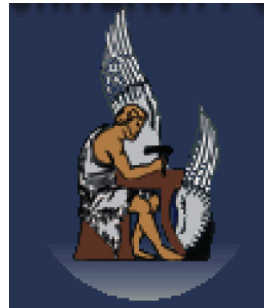


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 3η



Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2018

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις — — Ολοκλήρωση (συνέχεια)

Πρώτης τάξης: $y' = f(t, y)$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις — — Ολοκλήρωση (συνέχεια)

Πρώτης τάξης: $y' = f(t, y)$

Έστω ότι

$$f(t, y) = f(t)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(t)g(y)$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις — Ολοκλήρωση (συνέχεια)

Πρώτης τάξης: $y' = f(t, y)$

Έστω ότι

$$f(t, y) = f(t)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(t)g(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} = f(t) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} dt = \int f(t) dt + C$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις — Ολοκλήρωση (συνέχεια)

Πρώτης τάξης: $y' = f(t, y)$

Έστω ότι

$$f(t, y) = f(t)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(t)g(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} = f(t) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} dt = \int f(t) dt + C$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $y = y(t) \Rightarrow dy = y'(t)dt$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + C$$

Παράδειγμα V

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1$$

Παράδειγμα V

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1$$

$$\int 2(y - 1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

Παράδειγμα V

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1$$

$$\int 2(y - 1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Rightarrow y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

Παράδειγμα V

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1$$

$$\int 2(y - 1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Rightarrow y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

Πεπλεγμένη λύση αλλά 2ου βαθμού ως προς y :

Παράδειγμα V

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1$$

$$\int 2(y - 1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Rightarrow y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

Πεπλεγμένη λύση αλλά 2ου βαθμού ως προς y :

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

Παράδειγμα V

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1$$

$$\int 2(y - 1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Rightarrow y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

Πεπλεγμένη λύση αλλά 2ου βαθμού ως προς y :

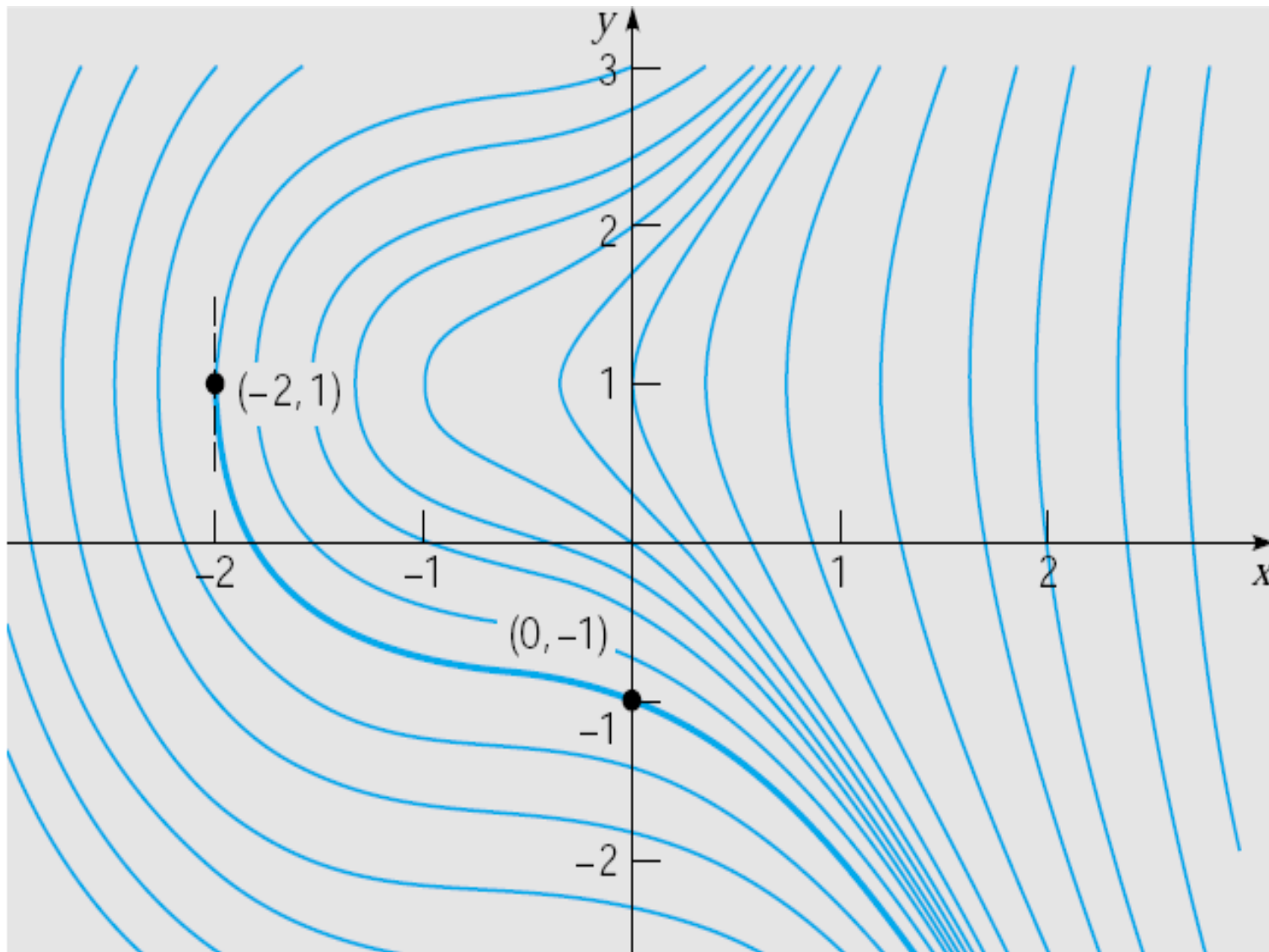
$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

Η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = -1$:

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (2)$$

Σε ποιά διάστημα ορίζεται η λύση; $\Leftrightarrow$ το υπόριζο στη (2) να είναι θετικό

Σε ποιά διάστημα ορίζεται η λύση; $\Leftrightarrow$ το υπόριζο στη (2) να είναι θετικό



