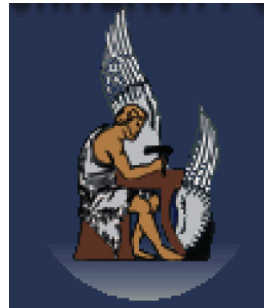


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 2η



Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2018

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθεις *vs* Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση y εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. το t) και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους της.

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθεις vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση y εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. το t) και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους της.

$$\text{Συμβολισμός: } y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$$

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθεις vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση y εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. το t) και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους της.

$$\text{Συμβολισμός: } y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Μ.Δ.Ε.) η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και η εξίσωση περιέχει μερικές παραγώγους της.

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθειες vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση y εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. το t) και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθειες παραγώγους της.

$$\text{Συμβολισμός: } y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$$

Στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Μ.Δ.Ε.) η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και η εξίσωση περιέχει μερικές παραγώγους της.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Εξίσωση Διάχυσης}$$

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθειες vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση y εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. το t) και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθειες παραγώγους της.

$$\text{Συμβολισμός: } y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$$

Στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Μ.Δ.Ε.) η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και η εξίσωση περιέχει μερικές παραγώγους της.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Εξίσωση Διάχυσης}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Κυματική Εξίσωση}$$

- **Τάξη της Δ.Ε.**

Είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

- **Τάξη της Δ.Ε.**

Είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Η γενική μορφή μία Σ.Δ.Ε. n —τάξης συμβολίζεται ως

$$F(t, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

- **Τάξη της Δ.Ε.**

Είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Η γενική μορφή μία Σ.Δ.Ε. n —τάξης συμβολίζεται ως

$$F(t, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Παράδειγμα:

$$y'' + 3e^t + yy' = t^4$$

- **Τάξη της Δ.Ε.**

Είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Η γενική μορφή μία Σ.Δ.Ε. n —τάξης συμβολίζεται ως

$$F(t, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Παράδειγμα:

$$y'' + 3e^t + yy' = t^4$$

Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$y^{(n)} = f((t, y', y'', \dots y^{(n-1)})$$

- **Τάξη της Δ.Ε.**

Είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Η γενική μορφή μία Σ.Δ.Ε. n —τάξης συμβολίζεται ως

$$F(t, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Παράδειγμα:

$$y'' + 3e^t + yy' = t^4$$

Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$y^{(n)} = f((t, y', y'', \dots y^{(n-1)}))$$

Μία συνάρτηση $y(t)$ ορισμένη σ' ένα διάστημα I είναι **λύση** της Δ.Ε. (1) αν είναι τουλάχιστον n —φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την (1).

- **Γραμμικές και μη Γραμμικές Εξισώσεις**

- Γραμμικές και μη Γραμμικές Εξισώσεις

Η Δ.Ε. $F(t, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ λέγεται γραμμική αν κάθε όρος που περιέχει την y ή κάποια από τις $y', y'', \dots y^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

- Γραμμικές και μη Γραμμικές Εξισώσεις

Η Δ.Ε. $F(t, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ λέγεται γραμμική αν κάθε όρος που περιέχει την y ή κάποια από τις $y', y'', \dots y^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

Η γενική μορφή γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = g(t)$$

- Γραμμικές και μη Γραμμικές Εξισώσεις

Η Δ.Ε. $F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ λέγεται γραμμική αν κάθε όρος που περιέχει την y ή κάποια από τις $y', y'', \dots, y^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

Η γενική μορφή γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = g(t)$$

Παραδείγματα:

$$y'' + t^2 y' + e^t y = \sin(t), \quad \text{γραμμική}$$

- Γραμμικές και μη Γραμμικές Εξισώσεις

Η Δ.Ε. $F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ λέγεται γραμμική αν κάθε όρος που περιέχει την y ή κάποια από τις $y', y'', \dots, y^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

Η γενική μορφή γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = g(t)$$

Παραδείγματα:

$$y'' + t^2 y' + e^t y = \sin(t), \quad \text{γραμμική}$$

$$y'' + yy' = t^2, \quad \text{μη-γραμμική}$$

- Γραμμικές και μη Γραμμικές Εξισώσεις

Η Δ.Ε. $F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ λέγεται γραμμική αν κάθε όρος που περιέχει την y ή κάποια από τις $y', y'', \dots, y^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

