}{x^4} u \right] = 4 \frac{e^{-4x}}{x^4} \Rightarrow \frac{e^{-4x}}{x^4} u = \int_{x_0=1}^x 4 \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1$$

$$\Rightarrow u = e^{4x} x^4 \left(\int_{x_0=1}^x 4 \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1 \right)$$

Παράδειγμα I-Bernoulli (συνέχεια)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-4x}}{x^4} u \right] = 4 \frac{e^{-4x}}{x^4} \Rightarrow \frac{e^{-4x}}{x^4} u = \int_{x_0=1}^x 4 \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1$$

$$\Rightarrow u = e^{4x} x^4 \left(\int_{x_0=1}^x 4 \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1 \right)$$

$$y^{-4} = e^{4x} x^4 \left(4 \int_{x_0=1}^x \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1 \right)$$

Παράδειγμα I-Bernoulli (συνέχεια)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-4x}}{x^4} u \right] = 4 \frac{e^{-4x}}{x^4} \Rightarrow \frac{e^{-4x}}{x^4} u = \int_{x_0=1}^x 4 \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1$$

$$\Rightarrow u = e^{4x} x^4 \left(\int_{x_0=1}^x 4 \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1 \right)$$

$$y^{-4} = e^{4x} x^4 \left(4 \int_{x_0=1}^x \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1 \right)$$

$$y = \frac{e^{-x}}{x \left(4 \int_{x_0=1}^x \frac{e^{-4s}}{s^4} ds + 1 \right)^{1/4}}$$

Παράδειγμα II-Bernoulli

$$y' - y \tan(x) + \cos(x)y^2 = 0$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-2} = y^{-1}$$

Παράδειγμα II-Bernoulli

$$y' - y \tan(x) + \cos(x)y^2 = 0$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$$

Παράδειγμα II-Bernoulli

$$y' - y \tan(x) + \cos(x)y^2 = 0$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y' \Rightarrow y' = -y^2u'$$

Παράδειγμα II-Bernoulli

$$y' - y \tan(x) + \cos(x)y^2 = 0$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y' \Rightarrow y' = -y^2u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική

$$u' + \tan(x)u = -\cos(x)$$

Παράδειγμα II-Bernoulli

$$y' - y \tan(x) + \cos(x)y^2 = 0$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y' \Rightarrow y' = -y^2u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική

$$u' + \tan(x)u = -\cos(x)$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας

$$r(x) = e^{\int \tan(x)dx} = e^{-\ln |\cos(x)|} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Παράδειγμα II-Bernoulli

$$y' - y \tan(x) + \cos(x)y^2 = 0$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y' \Rightarrow y' = -y^2u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική

$$u' + \tan(x)u = -\cos(x)$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας

$$r(x) = e^{\int \tan(x)dx} = e^{-\ln |\cos(x)|} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\frac{d}{dx} [r(x)u] = -1 \Rightarrow \frac{1}{\cos(x)}u = -x - C \Rightarrow u = -\cos(x)(x + C)$$

Παράδειγμα II-Bernoulli

$$y' - y \tan(x) + \cos(x)y^2 = 0$$

Αντικατάσταση

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y' \Rightarrow y' = -y^2u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική

$$u' + \tan(x)u = -\cos(x)$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας

$$r(x) = e^{\int \tan(x)dx} = e^{-\ln |\cos(x)|} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\frac{d}{dx} [r(x)u] = -1 \Rightarrow \frac{1}{\cos(x)}u = -x - C \Rightarrow u = -\cos(x)(x + C)$$

$$\frac{1}{y} = -\cos(x)(x + C)$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3}$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y'$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{2}y^{1/3}u'$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{2}y^{1/3}u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική:

$$u' - \frac{2}{t}u = \frac{2}{3}t^4$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3} \Rightarrow u' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y' \Rightarrow y' = \frac{3}{2}y^{1/3}u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική:

$$u' - \frac{2}{t}u = \frac{2}{3}t^4$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας :

$$r(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dx} = t^{-2}$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3} \Rightarrow u' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y' \Rightarrow y' = \frac{3}{2}y^{1/3}u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική:

$$u' - \frac{2}{t}u = \frac{2}{3}t^4$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας :

$$r(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dx} = t^{-2}$$

$$\frac{d}{dx} [r(t)u] = \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow u = \frac{2}{9}t^5 + Ct^2$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3} \Rightarrow u' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y' \Rightarrow y' = \frac{3}{2}y^{1/3}u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική:

$$u' - \frac{2}{t}u = \frac{2}{3}t^4$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας :

$$r(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dx} = t^{-2}$$

$$\frac{d}{dx} [r(t)u] = \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow u = \frac{2}{9}t^5 + Ct^2$$

$$y(t) = \left(Ct^2 + \frac{2}{9}t^5 \right)^{\frac{3}{2}}$$

Παράδειγμα III-Bernoulli

$$y' = \frac{3}{t}y + t^4 \sqrt[3]{y}$$

$$u = y^{1-1/3} = y^{2/3} \Rightarrow u' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y' \Rightarrow y' = \frac{3}{2}y^{1/3}u'$$

Η Δ.Ε. γίνεται γραμμική:

$$u' - \frac{2}{t}u = \frac{2}{3}t^4$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας :

$$r(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dx} = t^{-2}$$

$$\frac{d}{dx} [r(t)u] = \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow u = \frac{2}{9}t^5 + Ct^2$$

$$y(t) = \left(Ct^2 + \frac{2}{9}t^5 \right)^{\frac{3}{2}}$$

Άσκηση: Να λυθεί η ΔΕ, $y' - \frac{1}{3t}y = \frac{t}{3y}$, $t > 0$

(Άσκηση) Παράδειγμα IV -Bernoulli

$$y' = \frac{1}{xy + x^2y^3}, \quad y > 0$$

(Άσκηση) Παράδειγμα IV -Bernoulli

$$y' = \frac{1}{xy + x^2y^3}, \quad y > 0$$

Από το Θ . αντίστροφης συνάρτησης η ΔΕ γράφεται ως

$$\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$$

άρα είναι ΔΕ Bernoulli με $n = 3$ για τη συνάρτηση $x(y)$.

(Άσκηση) Παράδειγμα IV -Bernoulli

$$y' = \frac{1}{xy + x^2y^3}, \quad y > 0$$

Από το Θ . αντίστροφης συνάρτησης η ΔΕ γράφεται ως

$$\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$$

άρα είναι ΔΕ Bernoulli με $n = 3$ για τη συνάρτηση $x(y)$.

Αλλαγή μεταβλητής

$$u(y) = x^{1-2} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = -x^2 \frac{dx}{dy}$$

δίνει τη γραμμική ΔΕ για τη $u(y)$

$$\frac{du}{dy} + yu = -y^3 \dots\dots$$

.....

Αλλαγή μεταβλητής—Εξισώσεις Riccati

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

και έστω μία γνωστή ειδική λύση της, η $y_1(x)$.

Αλλαγή μεταβλητής—Εξισώσεις Riccati

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

και **έστω μία γνωστή ειδική λύση της**, η $y_1(x)$.

Αν θέσουμε $u(x) = y(x) - y_1(x)$ τότε η Δ.Ε. μετασχηματίζεται σε Bernoulli!

Αλλαγή μεταβλητής—Εξισώσεις Riccati

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

και **έστω μία γνωστή ειδική λύση της**, η $y_1(x)$.