Σχήμα 1: Ολοκληρωτικές καμπύλες της $y' = (3x^2 + 4x + 2)/2(y - 1)$

Εφαρμογή-Μοντελοποίηση

Φτιάχνουμε καφέ με βραστό νερό ($100^{\circ}C$). Μετά από $1'$ η θερμοκρασία, T , του καφέ είναι $95^{\circ}C$. Αν η θερμοκρασία, A , του περιβάλλοντος είναι $10^{\circ}C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^{\circ}C$, πόσο χρόνο πρέπει να περιμένουμε;

Εφαρμογή-Μοντελοποίηση

Φτιάχνουμε καφέ με βραστό νερό ($100^{\circ}C$). Μετά από 1' η θερμοκρασία, T , του καφέ είναι $95^{\circ}C$. Αν η θερμοκρασία, A , του περιβάλλοντος είναι $10^{\circ}C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^{\circ}C$, πόσο χρόνο πρέπει να περιμένουμε;

Λύση Το μοντέλο, Π.Α.Τ με βάση τα δεδομένα

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \quad A = 10, \quad T(0) = 100, \quad T(1) = 95$$

Εφαρμογή-Μοντελοποίηση

Φτιάχνουμε καφέ με βραστό νερό ($100^{\circ}C$). Μετά από 1' η θερμοκρασία, T , του καφέ είναι $95^{\circ}C$. Αν η θερμοκρασία, A , του περιβάλλοντος είναι $10^{\circ}C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^{\circ}C$, πόσο χρόνο πρέπει να περιμένουμε;

Λύση Το μοντέλο, Π.Α.Τ με βάση τα δεδομένα

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \quad A = 10, \quad T(0) = 100, \quad T(1) = 95$$

$$\frac{1}{A - T} \frac{dT}{dt} = k \Rightarrow -\ln(A - T) = kt + C \Rightarrow A - T = De^{-kt} \Rightarrow$$

$$T = A - De^{-kt}$$

Εφαρμογή-Μοντελοποίηση

Φτιάχνουμε καφέ με βραστό νερό ($100^{\circ}C$). Μετά από 1' η θερμοκρασία, T , του καφέ είναι $95^{\circ}C$. Αν η θερμοκρασία, A , του περιβάλλοντος είναι $10^{\circ}C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^{\circ}C$, πόσο χρόνο πρέπει να περιμένουμε;

Λύση Το μοντέλο, Π.Α.Τ με βάση τα δεδομένα

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \quad A = 10, \quad T(0) = 100, \quad T(1) = 95$$

$$\frac{1}{A - T} \frac{dT}{dt} = k \Rightarrow -\ln(A - T) = kt + C \Rightarrow A - T = De^{-kt} \Rightarrow$$

$$T = A - De^{-kt}$$

$$\text{Για } t = 0 \Rightarrow 100 = T(0) = 10 - D \Rightarrow D = -90$$

Εφαρμογή-Μοντελοποίηση

Φτιάχνουμε καφέ με βραστό νερό ($100^{\circ}C$). Μετά από 1' η θερμοκρασία, T , του καφέ είναι $95^{\circ}C$. Αν η θερμοκρασία, A , του περιβάλλοντος είναι $10^{\circ}C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^{\circ}C$, πόσο χρόνο πρέπει να περιμένουμε;

Λύση Το μοντέλο, Π.Α.Τ με βάση τα δεδομένα

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \quad A = 10, \quad T(0) = 100, \quad T(1) = 95$$

$$\frac{1}{A - T} \frac{dT}{dt} = k \Rightarrow -\ln(A - T) = kt + C \Rightarrow A - T = De^{-kt} \Rightarrow$$

$$T = A - De^{-kt}$$

$$\text{Για } t = 0 \Rightarrow 100 = T(0) = 10 - D \Rightarrow D = -90$$

$$\text{Για } t = 1 \Rightarrow 95 = T(1) = 10 + 90e^{-k} \Rightarrow k = -\ln \frac{95-10}{90} \approx 0.06$$

Εφαρμογή-Μοντελοποίηση

Φτιάχνουμε καφέ με βραστό νερό ($100^{\circ}C$). Μετά από 1' η θερμοκρασία, T , του καφέ είναι $95^{\circ}C$. Αν η θερμοκρασία, A , του περιβάλλοντος είναι $10^{\circ}C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^{\circ}C$, πόσο χρόνο πρέπει να περιμένουμε;

Λύση Το μοντέλο, Π.Α.Τ με βάση τα δεδομένα

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \quad A = 10, \quad T(0) = 100, \quad T(1) = 95$$

$$\frac{1}{A - T} \frac{dT}{dt} = k \Rightarrow -\ln(A - T) = kt + C \Rightarrow A - T = De^{-kt} \Rightarrow$$

$$T = A - De^{-kt}$$

$$\text{Για } t = 0 \Rightarrow 100 = T(0) = 10 - D \Rightarrow D = -90$$

$$\text{Για } t = 1 \Rightarrow 95 = T(1) = 10 + 90e^{-k} \Rightarrow k = -\ln \frac{95-10}{90} \approx 0.06$$

$$70 = 10 + 90e^{-0.06t} \Rightarrow t = \frac{-\ln \frac{70-10}{90}}{0.06} \approx 6, 8 \text{ λεπτά}$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης (γενίκευση-μεθοδολογία)

Έστω η γραμμική, ως προς y , Δ.Ε.

$$y' + p(t)y = f(t), \quad p(t), f(t) \text{ γνωστές συναρτήσεις}$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης (γενίκευση-μεθοδολογία)

Έστω η γραμμική, ως προς y , Δ.Ε.

$$y' + p(t)y = f(t), \quad p(t), f(t) \text{ γνωστές συναρτήσεις}$$

Ιδιότητες

- Η λύση υπάρχει αρκεί να ορίζονται οι $p(t)$ και $f(t)$ (στο διάστημα που μας ενδιαφέρει)
- Η ομαλότητα της λύσης ταυτίζεται με αυτή των $p(t)$ και $f(t)$