Η γενική μορφή γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = g(t)$$

Παραδείγματα:

$$y'' + t^2 y' + e^t y = \sin(t), \quad \text{γραμμική}$$

$$y'' + yy' = t^2, \quad \text{μη-γραμμική}$$

$$t^3 y'' + ty' + (\cos(t) - t)y = 0 \quad \text{γραμμική}$$

• Γραμμικές και μη Γραμμικές Εξισώσεις

Η Δ.Ε. $F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ λέγεται γραμμική αν κάθε όρος που περιέχει την y ή κάποια από τις $y', y'', \dots, y^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

Η γενική μορφή γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = g(t)$$

Παραδείγματα:

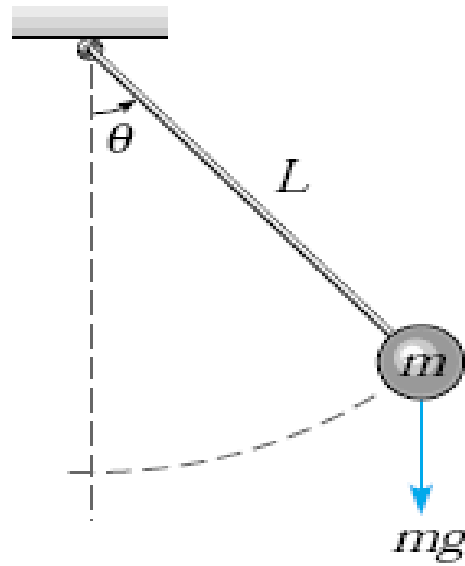
$$y'' + t^2 y' + e^t y = \sin(t), \quad \text{γραμμική}$$

$$y'' + yy' = t^2, \quad \text{μη-γραμμική}$$

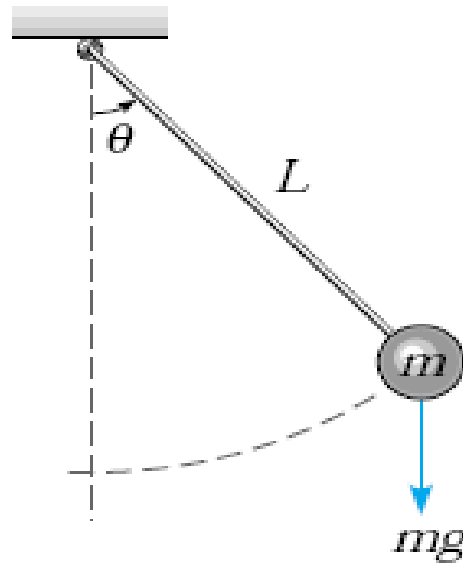
$$t^3 y'' + ty' + (\cos(t) - t)y = 0 \quad \text{γραμμική}$$

$$y' + \sin(y) = t \quad \text{μη-γραμμική}$$

Εκκρεμές σε ταλάντωση

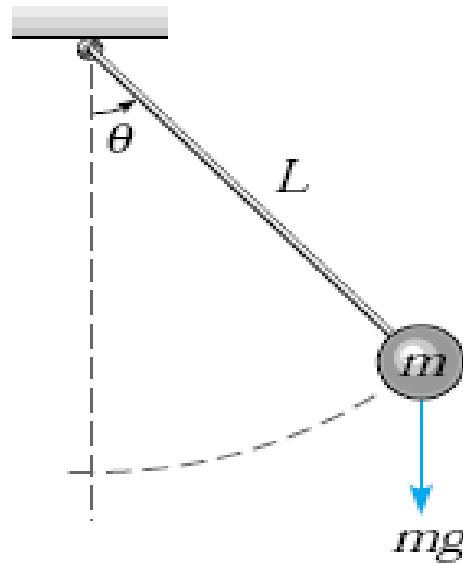


Εκκρεμές σε ταλάντωση



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

Εκκρεμές σε ταλάντωση



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \text{υπόθεση ότι} \quad \sin(\theta) \approx \theta$$

Γραμμικοποίηση!

- Ομογενής *vs* μη-ομογενής Δ.Ε

Μία Σ.Δ.Ε λέγεται ομογενής αν έχει ως λύση τη μηδενική συνάρτηση.

- Ομογενής *vs* μη-ομογενής Δ.Ε

Μία Σ.Δ.Ε λέγεται ομογενής αν έχει ως λύση τη μηδενική συνάρτηση.

Η γενική μορφή ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0$$

- Ομογενής *vs* μη-ομογενής Δ.Ε

Μία Σ.Δ.Ε λέγεται ομογενής αν έχει ως λύση τη μηδενική συνάρτηση.

Η γενική μορφή ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0$$

Παραδείγματα:

$$y'' + t^2y' + e^ty = 0, \quad \text{ομογενής}$$

- Ομογενής *vs* μη-ομογενής Δ.Ε

Μία Σ.Δ.Ε λέγεται ομογενής αν έχει ως λύση τη μηδενική συνάρτηση.