Αν θέσουμε $u(x) = y(x) - y_1(x)$ τότε η Δ.Ε. μετασχηματίζεται σε Bernoulli!
Έχουμε

$$y'(x) = u'(x) + y_1'(x) \quad \text{και} \quad y_1' = q_1(x) + q_2(x)y_1 + q_3(x)y_1^2$$

Αλλαγή μεταβλητής—Εξισώσεις Riccati

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

και **έστω μία γνωστή ειδική λύση της**, η $y_1(x)$.

Αν θέσουμε $u(x) = y(x) - y_1(x)$ τότε η Δ.Ε. μετασχηματίζεται σε Bernoulli!
Έχουμε

$$y'(x) = u'(x) + y_1'(x) \quad \text{και} \quad y_1' = q_1(x) + q_2(x)y_1 + q_3(x)y_1^2$$

$$u' + y_1' = q_1(x) + q_2(x)(u + y_1) + q_3(x)(u + y_1)^2$$

Αλλαγή μεταβλητής—Εξισώσεις Riccati

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

και **έστω μία γνωστή ειδική λύση της**, η $y_1(x)$.

Αν θέσουμε $u(x) = y(x) - y_1(x)$ τότε η Δ.Ε. μετασχηματίζεται σε Bernoulli!
Έχουμε

$$y'(x) = u'(x) + y_1'(x) \quad \text{και} \quad y_1' = q_1(x) + q_2(x)y_1 + q_3(x)y_1^2$$

$$u' + y_1' = q_1(x) + q_2(x)(u + y_1) + q_3(x)(u + y_1)^2$$

$$\Rightarrow u' = q_3(x)u^2 + 2q_3(x)uy_1 + q_2(x)u$$

$$\Rightarrow u' + \underbrace{[-2q_3(x)y_1 - q_2(x)]}_{p(x)} u = \underbrace{q_3(x)}_{q(x)} u^2$$

Παράδειγμα -Riccati

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4$, όταν μία λύση της $y_1(x)=x^2$.

Παράδειγμα -Riccati

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4$, όταν μία λύση της $y_1(x)=x^2$.

Λύση: $x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} = 2x$ (στη μορφή Riccati). θέτουμε $u(x) = y(x) - y_1(x) = y(x) - x^2$ και έχουμε

Παράδειγμα -Riccati

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4$, όταν μία λύση της $y_1(x)=x^2$.

Λύση: $x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} = 2x$ (στη μορφή Riccati). θέτουμε $u(x) = y(x) - y_1(x) = y(x) - x^2$ και έχουμε

$$(x^2 + u)' + \frac{x^2 + u}{x} - \frac{(x^2 + u)^2}{x^3} = 2x \Rightarrow$$

$$\cancel{2x} + u' + x + \frac{u}{x} - \frac{x^4 + 2ux^2 + u^2}{x^3} - \cancel{2x} = 0 \Rightarrow$$

$$u' + x + \frac{u}{x} - x - \frac{2u}{x} - \frac{u^2}{x^3} = 0 \Rightarrow u' - \frac{u}{x} = \frac{u^2}{x^3} \quad (\text{Bernoulli})$$

Παράδειγμα -Riccati

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^3 y' + x^2 y - y^2 = 2x^4$, όταν μία λύση της $y_1(x) = x^2$.

Λύση: $x^3 y' + x^2 y - y^2 = 2x^4 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} = 2x$ (στη μορφή Riccati). θέτουμε $u(x) = y(x) - y_1(x) = y(x) - x^2$ και έχουμε

$$\begin{aligned} (x^2 + u)' + \frac{x^2 + u}{x} - \frac{(x^2 + u)^2}{x^3} &= 2x \Rightarrow \\ \cancel{2x} + u' + x + \frac{u}{x} - \frac{x^4 + 2ux^2 + u^2}{x^3} - \cancel{2x} &= 0 \Rightarrow \\ u' + x + \frac{u}{x} - x - \frac{2u}{x} - \frac{u^2}{x^3} &= 0 \Rightarrow u' - \frac{u}{x} = \frac{u^2}{x^3} \quad (\text{Bernoulli}) \end{aligned}$$

Αντικατάσταση $z = u^{-1}$ δίνει $z' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ άρα

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{xu} = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^3} \quad (\text{γραμμική})$$

Παράδειγμα -Riccati

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^3 y' + x^2 y - y^2 = 2x^4$, όταν μία λύση της $y_1(x) = x^2$.

Λύση: $x^3 y' + x^2 y - y^2 = 2x^4 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} = 2x$ (στη μορφή Riccati). θέτουμε $u(x) = y(x) - y_1(x) = y(x) - x^2$ και έχουμε

$$(x^2 + u)' + \frac{x^2 + u}{x} - \frac{(x^2 + u)^2}{x^3} = 2x \Rightarrow$$

$$\cancel{2x} + u' + x + \frac{u}{x} - \frac{x^4 + 2ux^2 + u^2}{x^3} - \cancel{2x} = 0 \Rightarrow$$

$$u' + x + \frac{u}{x} - x - \frac{2u}{x} - \frac{u^2}{x^3} = 0 \Rightarrow u' - \frac{u}{x} = \frac{u^2}{x^3} \quad (\text{Bernoulli})$$

Αντικατάσταση $z = u^{-1}$ δίνει $z' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ άρα

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{xu} = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^3} \quad (\text{γραμμική})$$

Παράδειγμα -Riccati (συνέχεια)

Ολοκληρωτικός παράγοντας $r(x) = e^{\int 1/x dx} = e^{\ln |x|} = |x|$ άρα

$$\frac{d}{dx}[r(x)z] = -\frac{x}{x^3} \Rightarrow xz = -\int 1/x^2 + C \Rightarrow z = \frac{Cx + 1}{x^2}$$

Εφόσον $z = 1/u$ έχουμε

$$u(x) = \frac{x^2}{Cx + 1}$$

Παράδειγμα -Riccati (συνέχεια)

Ολοκληρωτικός παράγοντας $r(x) = e^{\int 1/x dx} = e^{\ln |x|} = |x|$ άρα

$$\frac{d}{dx}[r(x)z] = -\frac{x}{x^3} \Rightarrow xz = -\int 1/x^2 + C \Rightarrow z = \frac{Cx + 1}{x^2}$$

Εφόσον $z = 1/u$ έχουμε

$$u(x) = \frac{x^2}{Cx + 1}$$

Και τελικά η λύση της Δ.Ε.

$$y = u + y_1 = x^2 + \frac{x^2}{Cx + 1} = \frac{Cx + 2x^2}{Cx + 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ασκήσεις Riccati

- $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2; \quad y_1(t) = t$
- $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2; \quad y_1(t) = \frac{1}{t}$
- $y' = (y - x)^2 + 1; \quad y_1(x) = x; \quad y(0) = \frac{1}{2}$
- $y' - (2x^3 + 1)y = -x^2y^2 - x^4 - x + 1; \quad y_1(x) = x.$

Αλλαγή μεταβλητής - Ομογενείς Εξισώσεις 1ης τάξης¹

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

¹Προσοχή όχι ο ορισμός ομογενούς Δ.Ε. που είδαμε στα προηγούμενα

Αλλαγή μεταβλητής - Ομογενείς Εξισώσεις 1ης τάξης¹

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Μετασχηματισμός (για να μετατραπούν σε διαχωρίσιμες)