Μεθοδολογία Επίλυσης

$$y' + p(t)y = f(t)$$

Μεθοδολογία Επίλυσης

$$y' + p(t)y = f(t)$$

Αν $r(t)$ τέτοια ώστε

$$r(t)y' + r(t)p(t)y = \frac{d}{dt} [r(t)y] \quad \text{τότε}$$

Μεθοδολογία Επίλυσης

$$y' + p(t)y = f(t)$$

Αν $r(t)$ τέτοια ώστε

$$r(t)y' + r(t)p(t)y = \frac{d}{dt} [r(t)y] \quad \text{τότε}$$

$$\frac{d}{dt} [r(t)y] = r(t)f(t)$$

Παρατηρήστε ότι

- το δεξή μέλος δεν εξαρτάται από το y
- το αριστερό μέλος είναι η αντιπαράγωγος μίας συνάρτησης
- μπορούμε, ολοκληρώνοντας, να λύσουμε ως προς y

Μεθοδολογία Επίλυσης

$$y' + p(t)y = f(t)$$

Αν $r(t)$ τέτοια ώστε

$$r(t)y' + r(t)p(t)y = \frac{d}{dt} [r(t)y] \quad \text{τότε}$$

$$\frac{d}{dt} [r(t)y] = r(t)f(t)$$

Παρατηρήστε ότι

- το δεξή μέλος δεν εξαρτάται από το y
- το αριστερό μέλος είναι η αντιπαράγωγος μίας συνάρτησης
- μπορούμε, ολοκληρώνοντας, να λύσουμε ως προς y
αν γνωρίζουμε την $r(x)$

Ολοκληρωτικός (ή Ολοκληρώνοντας) Παράγοντας

Συνάρτηση $r(t)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε τη ίδια πολλαπλασιασμένη με $p(t)$ δηλ. $r'(t) = r(t)p(t)$

Ολοκληρωτικός (ή Ολοκληρώνοντας) Παράγοντας

Συνάρτηση $r(t)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε τη ίδια πολλαπλασιασμένη με $p(t)$ δηλ. $r'(t) = r(t)p(t)$

$$r(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Ολοκληρωτικός (ή Ολοκληρώνοντας) Παράγοντας

Συνάρτηση $r(t)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε τη ίδια πολλαπλασιασμένη με $p(t)$ δηλ. $r'(t) = r(t)p(t)$

$$r(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Μερικές (βαρετές) πράξεις

$$y' + p(t)y = f(t) \implies e^{\int p(t)dt}y' + e^{\int p(t)dt}p(t)y = e^{\int p(t)dt}f(t)$$

Ολοκληρωτικός (ή Ολοκληρώνοντας) Παράγοντας

Συνάρτηση $r(t)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε τη ίδια πολλαπλασιασμένη με $p(t)$ δηλ. $r'(t) = r(t)p(t)$

$$r(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Μερικές (βαρετές) πράξεις

$$y' + p(t)y = f(t) \implies e^{\int p(t)dt}y' + e^{\int p(t)dt}p(t)y = e^{\int p(t)dt}f(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\int p(t)dt} y \right] = e^{\int p(t)dt} f(t)$$

Ολοκληρωτικός (ή Ολοκληρώνοντας) Παράγοντας

Συνάρτηση $r(t)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε τη ίδια πολλαπλασιασμένη με $p(t)$ δηλ. $r'(t) = r(t)p(t)$

$$r(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Μερικές (βαρετές) πράξεις

$$y' + p(t)y = f(t) \implies e^{\int p(t)dt}y' + e^{\int p(t)dt}p(t)y = e^{\int p(t)dt}f(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\int p(t)dt}y \right] = e^{\int p(t)dt}f(t)$$

$$e^{\int p(t)dt}y = \int e^{\int p(t)dt}f(t)dt + C$$
$$y = e^{-\int p(t)dt} \left(\int e^{\int p(t)dt}f(t)dt + C \right)$$

Παράδειγμα Ι

Παράδειγμα I

$$y' + 2ty = e^{t-t^2}, \quad y(0) = -1,$$

Παράδειγμα I

$$y' + 2ty = e^{t-t^2}, \quad y(0) = -1,$$

$$p(t) = 2t, \quad f(t) = e^{t-t^2}, \quad r(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{t^2}$$

Παράδειγμα I

$$y' + 2ty = e^{t-t^2}, \quad y(0) = -1,$$

$$p(t) = 2t, \quad f(t) = e^{t-t^2}, \quad r(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{t^2}$$

$$e^{t^2} y' + 2te^{t^2} y = e^{t-t^2} e^{t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{t^2} y \right] = e^t$$

Παράδειγμα I

$$y' + 2ty = e^{t-t^2}, \quad y(0) = -1,$$

$$p(t) = 2t, \quad f(t) = e^{t-t^2}, \quad r(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{t^2}$$

$$e^{t^2} y' + 2te^{t^2} y = e^{t-t^2} e^{t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{t^2} y \right] = e^t$$

Ολοκληρώνουμε

$$e^{t^2} y = e^t + C$$

$$y = e^{t-t^2} + Ce^{-t^2}$$

Παράδειγμα I

$$y' + 2ty = e^{t-t^2}, \quad y(0) = -1,$$

$$p(t) = 2t, \quad f(t) = e^{t-t^2}, \quad r(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{t^2}$$

$$e^{t^2} y' + 2te^{t^2} y = e^{t-t^2} e^{t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{t^2} y \right] = e^t$$

Ολοκληρώνουμε

$$e^{t^2} y = e^t + C$$

$$y = e^{t-t^2} + Ce^{-t^2}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0) = -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$,

Παράδειγμα I

$$y' + 2ty = e^{t-t^2}, \quad y(0) = -1,$$

$$p(t) = 2t, \quad f(t) = e^{t-t^2}, \quad r(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{t^2}$$

$$e^{t^2} y' + 2te^{t^2} y = e^{t-t^2} e^{t^2}$$

$$\frac{d}{dt} [e^{t^2} y] = e^t$$

Ολοκληρώνουμε

$$e^{t^2} y = e^t + C$$

$$y = e^{t-t^2} + Ce^{-t^2}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0) = -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$,
συνεπώς η λύση είναι

$$y(t) = e^{t-t^2} - 2e^{-t^2}$$

Παράδειγμα II

Παράδειγμα II

Να βρεθεί η λύση και το διάστημα που το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2$$

Παράδειγμα II

Να βρεθεί η λύση και το διάστημα που το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2$$

Γράφουμε $y' + \frac{2}{t}y = 4t \Rightarrow p(t) = \frac{2}{t}, \quad g(t) = 4t$

Παράδειγμα II

Να βρεθεί η λύση και το διάστημα που το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2$$

Γράφουμε $y' + \frac{2}{t}y = 4t \Rightarrow p(t) = \frac{2}{t}, \quad g(t) = 4t$

Άρα η g συνεχής $\forall t$ και η p για $t > 0$ ή για $t < 0$. Όμως $t_0 = 1 > 0$, συνεπώς το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $0 < t < \infty$.