Η γενική μορφή ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0$$

Παραδείγματα:

$$y'' + t^2y' + e^ty = 0, \quad \text{ομογενής}$$

$$y'' + yy' = t^2, \quad \text{μη-ομογενής}$$

- Ομογενής *vs* μη-ομογενής Δ.Ε

Μία Σ.Δ.Ε λέγεται ομογενής αν έχει ως λύση τη μηδενική συνάρτηση.

Η γενική μορφή ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0$$

Παραδείγματα:

$$y'' + t^2y' + e^ty = 0, \quad \text{ομογενής}$$

$$y'' + yy' = t^2, \quad \text{μη-ομογενής}$$

$$t^3y'' + ty' + (\cos(t) - t)y = 0 \quad \text{ομογενής γραμμική}$$

- Ομογενής *vs* μη-ομογενής Δ.Ε

Μία Σ.Δ.Ε λέγεται ομογενής αν έχει ως λύση τη μηδενική συνάρτηση.

Η γενική μορφή ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. τάξης n

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0$$

Παραδείγματα:

$$y'' + t^2y' + e^ty = 0, \quad \text{ομογενής}$$

$$y'' + yy' = t^2, \quad \text{μη-ομογενής}$$

$$t^3y'' + ty' + (\cos(t) - t)y = 0 \quad \text{ομογενής γραμμική}$$

$$y' + \cos(y) = 0 \quad \text{μη-ομογενής (μη-γραμμική)}$$

- **Αρχικές συνθήκες**

Ορισμός: Αν για τη Σ.Δ.Ε. θέλουμε η εξαρτημένη μεταβλητή και οι παράγωγοί της να ικανοποιούν συνθήκες για μια συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε αυτές οι συνθήκες ονομάζονται αρχικές συνθήκες και το πρόβλημα ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** (Π.Α.Τ)

- **Αρχικές συνθήκες**

Ορισμός: Αν για τη Σ.Δ.Ε. θέλουμε η εξαρτημένη μεταβλητή και οι παράγωγοί της να ικανοποιούν συνθήκες για μια συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε αυτές οι συνθήκες ονομάζονται αρχικές συνθήκες και το πρόβλημα ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** (Π.Α.Τ)

Παράδειγμα Ια

$$x(t)'' = g$$

- **Αρχικές συνθήκες**

Ορισμός: Αν για τη Σ.Δ.Ε. θέλουμε η εξαρτημένη μεταβλητή και οι παράγωγοί της να ικανοποιούν συνθήκες για μια συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε αυτές οι συνθήκες ονομάζονται αρχικές συνθήκες και το πρόβλημα ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** (Π.Α.Τ)

Παράδειγμα ΙΙα

$$x(t)'' = g$$

Όλες οι λύσεις (γενική λύση)

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

- **Αρχικές συνθήκες**

Ορισμός: Αν για τη Σ.Δ.Ε. θέλουμε η εξαρτημένη μεταβλητή και οι παράγωγοί της να ικανοποιούν συνθήκες για μια συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε αυτές οι συνθήκες ονομάζονται αρχικές συνθήκες και το πρόβλημα ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** (Π.Α.Τ)

Παράδειγμα ΙΙα

$$x(t)'' = g$$

Όλες οι λύσεις (γενική λύση)

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Με αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = x_0 = C_2$$

$$x'(0) = v_0 = C_1$$

• Αρχικές συνθήκες

Ορισμός: Αν για τη Σ.Δ.Ε. θέλουμε η εξαρτημένη μεταβλητή και οι παράγωγοί της να ικανοποιούν συνθήκες για μια συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε αυτές οι συνθήκες ονομάζονται αρχικές συνθήκες και το πρόβλημα ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** (Π.Α.Τ)

Παράδειγμα Ια

$$x(t)'' = g$$

Όλες οι λύσεις (γενική λύση)

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Με αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = x_0 = C_2$$

$$x'(0) = v_0 = C_1$$

Η (ειδική) λύση:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Ορισμός: Μία συνάρτηση $y(t)$ θα λέγεται **αναλυτική λύση** της Δ.Ε. (1) σε κάποιο διάστημα I του t , εάν ικανοποιεί τη Δ.Ε. (1) για όλα τα $t \in I$. Μια σχέση $G(t, y) = 0$ θα λέγεται **πεπλεγμένη λύση** της Δ.Ε. (1) σε κάποιο διάστημα I του t , εάν ορίζει κάποια αναλυτική λύσης της (1) στο I .