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu'$$

¹Προσοχή όχι ο ορισμός ομογενούς Δ.Ε. που είδαμε στα προηγούμενα

Αλλαγή μεταβλητής - Ομογενείς Εξισώσεις 1ης τάξης¹

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Μετασχηματισμός (για να μετατραπούν σε διαχωρίσιμες)

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu'$$

$$u + xu' = F(u) \quad \Rightarrow \quad xu' = F(u) - u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{F(u) - u} = \frac{1}{x}$$

¹Προσοχή όχι ο ορισμός ομογενούς Δ.Ε. που είδαμε στα προηγούμενα

Αλλαγή μεταβλητής - Ομογενείς Εξισώσεις 1ης τάξης¹

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Μετασχηματισμός (για να μετατραπούν σε διαχωρίσιμες)

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu'$$

$$u + xu' = F(u) \quad \Rightarrow \quad xu' = F(u) - u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{F(u) - u} = \frac{1}{x}$$

Έμμεση λύση

$$\int \frac{1}{F(u) - u} dv = \ln |x| + C$$

¹Προσοχή όχι ο ορισμός ομογενούς Δ.Ε. που είδαμε στα προηγούμενα

Παράδειγμα-Ομογενείς Εξισώσεις

$$x^2 y' = y^2 + xy, \quad y(1) = 1$$

Παράδειγμα-Ομογενείς Εξισώσεις

$$x^2 y' = y^2 + xy, \quad y(1) = 1$$

$$y' = (y/x)^2 + y/x \quad \text{άρα για } u = y/x \quad \text{η Δ.Ε. είναι}$$
$$xu' = u^2 + u - u = u^2,$$

Παράδειγμα-Ομογενείς Εξισώσεις

$$x^2 y' = y^2 + xy, \quad y(1) = 1$$

$$y' = (y/x)^2 + y/x \quad \text{άρα για } u = y/x \quad \text{η Δ.Ε. είναι}$$
$$xu' = u^2 + u - u = u^2,$$

$$\int \frac{1}{u^2} = \ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{u} = \ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-1}{\ln |x| + C}$$

Παράδειγμα-Ομογενείς Εξισώσεις

$$x^2 y' = y^2 + xy, \quad y(1) = 1$$

$$y' = (y/x)^2 + y/x \quad \text{άρα για } u = y/x \quad \text{η Δ.Ε. είναι}$$
$$xu' = u^2 + u - u = u^2,$$

$$\int \frac{1}{u^2} = \ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{u} = \ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-1}{\ln |x| + C}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-x}{\ln |x| + C}$$

Παράδειγμα-Ομογενείς Εξισώσεις

$$x^2 y' = y^2 + xy, \quad y(1) = 1$$

$$y' = (y/x)^2 + y/x \quad \text{άρα για } u = y/x \quad \text{η Δ.Ε. είναι}$$
$$xu' = u^2 + u - u = u^2,$$

$$\int \frac{1}{u^2} = \ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{u} = \ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-1}{\ln |x| + C}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-x}{\ln |x| + C}$$

$$\text{Από } y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-1}{\ln |1| + C} = \frac{-1}{C} \quad \text{άρα η λύση}$$

$$y = \frac{-x}{\ln |x| - 1}$$

Γενίκευση-Ομογενείς Εξισώσεις

Ορισμός : Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενείς βαθμού k εάν

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad \forall x, y, \forall \lambda \neq 0.$$

Γενίκευση-Ομογενείς Εξισώσεις

Ορισμός : Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενείς βαθμού k εάν

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad \forall x, y, \forall \lambda \neq 0.$$

Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ομογενής βαθμού 0, τότε η $f(x, y)$ είναι συνάρτηση του y/x

Γενίκευση-Ομογενείς Εξισώσεις

Ορισμός : Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενείς βαθμού k εάν

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad \forall x, y, \forall \lambda \neq 0.$$

Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ομογενής βαθμού 0, τότε η $f(x, y)$ είναι συνάρτηση του y/x

Συνεπώς μπορεί να γίνει η αλλαγή μεταβλητής $u = y/x$ στη $y' = f(x, y)$

Γενίκευση-Ομογενείς Εξισώσεις

Ορισμός : Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενείς βαθμού k εάν

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad \forall x, y, \forall \lambda \neq 0.$$

Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ομογενής βαθμού 0, τότε η $f(x, y)$ είναι συνάρτηση του y/x

Συνεπώς μπορεί να γίνει η αλλαγή μεταβλητής $u = y/x$ στη $y' = f(x, y)$

Παράδειγμα

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

Γενίκευση-Ομογενείς Εξισώσεις

Ορισμός : Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενείς βαθμού k εάν

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad \forall x, y, \forall \lambda \neq 0.$$

Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ομογενής βαθμού 0, τότε η $f(x, y)$ είναι συνάρτηση του y/x

Συνεπώς μπορεί να γίνει η αλλαγή μεταβλητής $u = y/x$ στη $y' = f(x, y)$

Παράδειγμα

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{xux}{x^2 - u^2x^2} = \frac{u}{1 - u^2}$$

Γενίκευση-Ομογενείς Εξισώσεις

Ορισμός : Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενείς βαθμού k εάν

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad \forall x, y, \forall \lambda \neq 0.$$

Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ομογενής βαθμού 0, τότε η $f(x, y)$ είναι συνάρτηση του y/x

Συνεπώς μπορεί να γίνει η αλλαγή μεταβλητής $u = y/x$ στη $y' = f(x, y)$

Παράδειγμα

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{xux}{x^2 - u^2x^2} = \frac{u}{1 - u^2}$$

και άρα έχουμε την Δ.Ε.

$$u + xu' = \frac{u}{1 - u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - u^2}{u^3} u' = \frac{1}{x}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ολοκληρώνοντας

$$\int \frac{1 - u^2}{u^3} du = \int \frac{1}{x} dx + C = \ln(C_1|x|) \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \ln(C_1|x|)$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2u^2} - \ln(|u|) = \ln(C_1|x|) \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln(|C_1ux|)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = ux$ παίρνουμε $-\frac{2x}{y^2} = \ln(|C_1y|)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ολοκληρώνοντας

$$\begin{aligned}\int \frac{1-u^2}{u^3} du &= \int \frac{1}{x} dx + C = \ln(C_1|x|) \Rightarrow \\ &\int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \ln(C_1|x|) \\ \Rightarrow \frac{-1}{2u^2} - \ln(|u|) &= \ln(C_1|x|) \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln(|C_1ux|)\end{aligned}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = ux$ παίρνουμε $-\frac{2x}{y^2} = \ln(|C_1y|)$.

Επίσης στην περίπτωση που $\frac{u^3}{1-u^2} = 0 \Rightarrow u = 0$ παίρνουμε την λύση $y = 0$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ολοκληρώνοντας

$$\begin{aligned}\int \frac{1-u^2}{u^3} du &= \int \frac{1}{x} dx + C = \ln(C_1|x|) \Rightarrow \\ \int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du &= \ln(C_1|x|) \\ \Rightarrow \frac{-1}{2u^2} - \ln(|u|) &= \ln(C_1|x|) \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln(|C_1ux|)\end{aligned}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = ux$ παίρνουμε $-\frac{2x}{y^2} = \ln(|C_1y|)$.

Επίσης στην περίπτωση που $\frac{u^3}{1-u^2} = 0 \Rightarrow u = 0$ παίρνουμε την λύση $y = 0$.