Παράδειγμα II

Να βρεθεί η λύση και το διάστημα που το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2$$

Γράφουμε $y' + \frac{2}{t}y = 4t \Rightarrow p(t) = \frac{2}{t}, \quad g(t) = 4t$

Άρα η g συνεχής $\forall t$ και η p για $t > 0$ ή για $t < 0$. Όμως $t_0 = 1 > 0$, συνεπώς το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $0 < t < \infty$.

Για τη λύση $r(t) = e^{\int 2/t dt} = e^{2 \ln t} = t^2$ και

$$t^2 y' + 2ty = [t^2 y]' = 4t^3$$

$$t^2 y = t^4 + C$$
$$y = t^2 + \frac{C}{t^2}, \quad \text{η γενική λύση}$$

Παράδειγμα II

Να βρεθεί η λύση και το διάστημα που το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2$$

Γράφουμε $y' + \frac{2}{t}y = 4t \Rightarrow p(t) = \frac{2}{t}, \quad g(t) = 4t$

Άρα η g συνεχής $\forall t$ και η p για $t > 0$ ή για $t < 0$. Όμως $t_0 = 1 > 0$, συνεπώς το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $0 < t < \infty$.

Για τη λύση $r(t) = e^{\int 2/t dt} = e^{2 \ln t} = t^2$ και

$$t^2 y' + 2ty = [t^2 y]' = 4t^3$$

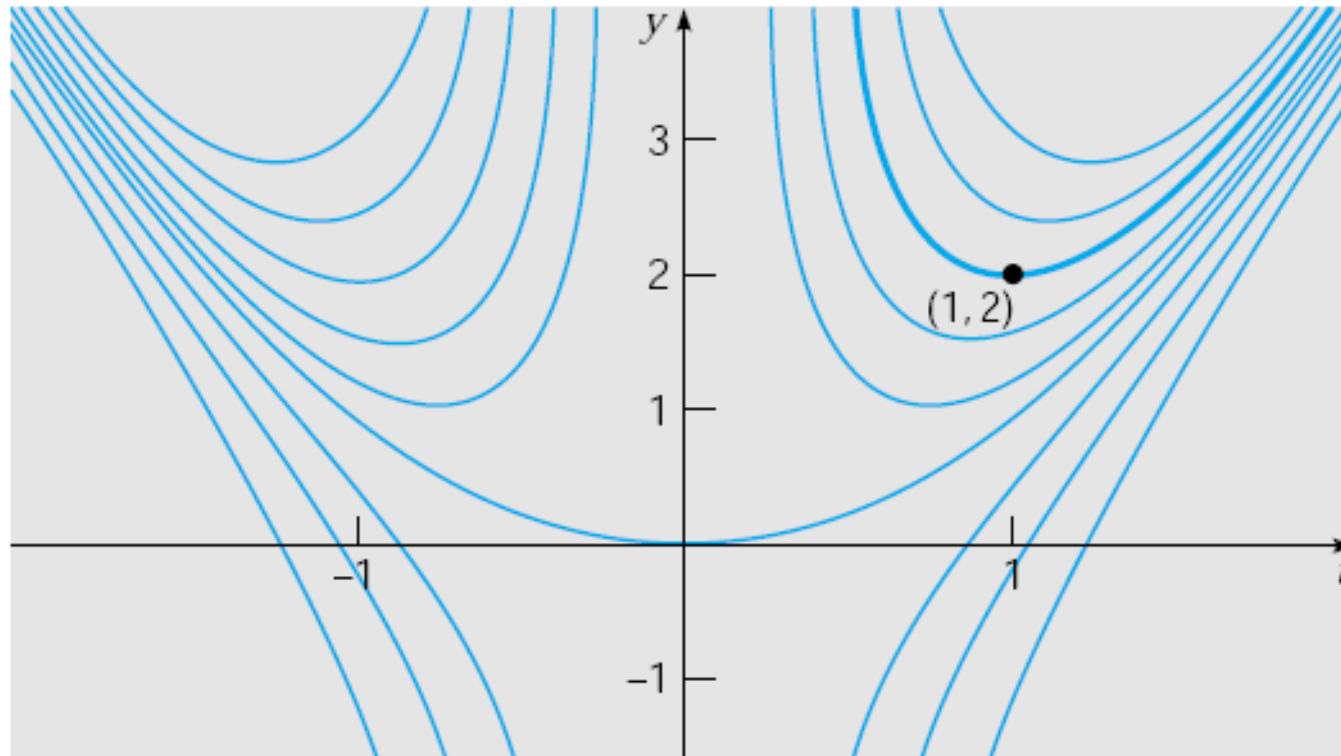
$$t^2 y = t^4 + C$$
$$y = t^2 + \frac{C}{t^2}, \quad \text{η γενική λύση}$$

Από $y(1) = 2 \Rightarrow C = 1$, άρα η λύση του Π.Α.Τ

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$$

Από $y(1) = 2 \Rightarrow C = 1$, άρα η λύση του Π.Α.Τ

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$$



Σχήμα 2: Ολοκληρωτικές καμπύλες της $ty' + 2y = 4t^2$

Παράδειγμα III

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η λύση για το Π.Α.Τ

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = -0.5$$

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η λύση για το Π.Α.Τ

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = -0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι: $r(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$ άρα