Ορισμός: Μία συνάρτηση $y(t)$ θα λέγεται **αναλυτική λύση** της Δ.Ε. (1) σε κάποιο διάστημα I του t , εάν ικανοποιεί τη Δ.Ε. (1) για όλα τα $t \in I$. Μια σχέση $G(t, y) = 0$ θα λέγεται **πεπλεγμένη λύση** της Δ.Ε. (1) σε κάποιο διάστημα I του t , εάν ορίζει κάποια αναλυτική λύσης της (1) στο I .

Παράδειγμα

$$yy' - t = 0,$$

η έκφραση

$$G(t, y) = t^2 - y^2 - C = 0, \quad C \text{ σταθερά,}$$

περιέχει τη λύση.

- **Ολοκληρωτικές καμπύλες** μιας Σ.Δ.Ε.

Ονομάζονται οι γραφικές παραστάσεις των μερικών (ειδικών) λύσεων μιας Δ.Ε.

Γενικότερα, αν η λύση μιάς Δ.Ε. τάξης n περιέχει n παραμέτρους $C_1, C_2, \dots, C_n$, τότε παριστάνει μία n —παραμετρική οικογένεια καμπυλών: των ολοκληρωτικών καμπυλών της Δ.Ε. n —τάξης.

- **Ολοκληρωτικές καμπύλες** μιας Σ.Δ.Ε.

Ονομάζονται οι γραφικές παραστάσεις των μερικών (ειδικών) λύσεων μιας Δ.Ε.

Γενικότερα, αν η λύση μίας Δ.Ε. τάξης n περιέχει n παραμέτρους $C_1, C_2, \dots, C_n$, τότε παριστάνει μία n —παραμετρική οικογένεια καμπυλών: των ολοκληρωτικών καμπυλών της Δ.Ε. n —τάξης.

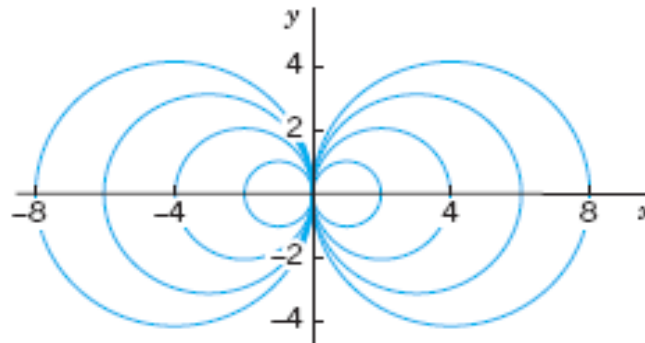
(Αντίστροφο) παράδειγμα: Να βρεθεί η Δ.Ε. με γενική λύση την οικογένεια καμπυλών τους κύκλους που έχουν κέντρο στον x —άξονα και διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

- **Ολοκληρωτικές καμπύλες** μιας Σ.Δ.Ε.

Ονομάζονται οι γραφικές παραστάσεις των μερικών (ειδικών) λύσεων μιας Δ.Ε.

Γενικότερα, αν η λύση μίας Δ.Ε. τάξης n περιέχει n παραμέτρους $C_1, C_2, \dots, C_n$, τότε παριστάνει μία n —παραμετρική οικογένεια καμπυλών: των ολοκληρωτικών καμπυλών της Δ.Ε. n —τάξης.

(Αντίστροφο) παράδειγμα: Να βρεθεί η Δ.Ε. με γενική λύση την οικογένεια καμπυλών τους κύκλους που έχουν κέντρο στον x —άξονα και διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

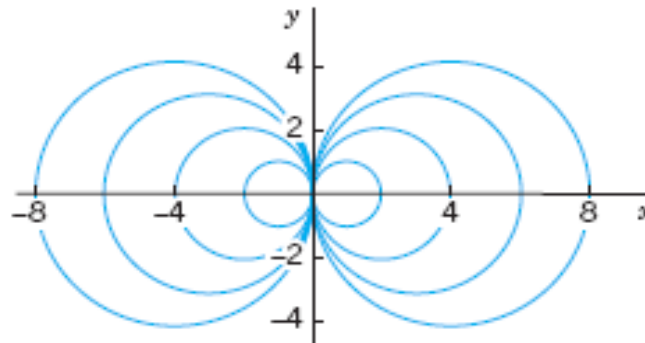


- **Ολοκληρωτικές καμπύλες** μιας Σ.Δ.Ε.

Ονομάζονται οι γραφικές παραστάσεις των μερικών (ειδικών) λύσεων μιας Δ.Ε.