Άσκηση Να λυθούν οι Δ.Ε.:

$$(a) \ y' = \frac{x+3y}{x-y}, \quad \text{και} \quad (b) \ y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

Δ.Ε. μη-γραμμικές ως προς y' (της μορφής $y' = f(t, y')$)

Συνήθως δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτική λύση, παρά μόνο σε ορισμένες κατηγορίες, π.χ.

$$y' = \cos(y') + t$$

Δ.Ε. μη-γραμμικές ως προς y' (της μορφής $y' = f(t, y')$)

Συνήθως δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτική λύση, παρά μόνο σε ορισμένες κατηγορίες, π.χ.

$$y' = \cos(y') + t$$

Θέτοντας $y' = p$ τότε $t = p - \cos(p)$ και παραγωγίζοντας ως προς y

$$\frac{dt}{dy} = \frac{dp}{dy} - \sin(p) \frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \quad p \frac{dp}{dy} (1 - \sin(p)) = 1$$

Δ.Ε. μη-γραμμικές ως προς y' (της μορφής $y' = f(t, y')$)

Συνήθως δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτική λύση, παρά μόνο σε ορισμένες κατηγορίες, π.χ.

$$y' = \cos(y') + t$$

Θέτοντας $y' = p$ τότε $t = p - \cos(p)$ και παραγωγίζοντας ως προς y

$$\frac{dt}{dy} = \frac{dp}{dy} - \sin(p) \frac{dp}{dy} \Rightarrow p \frac{dp}{dy} (1 - \sin(p)) = 1$$

είναι γραμμική ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών για την $y(p)$ δηλ.

$$\int dy = \int p (1 - \sin(p)) dp + C \Rightarrow y = p \cos(p) - \sin(p) + \frac{p^2}{2} + C$$

Η γενική λύση έχει **δύο παραμετρικές εξισώσεις** (με παράμετρο p).

Απαλείφοντας την p από αυτές μπορούμε να βρούμε την γενική λύση της ΔΕ.

Δ.Ε. μη-γραμμικές ως προς y' (της μορφής $y' = f(y')$)

$$y - (y')^2 = \ln(y')$$

Δ.Ε. μη-γραμμικές ως προς y' (της μορφής $y' = f(y')$)

$$y - (y')^2 = \ln(y')$$

Θέτοντας $y' = p$ τότε $y = p^2 + \ln(p)$ και παραγωγίζοντας ως προς t

$$\frac{dy}{dt} = 2p \frac{dp}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \Rightarrow p = \left(2p + \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dt}$$

Δ.Ε. μη-γραμμικές ως προς y' (της μορφής $y' = f(y')$)

$$y - (y')^2 = \ln(y')$$

Θέτοντας $y' = p$ τότε $y = p^2 + \ln(p)$ και παραγωγίζοντας ως προς t

$$\frac{dy}{dt} = 2p \frac{dp}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \Rightarrow p = \left(2p + \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dt}$$

γραμμική χωριζομένων μεταβλητών

$$\int 1 dt = \int \left(2 + \frac{1}{p^2} \right) dp + C \Rightarrow t = 2p - \frac{1}{p} + C$$

Δ.Ε. μη-γραμμικές ως προς y' (της μορφής $y' = f(y')$)

$$y - (y')^2 = \ln(y')$$

Θέτοντας $y' = p$ τότε $y = p^2 + \ln(p)$ και παραγωγίζοντας ως προς t

$$\frac{dy}{dt} = 2p \frac{dp}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \Rightarrow p = \left(2p + \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dt}$$

γραμμική χωριζομένων μεταβλητών

$$\int 1 dt = \int \left(2 + \frac{1}{p^2} \right) dp + C \Rightarrow t = 2p - \frac{1}{p} + C$$

Ειδικές Δ.Ε. αποτελούν

- Οι εξισώσεις Clairaut $y = ty' + g(y')$, g παραγωγίσιμη συνάρτηση.
- Οι εξισώσεις Lagrange $y = t\phi(y') + g(y')$, g, ϕ παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Αυτόνομες Εξισώσεις - Ποιοτική Ανάλυση

Αυτόνομες Εξισώσεις - Ποιοτική Ανάλυση

Η παράγωγος των λύσεων εξαρτάται μόνο από την (εξαρτημένη) μεταβλητή y , δηλ.

$$y' = f(y)$$

Αυτόνομες Εξισώσεις - Ποιοτική Ανάλυση

Η παράγωγος των λύσεων εξαρτάται μόνο από την (εξαρτημένη) μεταβλητή y , δηλ.

$$y' = f(y)$$

Έχουμε δει τα μοντέλα για:

- Πρόβλημα του καφέ (νόμος μεταφοράς θερμότητας): $\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$
- Πληθυσμιακό μοντέλο: $\frac{dP}{dt} = kP - A$

Αυτόνομες Εξισώσεις - Ποιοτική Ανάλυση

Η παράγωγος των λύσεων εξαρτάται μόνο από την (εξαρτημένη) μεταβλητή y , δηλ.

$$y' = f(y)$$

Έχουμε δει τα μοντέλα για:

- Πρόβλημα του καφέ (νόμος μεταφοράς θερμότητας): $\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$
- Πληθυσμιακό μοντέλο: $\frac{dP}{dt} = kP - A$

Ορισμός 1 Τα σημεία του άξονα y στα οποία η $f(y) = 0$ λέγονται **κρίσιμα σημεία**.

Αυτόνομες Εξισώσεις - Ποιοτική Ανάλυση

Η παράγωγος των λύσεων εξαρτάται μόνο από την (εξαρτημένη) μεταβλητή y , δηλ.

$$y' = f(y)$$

Έχουμε δει τα μοντέλα για:

- Πρόβλημα του καφέ (νόμος μεταφοράς θερμότητας): $\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$
- Πληθυσμιακό μοντέλο: $\frac{dP}{dt} = kP - A$

Ορισμός 1 Τα σημεία του άξονα y στα οποία η $f(y) = 0$ λέγονται **κρίσιμα σημεία**.

Ορισμός 2 Τα κρίσιμα σημεία αποτελούν λύσεις των αυτόνομων εξισώσεων και λέγονται **λύσεις ισορροπίας**.

Αυτόνομες Εξισώσεις - Ποιοτική Ανάλυση

Η παράγωγος των λύσεων εξαρτάται μόνο από την (εξαρτημένη) μεταβλητή y , δηλ.

$$y' = f(y)$$

Έχουμε δει τα μοντέλα για:

- Πρόβλημα του καφέ (νόμος μεταφοράς θερμότητας): $\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$
- Πληθυσμιακό μοντέλο: $\frac{dP}{dt} = kP - A$

Ορισμός 1 Τα σημεία του άξονα y στα οποία η $f(y) = 0$ λέγονται **κρίσιμα σημεία**.

Ορισμός 2 Τα κρίσιμα σημεία αποτελούν λύσεις των αυτόνομων εξισώσεων και λέγονται **λύσεις ισορροπίας**.