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η λύση για το Π.Α.Τ

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = -0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι: $r(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$ άρα

$$e^{-t^2}(y' - 2ty) = [e^{-t^2}y]' = e^{-t^2}$$

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η λύση για το Π.Α.Τ

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = -0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι: $r(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$ άρα

$$e^{-t^2}(y' - 2ty) = [e^{-t^2}y]' = e^{-t^2}$$

$$e^{-t^2}y = \int e^{-t^2}dt + C$$

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η λύση για το Π.Α.Τ

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = -0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι: $r(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$ άρα

$$e^{-t^2}(y' - 2ty) = [e^{-t^2}y]' = e^{-t^2}$$

$$e^{-t^2}y = \int e^{-t^2}dt + C$$

Από το Θ.Θ.Δ.Λ.

$$y = e^{t^2} \int_{t_0=0}^t e^{-s^2}ds + Ce^{t^2}$$

Παράδειγμα III

Να βρεθεί η λύση για το Π.Α.Τ

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = -0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι: $r(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$ άρα

$$e^{-t^2}(y' - 2ty) = [e^{-t^2}y]' = e^{-t^2}$$

$$e^{-t^2}y = \int e^{-t^2}dt + C$$

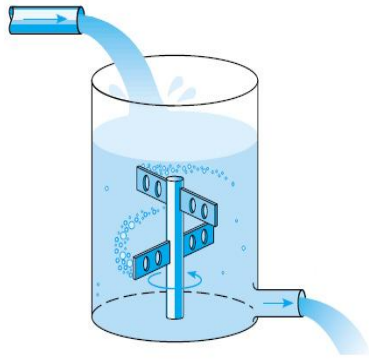
Από το Θ.Θ.Δ.Λ.

$$y = e^{t^2} \int_{t_0=0}^t e^{-s^2}ds + Ce^{t^2}$$

Το ολοκλήρωμα το υλοποιούμε στον υπολογιστή για να πάρουμε τη λύση σε όποιο σημείο t επιθυμούμε.

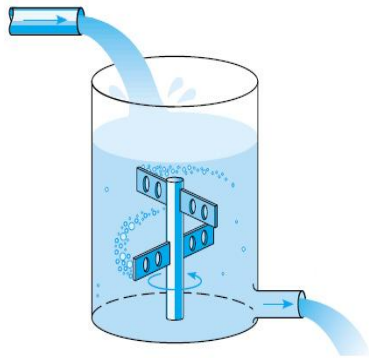
$$\text{Από } y(0) = -0.5 \Rightarrow C = -0.5$$

Εφαρμογή



Δεξαμενή 100 λίτρων(l) περιέχει 10 κιλά(kg) διαλυμένα σε $60l$ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας $0.1kg/l$ εισάγεται στη δεξαμενή με ρυθμό $5l/min$ και εξάγεται με ρυθμό $3l/min$. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

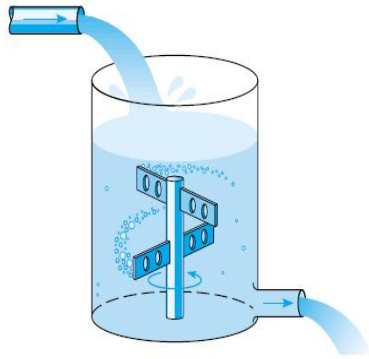
Εφαρμογή



Δεξαμενή 100 λίτρων(l) περιέχει 10 κιλά(kg) διαλυμένα σε $60l$ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας $0.1kg/l$ εισάγεται στη δεξαμενή με ρυθμό $5l/min$ και εξάγεται με ρυθμό $3l/min$. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

Λύση Έστω x = ποσότητα αλατιού (σε kg) και έστω t ο χρόνος (σε λεπτά)

Εφαρμογή

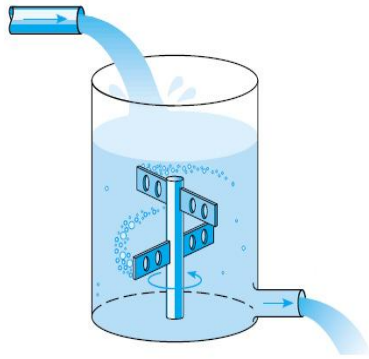


Δεξαμενή 100 λίτρων(l) περιέχει 10 κιλά(kg) διαλυμένα σε 60 l νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας $0.1kg/l$ εισάγεται στη δεξαμενή με ρυθμό $5l/min$ και εξάγεται με ρυθμό $3l/min$. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

Λύση Έστω x = ποσότητα αλατιού (σε kg) και έστω t ο χρόνος (σε λεπτά)
Η μεταβολή του x στο χρόνο δt συμβολίζεται σαν dt , τότε

$$\frac{dx}{dt} = (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής}) - (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής})$$

Εφαρμογή



Δεξαμενή 100 λίτρων(l) περιέχει 10 κιλά(kg) διαλυμένα σε 60 l νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας $0.1kg/l$ εισάγεται στη δεξαμενή με ρυθμό $5l/min$ και εξάγεται με ρυθμό $3l/min$. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

Λύση Έστω x = ποσότητα αλατιού (σε kg) και έστω t ο χρόνος (σε λεπτά)
Η μεταβολή του x στο χρόνο δt συμβολίζεται σαν dt , τότε

$$\frac{dx}{dt} = (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής}) - (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής})$$

Συγκέντρωση εξαγωγής =

$$\frac{x}{\text{όγκος}} = \frac{x}{60 + (5 - 3)t}$$

Καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\frac{dx}{dt} = (5 \cdot 0.1) - 3 \frac{x}{60 + 2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} + \frac{3}{60 + 2t} x = 0.5$$

Καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\frac{dx}{dt} = (5 \cdot 0.1) - 3 \frac{x}{60 + 2t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{3}{60 + 2t} x = 0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε. είναι

$$r(t) = e^{\int \frac{3}{60+2t} dt} = e^{\frac{3}{2} \ln(60+2t)} = (60 + 2t)^{3/2}$$

Καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\frac{dx}{dt} = (5 \cdot 0.1) - 3 \frac{x}{60 + 2t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{3}{60 + 2t} x = 0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε. είναι

$$r(t) = e^{\int \frac{3}{60+2t} dt} = e^{\frac{3}{2} \ln(60+2t)} = (60 + 2t)^{3/2}$$

$$(60 + 2t)^{3/2} \frac{dx}{dt} + (60 + 2t)^{3/2} \frac{3}{60 + 2t} x = 0.5(60 + 2t)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}[(60 + 2t)^{3/2} x] = 0.5(60 + 2t)^{3/2} \Rightarrow$$

$$(60 + 2t)^{3/2} x = \int 0.5(60 + 2t)^{3/2} dt + C \Rightarrow$$

Καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\frac{dx}{dt} = (5 \cdot 0.1) - 3 \frac{x}{60 + 2t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{3}{60 + 2t} x = 0.5$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε. είναι

$$r(t) = e^{\int \frac{3}{60+2t} dt} = e^{\frac{3}{2} \ln(60+2t)} = (60 + 2t)^{3/2}$$

$$(60 + 2t)^{3/2} \frac{dx}{dt} + (60 + 2t)^{3/2} \frac{3}{60 + 2t} x = 0.5(60 + 2t)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}[(60 + 2t)^{3/2} x] = 0.5(60 + 2t)^{3/2} \Rightarrow$$

$$(60 + 2t)^{3/2} x = \int 0.5(60 + 2t)^{3/2} dt + C \Rightarrow$$

$$x = (60 + 2t)^{-3/2} \int \frac{(60 + 2t)^{3/2}}{2} dt + C(60 + 2t)^{-3/2} \Rightarrow$$

$$x = (60 + 2t)^{-3/2} \frac{1}{10} (60 + 2t)^{5/2} + C(60 + 2t)^{-3/2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{(60 + 2t)}{10} + C(60 + 2t)^{-3/2}$$

$$x = (60 + 2t)^{-3/2} \frac{1}{10} (60 + 2t)^{5/2} + C(60 + 2t)^{-3/2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{(60 + 2t)}{10} + C(60 + 2t)^{-3/2}$$

Από αρχική συνθήκη

$$10 = x(0) = 6 + C(60)^{-3/2} \Rightarrow C = 4(60^{3/2}) \approx 1859.03$$

$$x = (60 + 2t)^{-3/2} \frac{1}{10} (60 + 2t)^{5/2} + C(60 + 2t)^{-3/2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{(60 + 2t)}{10} + C(60 + 2t)^{-3/2}$$

Από αρχική συνθήκη

$$10 = x(0) = 6 + C(60)^{-3/2} \Rightarrow C = 4(60^{3/2}) \approx 1859.03$$

Δεξανή γεμάτη όταν $60 + 2t = 100 \Rightarrow t = 20$ άρα

$$x(20) \approx 10 + 1859.03(100)^{-3/2} \approx 11.86$$

Άρα η συγκέντρωση όταν γεμίσει η δεξαμενή είναι περίπου 0.1186 Kg/l .

Η αρχική συγκέντρωση ήταν 0.167 Kg/l .

Ακριβείς (Πλήρεις) Δ.Ε. & Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Για την γενική περίπτωση όπου η Δ.Ε. 1ης τάξης είναι της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

Ακριβείς (Πλήρεις) Δ.Ε. & Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Για την γενική περίπτωση όπου η Δ.Ε. 1ης τάξης είναι της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

Ας θυμηθούμε ότι αν $g(t) = u(x(t), y(t))$ τότε

$$g'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).$$

Ιδιαίτερα αν έχουμε την $g(x) = u(x, y(x))$ τότε

$$g'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)y'$$

Ακριβείς (Πλήρεις) Δ.Ε. & Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Για την γενική περίπτωση όπου η Δ.Ε. 1ης τάξης είναι της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

Ας θυμηθούμε ότι αν $g(t) = u(x(t), y(t))$ τότε

$$g'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).$$

Ιδιαίτερα αν έχουμε την $g(x) = u(x, y(x))$ τότε

$$g'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)y'$$

Αν μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $u(x, y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Έχουμε ότι

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)y' = [u(x, y)]' = 0 \quad (2)$$

και η παραπάνω Δ.Ε. έχει λύση τη $u(x, y) = C$!

Έχουμε ότι

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)y' = [u(x, y)]' = 0 \quad (2)$$

και η παραπάνω Δ.Ε. έχει λύση τη $u(x, y) = C$!

Ορισμός : Η Δ.Ε. (1) ονομάζεται **ακριβής** (ή πλήρης) αν υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Έχουμε ότι

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)y' = [u(x, y)]' = 0 \quad (2)$$

και η παραπάνω Δ.Ε. έχει λύση τη $u(x, y) = C!$

Ορισμός : Η Δ.Ε. (1) ονομάζεται **ακριβής** (ή πλήρης) αν υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Θεώρημα: Έστω $M(x, y), N(x, y)$ ορισμένες και συνεχείς σε ένα παραλληλόγραμμο R και επιπλέον οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y), \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ στο $\mathbb{R}$. Τότε **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να είναι η Δ.Ε. (1) ακριβής Δ.Ε. είναι να ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in R. \quad (3)$$

Η συνθήκη (3) θα μας δώσει και τη μέθοδο λύσης.

Μεθοδολογία Επίλυσης

Βήμα 1 Εξετάζουμε αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in R$. Αν ναι, τότε θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Μεθοδολογία Επίλυσης

Βήμα 1 Εξετάζουμε αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in R$. Αν ναι, τότε θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Βήμα 2 Ολοκληρώνουμε την $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ ως προς x και παίρνουμε

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) = \phi(x, y) + g(y)$$

Μεθοδολογία Επίλυσης

Βήμα 1 Εξετάζουμε αν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in R$. Αν ναι, τότε θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε να ισχύει η (2)

Βήμα 2 Ολοκληρώνουμε την $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ ως προς x και παίρνουμε

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) = \phi(x, y) + g(y)$$

Βήμα 3 Βρίσκουμε τη συνάρτηση $g(y)$. Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς y , και λόγω ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ έχουμε

$$N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) + g'(y).$$

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς $g'(y)$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε μια συνάρτηση $g_0(y)$ που την ικανοποιεί.

Τέλος έχουμε ότι η $u(x, y) = \phi(x, y) + g_0(y) = C$ είναι λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα I

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$3x(xy - 2) + (x^3 + 2y)y' = 0.$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3),

$$M(x, y) = 3x(xy - 2) = 3x^2y - 6x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \text{ και}$$

$$N(x, y) = x^3 + 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 3x^2.$$

άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = C$.