Γενικότερα, αν η λύση μίας Δ.Ε. τάξης n περιέχει n παραμέτρους $C_1, C_2, \dots, C_n$, τότε παριστάνει μία n —παραμετρική οικογένεια καμπυλών: των ολοκληρωτικών καμπυλών της Δ.Ε. n —τάξης.

(Αντίστροφο) παράδειγμα: Να βρεθεί η Δ.Ε. με γενική λύση την οικογένεια καμπυλών τους κύκλους που έχουν κέντρο στον x —άξονα και διέρχονται από την αρχή των αξόνων.



Οι κύκλοι έχουν τη μορφή

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2$$

παραγωγίζοντας

$$2(x - C) + 2yy' = 0 \implies C = x + yy'$$

Οι κύκλοι έχουν τη μορφή

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2$$

παραγωγίζοντας

$$2(x - C) + 2yy' = 0 \implies C = x + yy'$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση

$$(yy')^2 + y^2 = (x + yy') \implies 2yxy' - y^2 + x^2 = 0$$

Θεμελιώδεις εξισώσεις (και λύσεις)

$$\frac{dy}{dt} = ky \implies y(t) = Ce^{kt}$$

Θεμελιώδεις εξισώσεις (και λύσεις)

$$\frac{dy}{dt} = ky \implies y(t) = Ce^{kt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky \implies y(t) = Ce^{-kt}$$

Θεμελιώδεις εξισώσεις (και λύσεις)

$$\frac{dy}{dt} = ky \implies y(t) = Ce^{kt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky \implies y(t) = Ce^{-kt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y \implies y(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$$

Θεμελιώδεις εξισώσεις (και λύσεις)

$$\frac{dy}{dt} = ky \implies y(t) = Ce^{kt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky \implies y(t) = Ce^{-kt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y \implies y(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2y \implies y(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} = D_1 \cosh(kt) + D_2 \sinh(kt)$$

Μερικά σημαντικά ερωτήματα

(1) Έχει μία Σ.Δ.Ε. πάντα λύση; (Ερώτημα **ύπαρξης**)

Μερικά σημαντικά ερωτήματα

- (1) Έχει μία Σ.Δ.Ε. πάντα λύση; (Ερώτημα **ύπαρξης**)
- (2) Αν μια Σ.Δ.Ε. έχει μία τουλάχιστον λύση, υπάρχουν και άλλες; (Ερώτημα **μοναδικότητας**)

Μερικά σημαντικά ερωτήματα

- (1) Έχει μία Σ.Δ.Ε. πάντα λύση; (Ερώτημα **ύπαρξης**)
- (2) Αν μια Σ.Δ.Ε. έχει μία τουλάχιστον λύση, υπάρχουν και άλλες; (Ερώτημα **μοναδικότητας**)
- (3) Μπορούμε να βρούμε μία λύση μιας δοσμένης Σ.Δ.Ε, και αν ναι, πως; (Ερώτημα **υπολογισιμότητας**)

Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις 1ης Τάξης

ΣΔΕ πρώτης τάξης

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

ΣΔΕ πρώτης τάξης

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

έστω ότι $f(t, y) = f(t)$

$$y' = f(t)$$

τότε

$$\int y' dt = \int f(t) dt + C$$

δηλαδή

$$y(t) = \int f(t) dt + C$$

Επανάληψη από το Διαφορικό Λογισμό

Θεμλιώδες Θεώρημα: Για μία πραγματική και συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \quad \text{είναι συνεχής και ισχύει}$$

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** της f .

Επανάληψη από το Διαφορικό Λογισμό

Θεμλιώδες Θεώρημα: Για μία πραγματική και συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \quad \text{είναι συνεχής και ισχύει}$$

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** της f .

Αλλαγή Μεταβλητής : Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και $\phi : [a, b] \rightarrow I$, τότε

$$\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x)dx = \int_b^a f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

όπου θέσαμε $x = \phi(t)$ και άρα $\frac{dx}{dt} = \phi'(t)$ και άρα $dx = \phi'(t)dt$.

Παράδειγμα

$$y' = e^{-t^2}, \quad y(0) = 1$$

Λύση

$$y(t) = \int e^{-t^2} dt + C = \int_0^t e^{-s^2} ds + 1$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί σε "κλειστή" μορφή (αλλα για δοσμένο t μπορούμε να το υπολογίσουμε αριθμητικά).