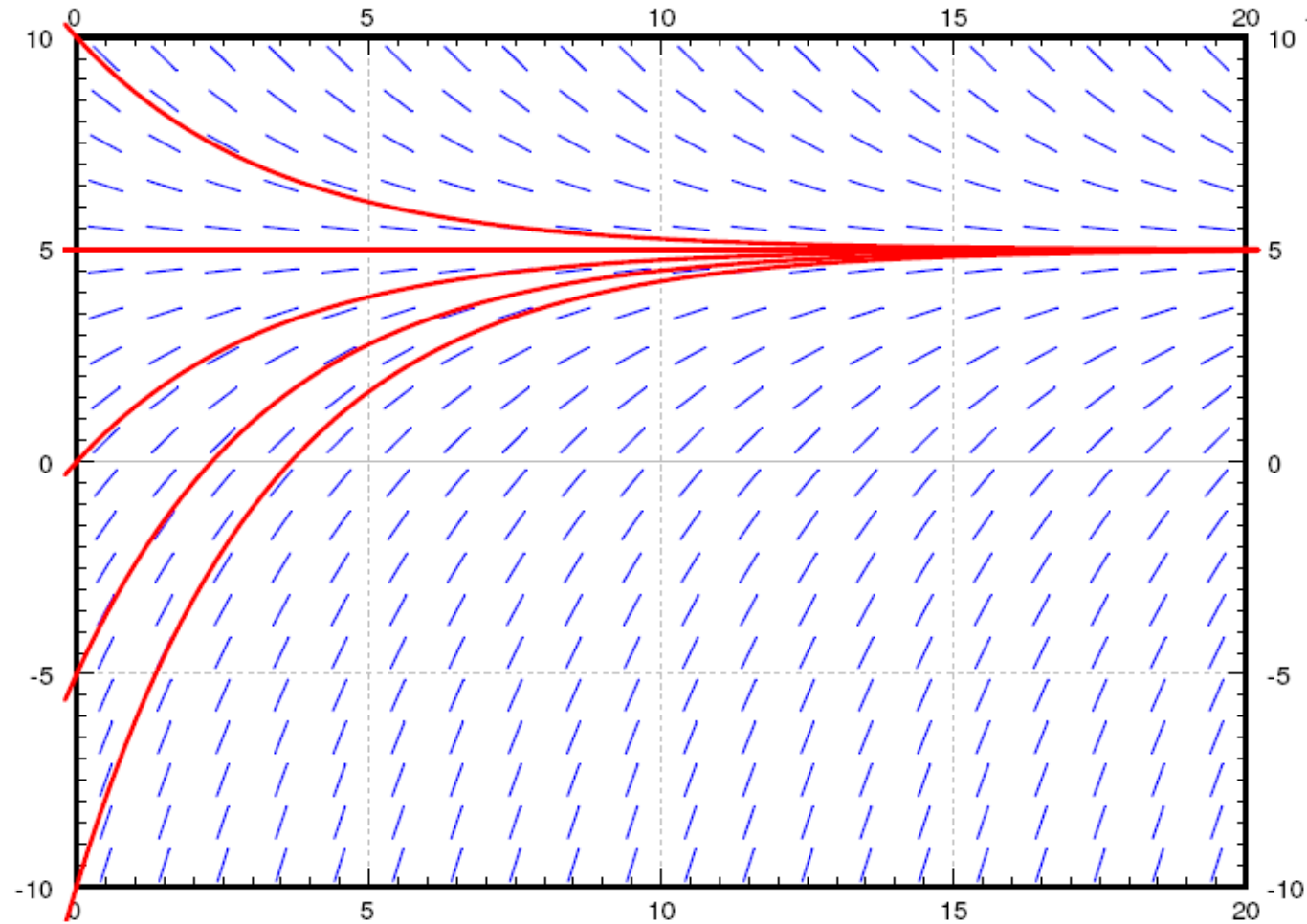
Ορισμός 3 Μία λύση (ή ένα κρίσιμο σημείο) λέγεται (ασυμπτωτικά) **ευσταθής** όταν, μικρές διαταραχές στο y δεν οδηγούν σε ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις για αρκετά μεγάλο t (ανεξάρτητη μεταβλητή, $t \rightarrow \infty$)

Παράδειγμα Ι

$$y' = -0.3(y - 5)$$

Παράδειγμα Ι

$$y' = -0.3(y - 5)$$



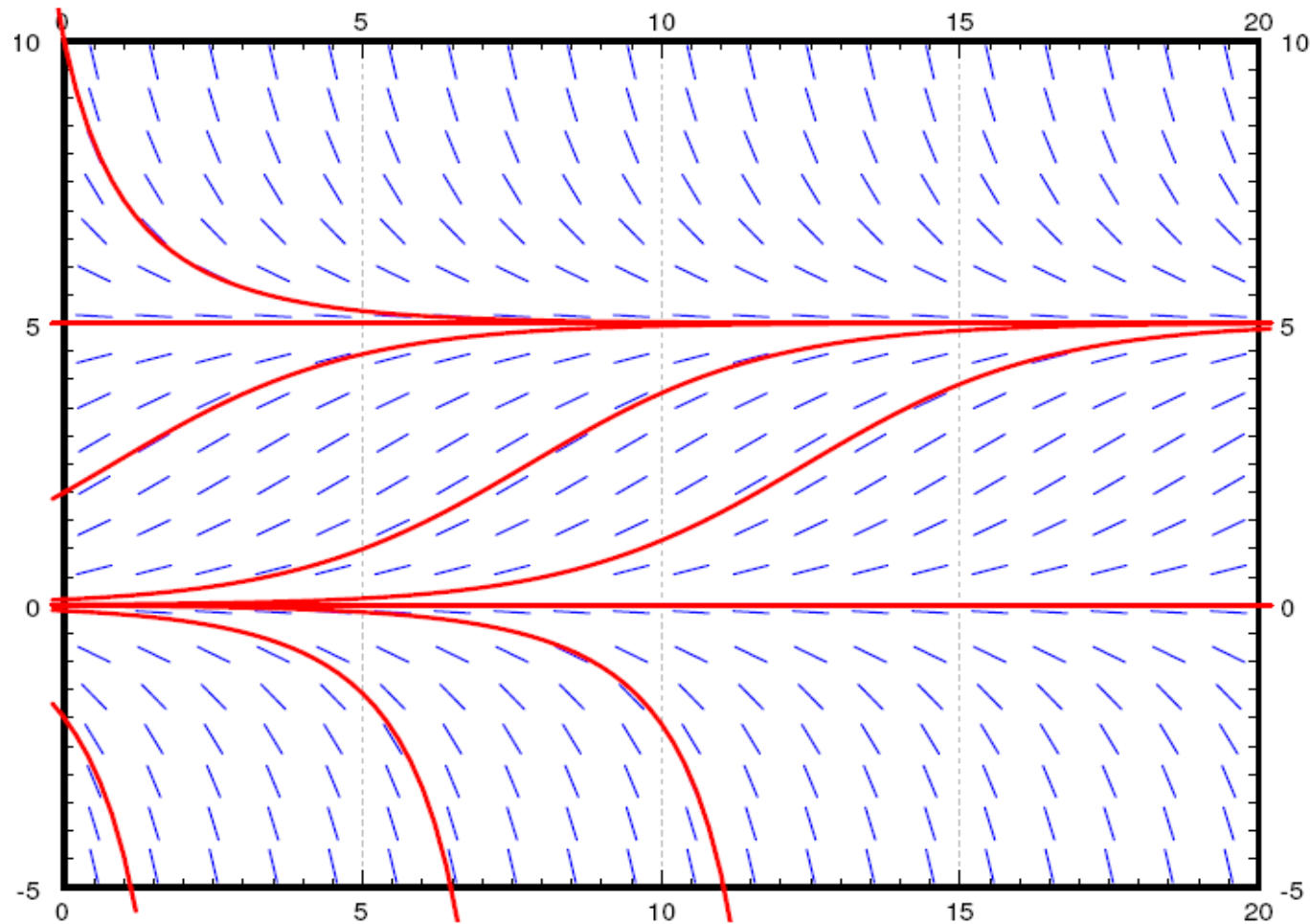
Σχήμα 1: Ευσταθές κρίσιμο σημείο $y = 5$