Παράδειγμα Ι

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$3x(xy - 2) + (x^3 + 2y)y' = 0.$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3),

$$M(x, y) = 3x(xy - 2) = 3x^2y - 6x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \text{ και}$$

$$N(x, y) = x^3 + 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 3x^2.$$

άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = C$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = x^3y - 3x^2 + g(y).$$

Παράδειγμα Ι

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$3x(xy - 2) + (x^3 + 2y)y' = 0.$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3),

$$M(x, y) = 3x(xy - 2) = 3x^2y - 6x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \text{ και}$$

$$N(x, y) = x^3 + 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 3x^2.$$

άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = C$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = x^3y - 3x^2 + g(y).$$

Βήμα 3 Παραγωγίζουμε την $u(x, y) = x^3y - 3x^2 + g(y)$ ως προς $y \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = x^3 + 2y$ άρα

$$x^3 + 2y = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x^3 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2$$

Έχουμε ότι $u(x, y) = x^3y - 3x^2 + y^2 = C$ είναι λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα II

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\ln(x) - 2)y' = 0 \quad x > 0,$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}$.
άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = c$.

Παράδειγμα II

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\ln(x) - 2)y' = 0 \quad x > 0,$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}$.
άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = c$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = y \ln(x) + 3x^2 + g(y).$$

Παράδειγμα II

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\ln(x) - 2)y' = 0 \quad x > 0,$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}$.
άρα $\exists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2) και η λύση είναι η $u(x, y) = c$.

Βήμα 2 Από την $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ ολοκληρώνοντας ως προς x

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = y \ln(x) + 3x^2 + g(y).$$

Βήμα 3 Παραγωγίζουμε την $u(x, y) = y \ln(x) + 3x^2 + g(y)$ ως προς $y \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = \ln(x) - 2$ άρα

$$\ln(x) - 2 = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \ln(x) + g'(y) \quad \Rightarrow g'(y) = -2 \Rightarrow g(y) = -2y$$

Έχουμε ότι $u(x, y) = y \ln(x) + 3x^2 - 2y = C$ είναι λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα $\nexists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα $\nexists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παρ'όλα αυτά αν πολ/σω τη Δ.Ε. με $1/x^2$

$$\frac{-y}{x^2} + \frac{1}{x}y' = 0$$

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα $\nexists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παρ'όλα αυτά αν πολ/σω τη Δ.Ε. με $1/x^2$

$$\frac{-y}{x^2} + \frac{1}{x}y' = 0$$

η $u(x, y) = y/x = C$ είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα III

Να ελέγξετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν είναι να βρεθεί μια λύση της.

$$-y + xy' = 0$$

Βήμα 1 Ελέγχουμε αν ισχύει η (3), $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -1$ και $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 1$.
άρα $\nexists u(x, y)$ που ικανοποιεί τη (2).

Παρ' όλα αυτά αν πολ/σω τη Δ.Ε. με $1/x^2$

$$\frac{-y}{x^2} + \frac{1}{x}y' = 0$$

η $u(x, y) = y/x = C$ είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Μπορώ να πάρω ακριβή Δ.Ε. και αν πολ/σω με

$$1/y^2, \quad 1/(xy), \quad 1/(x^2 + y^2)$$

Μετατροπή σε ακριβή Δ.Ε.-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ για όλα τα (x, y) .

Μετατροπή σε ακριβή Δ.Ε.-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ για όλα τα (x, y) .

- Υπάρχει μια συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε η ΔΕ

$$f(x, y)M(x, y) + f(x, y)N(x, y)y' = 0$$

Μετατροπή σε ακριβή Δ.Ε.-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ για όλα τα (x, y) .

- Υπάρχει μια συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε η ΔΕ

$$f(x, y)M(x, y) + f(x, y)N(x, y)y' = 0$$

να είναι ακριβής; δηλ. να ισχύει $\frac{\partial(fM)}{\partial y} = \frac{\partial(fN)}{\partial x}$

Μετατροπή σε ακριβή Δ.Ε.-Ολοκληρωτικός παράγοντας

- Περίπτωση που στη ΔΕ

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

δεν ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ για όλα τα (x, y) .

- Υπάρχει μια συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε η ΔΕ

$$f(x, y)M(x, y) + f(x, y)N(x, y)y' = 0$$

να είναι ακριβής; δηλ. να ισχύει $\frac{\partial(fM)}{\partial y} = \frac{\partial(fN)}{\partial x}$

- Περιοριζόμαστε στις (ειδικές) περιπτώσεις όπου η $f(x, y)$ είναι μόνο συνάρτηση του x ή μόνο του y .

Αν $f(x, y) \equiv f(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x)$ τότε

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

...

$$\frac{\partial f M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f N}{\partial x}(x, y) \Rightarrow$$

$$M(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial N}{\partial x}(x, y). \quad (1)$$

Η (1) παίρνει τη μορφή

$$f(x) \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = N(x, y) f'(x) + f(x) \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \Rightarrow$$

$$N(x, y) f'(x) = f(x) \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right), \quad (2)$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

...

$$\frac{\partial f M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f N}{\partial x}(x, y) \Rightarrow$$
$$M(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial N}{\partial x}(x, y). \quad (1)$$

Η (1) παίρνει τη μορφή

$$f(x) \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = N(x, y) f'(x) + f(x) \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \Rightarrow$$
$$N(x, y) f'(x) = f(x) \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right), \quad (2)$$

και αν το **δεξή μέλος** είναι συνάρτηση μόνο του x , τότε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right) \Rightarrow \quad (3)$$

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right) dx} \quad (4)$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

Θεώρημα 1 Εάν στην εξίσωση $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ ισχύει ότι η συνάρτηση $\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right)$ **είναι συνάρτηση μόνο του x** , τότε η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα $f(x)$ ο οποίος δίνεται από

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right) dx}.$$

Μετατροπή σε ακριβή ΔΕ-Ολοκληρωτικός παράγοντας

Θεώρημα 1 Εάν στην εξίσωση $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ ισχύει ότι η συνάρτηση $\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right)$ **είναι συνάρτηση μόνο του x** , τότε η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα $f(x)$ ο οποίος δίνεται από