Παράδειγμα (μη-γραμμική Δ.Ε.)

$$9yy' = -4t$$

Λύση

$$9 \int y(t)y'(t)dt + 4 \int tdt = C$$

$$9 \int ydy + 4t^2 = C \quad \Rightarrow \quad 9y^2 + 4t^2 = 2C$$

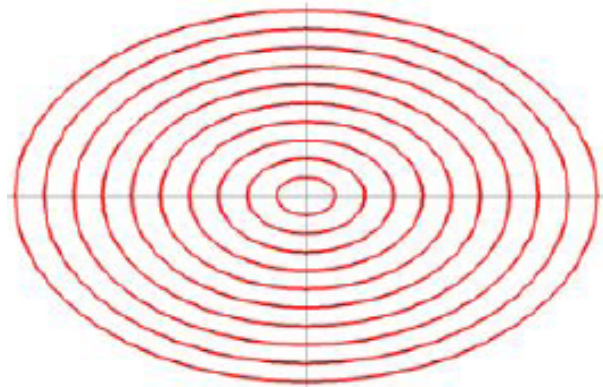
Παράδειγμα (μη-γραμμική Δ.Ε.)

$$9yy' = -4t$$

Λύση

$$9 \int y(t)y'(t)dt + 4 \int tdt = C$$

$$9 \int ydy + 4t^2 = C \Rightarrow 9y^2 + 4t^2 = 2C$$



Σχήμα 1: $\frac{y^2}{4} + \frac{t^2}{9} = D$

Παράδειγμα

$$y' + yt = t$$

$$\frac{y'}{1-y} = t$$

Παράδειγμα

$$y' + yt = t$$

$$\frac{y'}{1-y} = t \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int t dt$$

$$-\ln |1-y| = \frac{t^2}{2} + C$$

Παράδειγμα

$$y' + yt = t$$

$$\frac{y'}{1-y} = t \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int t dt$$

$$-\ln |1-y| = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow y = 1 + Ce^{\frac{-t^2}{2}}$$

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων (συνέχεια)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων (συνέχεια)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

έστω ότι τώρα $f(t, y) = f(y)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

$$t(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$$

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων (συνέχεια)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

έστω ότι τώρα $f(t, y) = f(y)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

$$t(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$$

Παράδειγμα: $y' = ky, \quad y \neq 0$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{ky}$$

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων (συνέχεια)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

έστω ότι τώρα $f(t, y) = f(y)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

$$t(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$$

Παράδειγμα: $y' = ky, \quad y \neq 0$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{ky} \quad \Rightarrow \quad t(y) = \frac{1}{k} \ln |y| + \tilde{C}$$

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων (συνέχεια)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

έστω ότι τώρα $f(t, y) = f(y)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

$$t(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$$

Παράδειγμα: $y' = ky, \quad y \neq 0$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{ky} \quad \Rightarrow \quad t(y) = \frac{1}{k} \ln |y| + \tilde{C} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{k\tilde{C}} e^{kt}$$

Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων (συνέχεια)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad y' = f(t, y)$$

έστω ότι τώρα $f(t, y) = f(y)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

$$t(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$$

Παράδειγμα: $y' = ky, \quad y \neq 0$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{ky} \quad \Rightarrow \quad t(y) = \frac{1}{k} \ln |y| + \tilde{C} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{k\tilde{C}} e^{kt} \quad \Rightarrow \quad y = C e^{kt}$$

Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης:

Έστω f συνάρτηση συνεχής και 1-1 τότε

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης:

Έστω f συνάρτηση συνεχής και 1-1 τότε

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Συνέπεια: Αν $\frac{dy}{dx} = f(y)$ (συμβολισμός Leibniz)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f(y)}$$

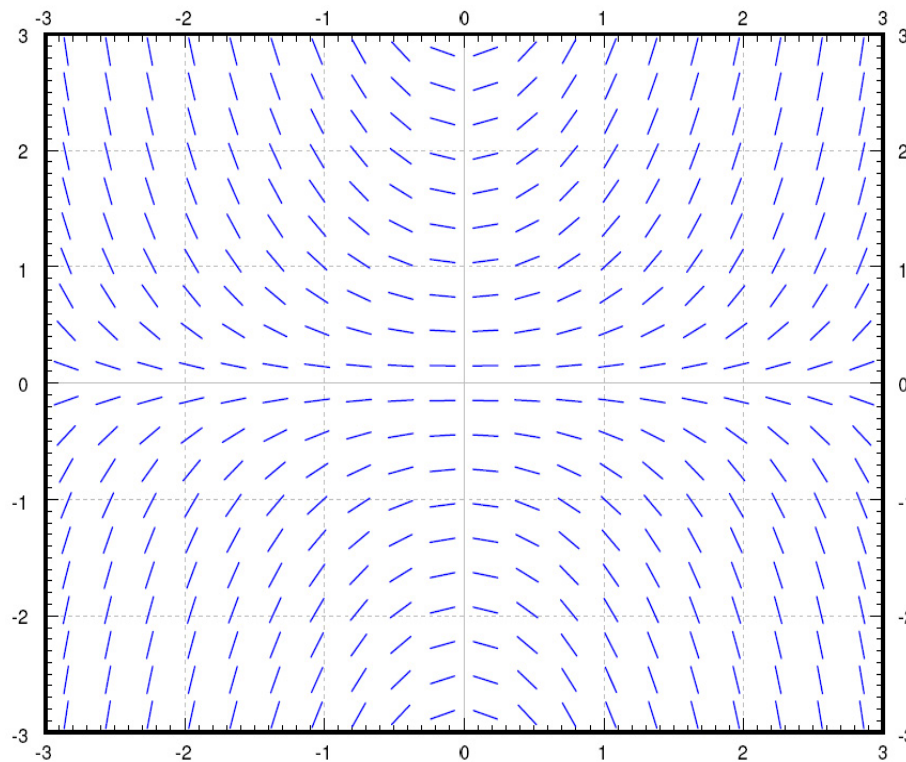
Πεδία Κατευθύνσεων ή Κλίσεων (Slope Fields)