Παράδειγμα II

$$y' = -0.1y(5 - y)$$

Παράδειγμα II

$$y' = -0.1y(5 - y)$$



Σχήμα 2: Ευσταθές κρίσιμο σημείο το $y = 5$ και ασταθές το $y = 0$

Παράδειγμα-Λογιστική Εξίσωση

Δυναμική πληθυσμών Μαθηματικό μοντέλο εαν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός y ενός είδους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό M .

$$y' = ky(M - y), \quad k, M > 0$$

Παράδειγμα-Λογιστική Εξίσωση

Δυναμική πληθυσμών Μαθηματικό μοντέλο εαν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός y ενός είδους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό M .

$$y' = ky(M - y), \quad k, M > 0$$

Εναλλακτικά

$$y' = kMy - ky^2 \Rightarrow y' - kMy = -ky^2 \Rightarrow \text{Bernoulli}$$

Προηγούμενο γράφημα με $k = 0.1$ και $M = 5$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \begin{cases} 5 & \text{αν } y(0) > 0 \\ 0 & \text{αν } y(0) = 0 \\ \text{δεν } \exists \text{ ή } \infty & \text{αν } y(0) < 0 \end{cases}$$

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει αρνητικό πληθυσμός!

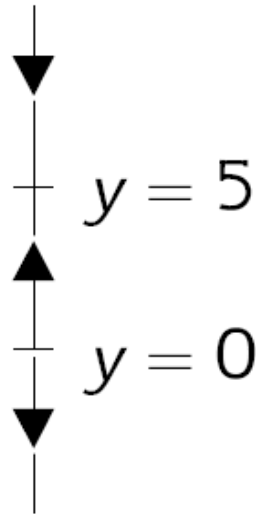
Διάγραμμα Φάσης

- Όταν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της λύσης (σε βάθος χρόνου)
- Σημειώνουμε στον άξονα y όλα τα κρίσιμα σημεία και μετά σχεδιάζουμε βέλη μεταξύ τους
- Προς τα πάνω βέλη παριστάνουν θετικότητα και προς τα κάτω αρνητικές τιμές

Διάγραμμα Φάσης

- Όταν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της λύσης (σε βάθος χρόνου)
- Σημειώνουμε στον άξονα y όλα τα κρίσιμα σημεία και μετά σχεδιάζουμε βέλη μεταξύ τους
- Προς τα πάνω βέλη παριστάνουν θετικότητα και προς τα κάτω αρνητικές τιμές

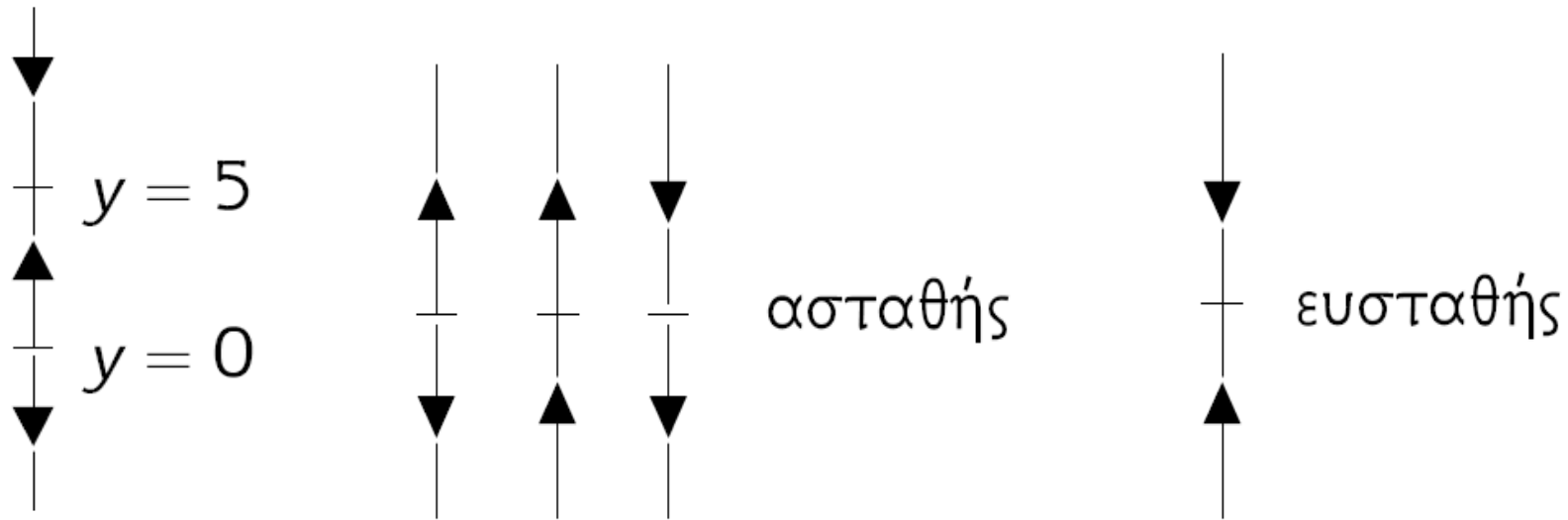
Συμπεριφορά της λύσης σε βάθος χρόνου



Διάγραμμα Φάσης

- Όταν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της λύσης (σε βάθος χρόνου)
- Σημειώνουμε στον άξονα y όλα τα κρίσιμα σημεία και μετά σχεδιάζουμε βέλη μεταξύ τους
- Προς τα πάνω βέλη παριστάνουν θετικότητα και προς τα κάτω αρνητικές τιμές

Συμπεριφορά της λύσης σε βάθος χρόνου



Γενικά

Λογιστική εξίσωση με κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της εκτρέφοντας μια αγέλη ζώων.

Λογιστική εξίσωση με κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της εκτρέφοντας μια αγέλη ζώων.

Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα/χρόνο
- $y(t)$ πλήθος των ζώων (χιλιάδες) στο χρόνο
- M μέγιστος δυνατός πληθυσμός ζώων (επίπεδο κορεσμού ή περιβαλλοντολογική χωρητικότητα για κάποιο είδος ζώου)
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων

Λογιστική εξίσωση με κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της εκτρέφοντας μια αγέλη ζώων.

Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα/χρόνο
- $y(t)$ πλήθος των ζώων (χιλιάδες) στο χρόνο
- M μέγιστος δυνατός πληθυσμός ζώων (επίπεδο κορεσμού ή περιβαλλοντολογική χωρητικότητα για κάποιο είδος ζώου)
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων

Το μαθηματικό μοντέλο:

$$y' = k(M - y)y$$

Λογιστική εξίσωση με κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της εκτρέφοντας μια αγέλη ζώων.

Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα/χρόνο
- $y(t)$ πλήθος των ζώων (χιλιάδες) στο χρόνο
- M μέγιστος δυνατός πληθυσμός ζώων (επίπεδο κορεσμού ή περιβαλλοντολογική χωρητικότητα για κάποιο είδος ζώου)
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων

Το μαθηματικό μοντέλο:

$$y' = k(M - y)y - h$$

Λογιστική εξίσωση με κατανάλωση (συνέχεια)

$$y' = k(M - y)y - h$$

Κρίσιμα σημεία

$$k(M - y)y - h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k}, y_1 \geq y_2$$

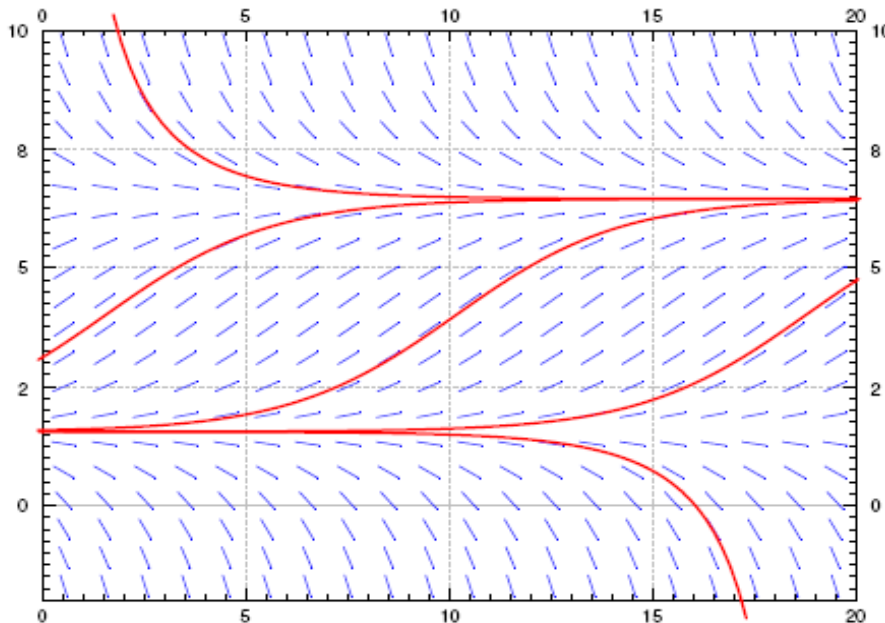
Λογιστική εξίσωση με κατανάλωση (συνέχεια)

$$y' = k(M - y)y - h$$

Κρίσιμα σημεία

$$k(M - y)y - h = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k}, y_1 \geq y_2$$

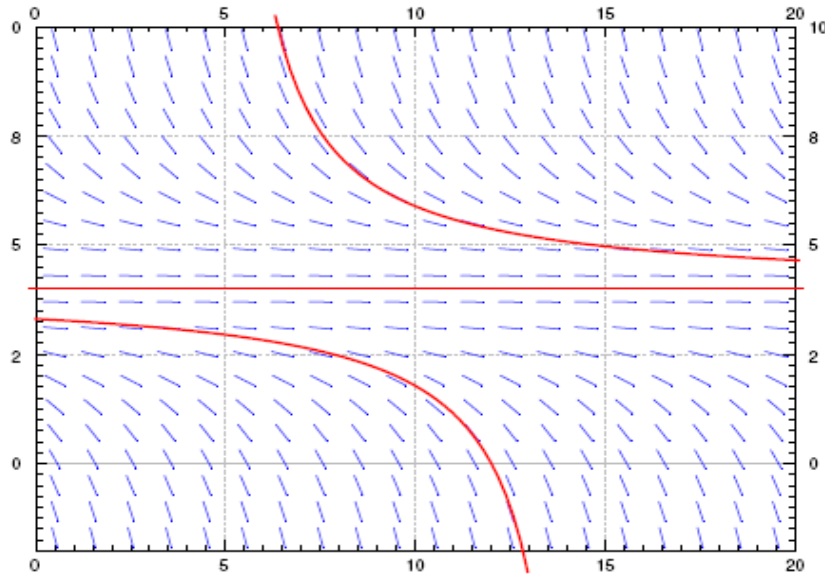
- Για $k = 0.1$, $M = 8$ και $h = 1$



Αν

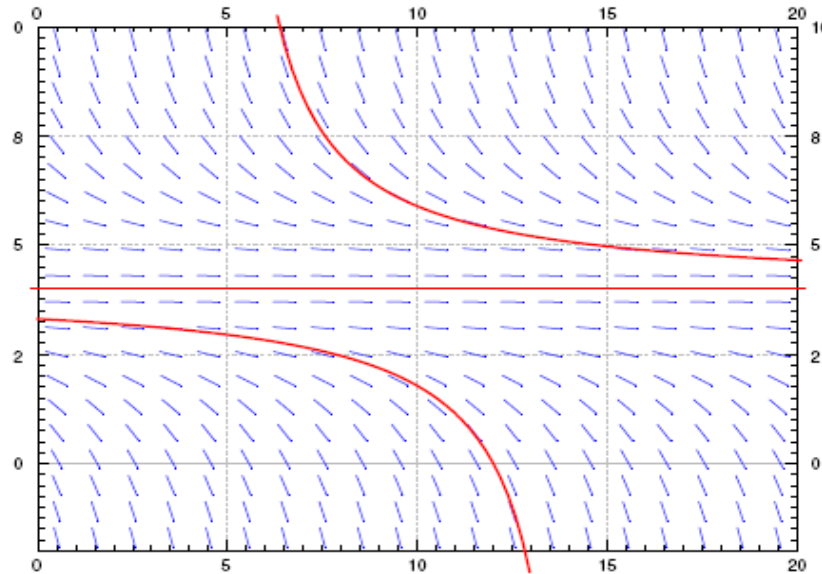
ο πληθυσμός των ζώων πέσει κάτω από το $y_2 \approx 1.55$ θα εξαλειφθεί!

- Για $k = 0.1$, $M = 8$ και $h = 1.6 \Rightarrow y_1 = y_2$



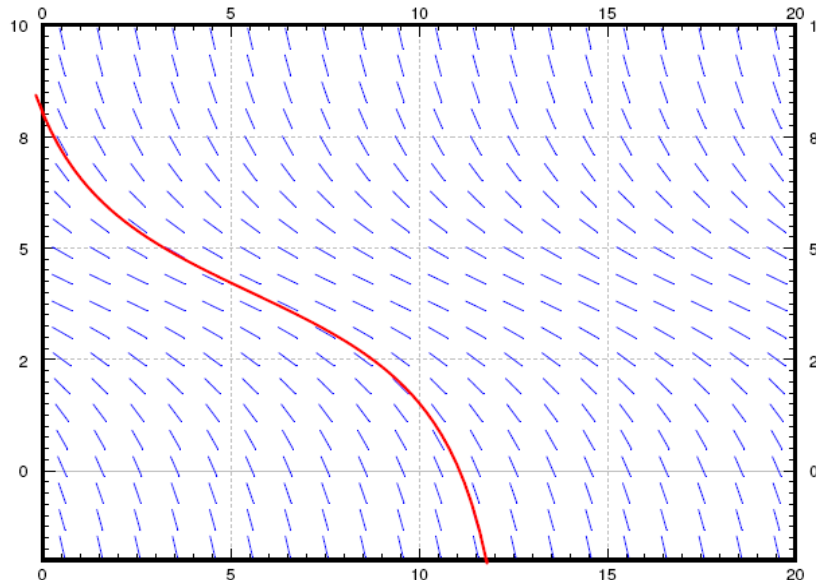
Αν ο πληθυσμός των ζώων
πέσει κάτω από το $y \approx 4$ θα εξαλειφθεί!