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right) dx}.$$

Θεώρημα 2 Εάν στην εξίσωση $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ ισχύει ότι η συνάρτηση $\frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right)$ **είναι συνάρτηση μόνο του y** , τότε η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα $f(y)$ της μορφής

$$f(y) = e^{\int \frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right) dy}.$$

Παράδειγμα I

Να λυθεί η ΔΕ

$$e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y' = 0, \quad y(0) = -1.$$

Παράδειγμα Ι

Να λυθεί η ΔΕ

$$e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y' = 0, \quad y(0) = -1.$$

Ισχύει ότι $\frac{\partial(e^{x+y} + ye^y)}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} + e^y + ye^y$ και $\frac{\partial(xe^y - 1)}{\partial x} = e^y$ και επομένως η ΔΕ δεν είναι ακριβής. **Υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας;**

$$\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y}{xe^y - 1} = \frac{e^{x+y} + ye^y}{xe^y - 1}$$

που δεν είναι συνάρτηση μόνο του x . Εξετάζουμε αν ισχύει το Θεώρημα 2.
Έχουμε

$$\frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{e^y - e^{x+y} - e^y - ye^y}{e^{x+y} + ye^y} = -1$$

και άρα υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας f που είναι συνάρτηση του y .

Από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι

$$f(y) = e^{\int (-1)dy} = e^{-y}.$$

Επομένως η παρακάτω Δ.Ε. είναι ακριβής.

$$e^{-y}(e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y') = e^x + y + (x - e^{-y})y' = 0$$

Από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι

$$f(y) = e^{\int (-1)dy} = e^{-y}.$$

Επομένως η παρακάτω Δ.Ε. είναι ακριβής.

$$e^{-y}(e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y') = e^x + y + (x - e^{-y})y' = 0$$

Βήμα 2 Ολοκληρώνοντας της $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x + y$ ως προς x παίρνουμε

$$u(x, y) = e^x + xy + g(y).$$

Από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι

$$f(y) = e^{\int (-1)dy} = e^{-y}.$$

Επομένως η παρακάτω Δ.Ε. είναι ακριβής.

$$e^{-y}(e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)y') = e^x + y + (x - e^{-y})y' = 0$$

Βήμα 2 Ολοκληρώνοντας της $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x + y$ ως προς x παίρνουμε

$$u(x, y) = e^x + xy + g(y).$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x - e^{-y} \text{ παίρνουμε}$$

$$x - e^{-y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x + g'(y) \quad \Rightarrow \quad g(y) = e^{-y}.$$

Επομένως η γενική λύση είναι η

$$u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = C. \quad (5)$$

Για να βρούμε τη λύση που ικανοποιεί την $y(0) = -1$,

αντικαθιστώντας στην (5) παίρνουμε

$u(0, -1) = 1 + 0 + e$ και άρα η ειδική λύση είναι η

$$u(x, y) = e^x + xy + e^y = 1 + e.$$

Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Έχουμε $\frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = 1$ και $\frac{\partial(2xy - e^{-2y})}{\partial x}(x, y) = 2y \Rightarrow$ η ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Έχουμε $\frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = 1$ και $\frac{\partial(2xy - e^{-2y})}{\partial x}(x, y) = 2y \Rightarrow$ η ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Εάν $y \neq 0$ έχουμε $\frac{1}{y}(2y - 1) = 2 - \frac{1}{y}$ συνάρτηση του y και άρα ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η

$$f(y) = e^{\int (2 - 1/y) dy} = e^{2y} / |y|.$$

Παράδειγμα II

Να εξετάσετε αν η ΔΕ είναι ακριβής και αν δεν είναι να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας και να λυθεί η ΔΕ.

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

Έχουμε $\frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = 1$ και $\frac{\partial(2xy - e^{-2y})}{\partial x}(x, y) = 2y \Rightarrow$ η ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Εάν $y \neq 0$ έχουμε $\frac{1}{y}(2y - 1) = 2 - \frac{1}{y}$ συνάρτηση του y και άρα ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η

$$f(y) = e^{\int (2 - 1/y) dy} = e^{2y} / |y|.$$

Επιλέγοντας την $f(x) = e^{2y}/y$ έχουμε ότι η ακριβής Δ.Ε.

$$y \frac{e^{2y}}{y} - (2xy - e^{-2y}) \frac{e^{2y}}{y} y' = e^{2y} - (2xe^{2y} - \frac{1}{y}) y' = 0$$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Άρα η γενική λύση είναι $u(x, y) = xe^{2y} - \ln(|y|) = C$

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Άρα η γενική λύση είναι $u(x, y) = xe^{2y} - \ln(|y|) = C$

Γενικές Παρατηρήσεις:

- Η λύση των γραμμικών Δ.Ε. 1ης τάξης που είδαμε

$$y' + p(x)y = f(x)$$

αποτελούν ειδική περίπτωση, με ολοκ. παράγοντα $r(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Βήμα 2 Εάν $u(x, y) = c$ είναι η γενική λύση τότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2y}$, ολοκληρώνοντας

$$u(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

Βήμα 3 Παραγωγίζοντας ως προς y και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2xe^{2y} - \frac{1}{y})$ παίρνουμε

$$2xe^{2y} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xe^{2y} + g'(y) \Rightarrow g(y) = -\ln(|y|).$$

Άρα η γενική λύση είναι $u(x, y) = xe^{2y} - \ln(|y|) = C$

Γενικές Παρατηρήσεις:

- Η λύση των γραμμικών Δ.Ε. 1ης τάξης που είδαμε

$$y' + p(x)y = f(x)$$

αποτελούν ειδική περίπτωση, με ολοκ. παράγοντα $r(x) = e^{\int p(x)dx}$.

- Στις γραμμικές Δ.Ε. μπορούμε να έχουμε γενική λύση με μία αυθαίρετη σταθερά (από την οποία έπονται όλες οι λύσεις). Στις μη-γραμμικές αυτό δεν ισχύει (συνήθως έχουμε πεπλεγμένη λύση).