$y' = f(t, y) \Rightarrow$ τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του (t, y) —επιπέδου.

Πεδία Κατευθύνσεων ή Κλίσεων (Slope Fields)

$y' = f(t, y) \Rightarrow$ τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του (t, y) –επιπέδου.

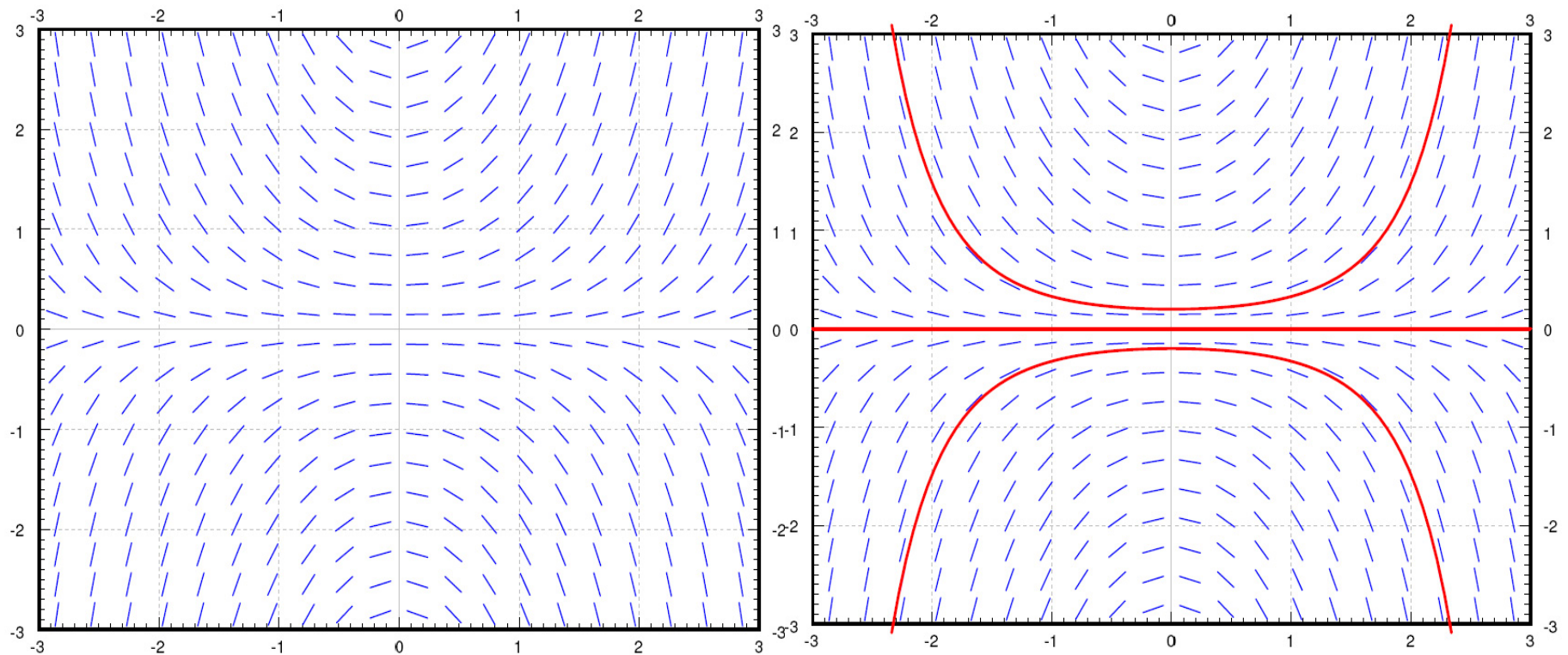
Πεδίο κατευθύνσεων της Δ.Ε. $y' = ty$



Πεδία Κατευθύνσεων ή Κλίσεων (Slope Fields)

$y' = f(t, y) \Rightarrow$ τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του (t, y) –επιπέδου.