- Για $k = 0.1$, $M = 8$ και $h = 1.6 \Rightarrow y_1 = y_2$



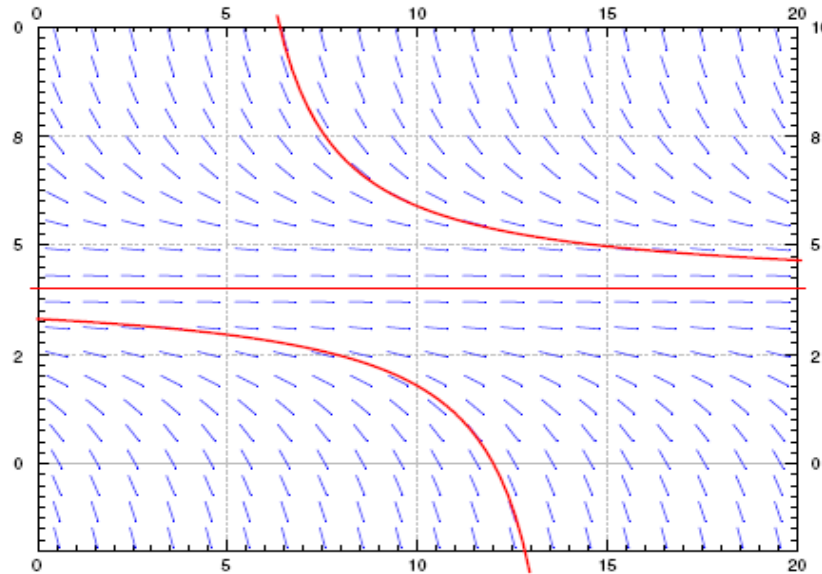
Αν ο πληθυσμός των ζώων
πέσει κάτω από το $y \approx 4$ θα εξαλειφθεί!

- Για $k = 0.1$, $M = 8$ και $h = 2 \Rightarrow y_{1,2}$ δεν είναι πραγματικά



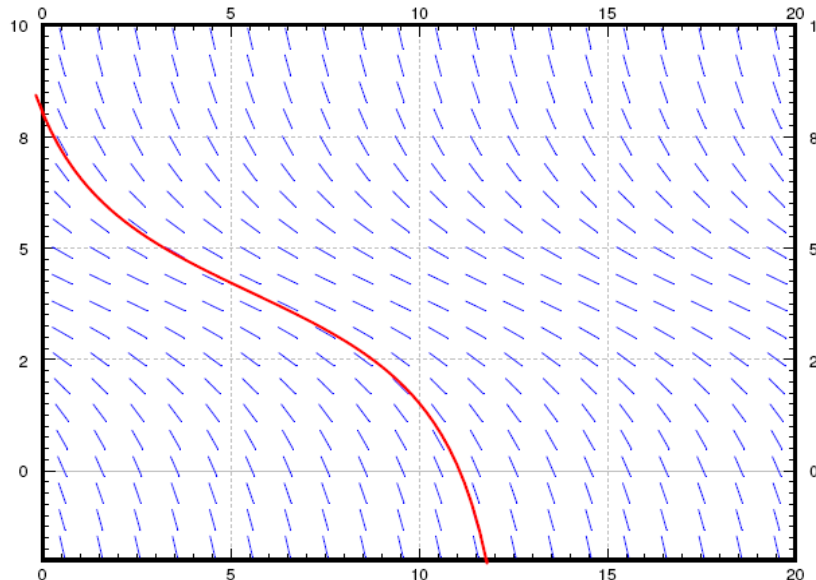
Ο πληθυσμός των ζώων θα εξαλειφθεί
ανεξάρτητα από το αρχικό τους πλήθος!

- Για $k = 0.1$, $M = 8$ και $h = 1.6 \Rightarrow y_1 = y_2$



Αν ο πληθυσμός των ζώων
πέσει κάτω από το $y \approx 4$ θα εξαλειφθεί!

- Για $k = 0.1$, $M = 8$ και $h = 2 \Rightarrow y_{1,2}$ δεν είναι πραγματικά



Ο πληθυσμός των ζώων θα εξαλειφθεί
ανεξάρτητα από το αρχικό τους πλήθος!

Ασκήσεις

Για τον υπολογισμό των πεδίων κατευθύνσεων (κλίσεων)

www.math.psu.edu/cao/DFD

(1) Έστω $y' = y^2$. α) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης, βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σημειώστε ποιά από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή. β) σχεδιάστε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις της εξίσωσης. γ) Βρείτε το $\lim_{t \rightarrow 0}$ της λύσης με αρχική συνθήκη $y(0) = -1$.

(2) Έστω $y' = \sin(y)$. α) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για $-4\pi \leq y \leq 4\pi$, βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σημειώστε ποιά από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή. β) σχεδιάστε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις της εξίσωσης. γ) Βρείτε το $\lim_{t \rightarrow 0}$ της λύσης με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.

(3) Ξεκινώντας από την λογιστική εξίσωση με κατανάλωση $y' = ky(M - y) - h$ και υποθέτοντας ότι η κατανάλωση είναι ανάλογη του υπάρχοντος πληθυσμού δηλ.

$h = h(y) = Ay, A > 0$. α) Κατασκευάστε και λύστε τη Δ.Ε. που αναλογεί, β) Αποδείξτε ότι εάν $kM > A$, τότε η Δ.Ε. παραμένει λογιστική, γ) τι συμβαίνει εάν $kM < A$;

Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις Υψηλότερης Τάξης

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

• Για $n = 2$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad \text{κανονική μορφή} \quad (1)$$

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

- Για $n = 2$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad \text{κανονική μορφή} \quad (1)$$

- **Ομογενής** γραμμική εξίσωση όταν $f(x) = 0$.

I. Γραμμικές Σ.Δ.Ε. Υψηλότερης Τάξης

Γενικά για τάξη $n \geq 2$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

όπου $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ συναρτήσεις του x ορισμένες σε ένα διάστημα I .

- Για $n = 2$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad \text{κανονική μορφή} \quad (1)$$

- **Ομογενής** γραμμική εξίσωση όταν $f(x) = 0$.

- Παραδείγματα

$$y'' + k^2y = 0$$

$$\text{Δύο λύσεις: } y_1 = \cos(kx), y_2 = \sin(kx),$$

$$y'' - k^2y = 0$$

$$\text{Δύο λύσεις: } y_1 = e^{kx}, y_2 = e^{-kx}.$$

Θεώρημα Υπέρθεσης

Αν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής ΔΕ (1), τότε για κάθε $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

είναι επίσης λύση της (1).

Θεώρημα Υπέρθεσης

Αν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής ΔΕ (1), τότε για κάθε $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

είναι επίσης λύση της (1).

Απόδειξη Έστω $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, τότε

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1 p y_1' + C_2 p y_2' + C_1 q y_1 + C_2 q y_2 \\ &= C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας

Έστω ότι p, q, f συνεχείς συνάσθησεις σ' ένα διάστημα I και x_0, b_0, b_1 σταθερές. Η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

έχει ακριβώς μία λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις **αρχικές συνθήκες**

$$y(x_0) = b_0 \quad y'(x_0) = b_1.$$

Παραδείγματα

- $y'' + y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$

$$y(x) = b_0 \cos x + b_1 \sin x$$

- $y'' - y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$

$$y(x) = b_0 \cosh x + b_1 \sinh x$$