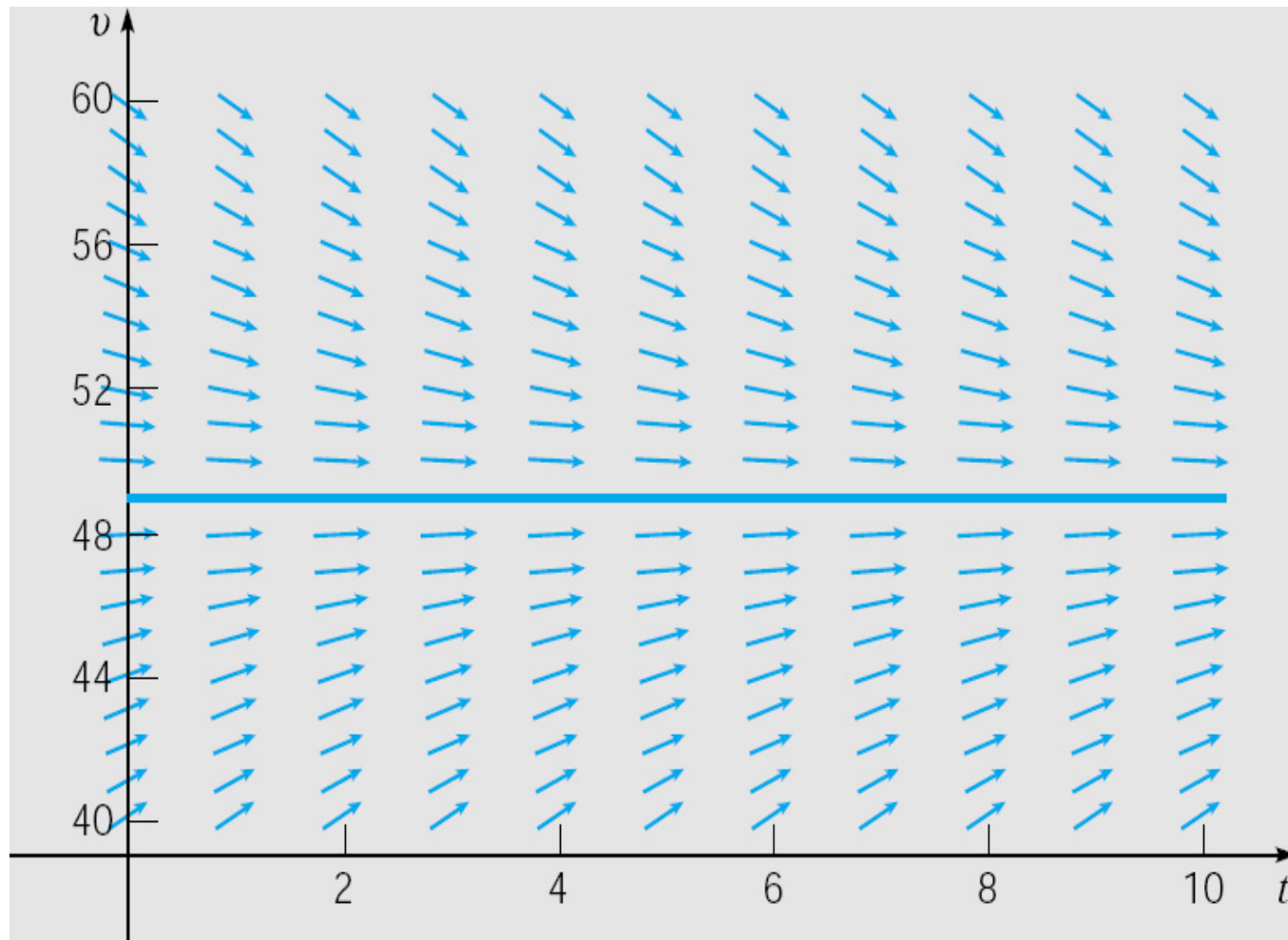
Πεδίο κατευθύνσεων της Δ.Ε. $y' = ty$



και (δεξιά) οι λύσεις για $y(0) = 0.2$, $y(0) = 0$, και $y(0) = -0.2$

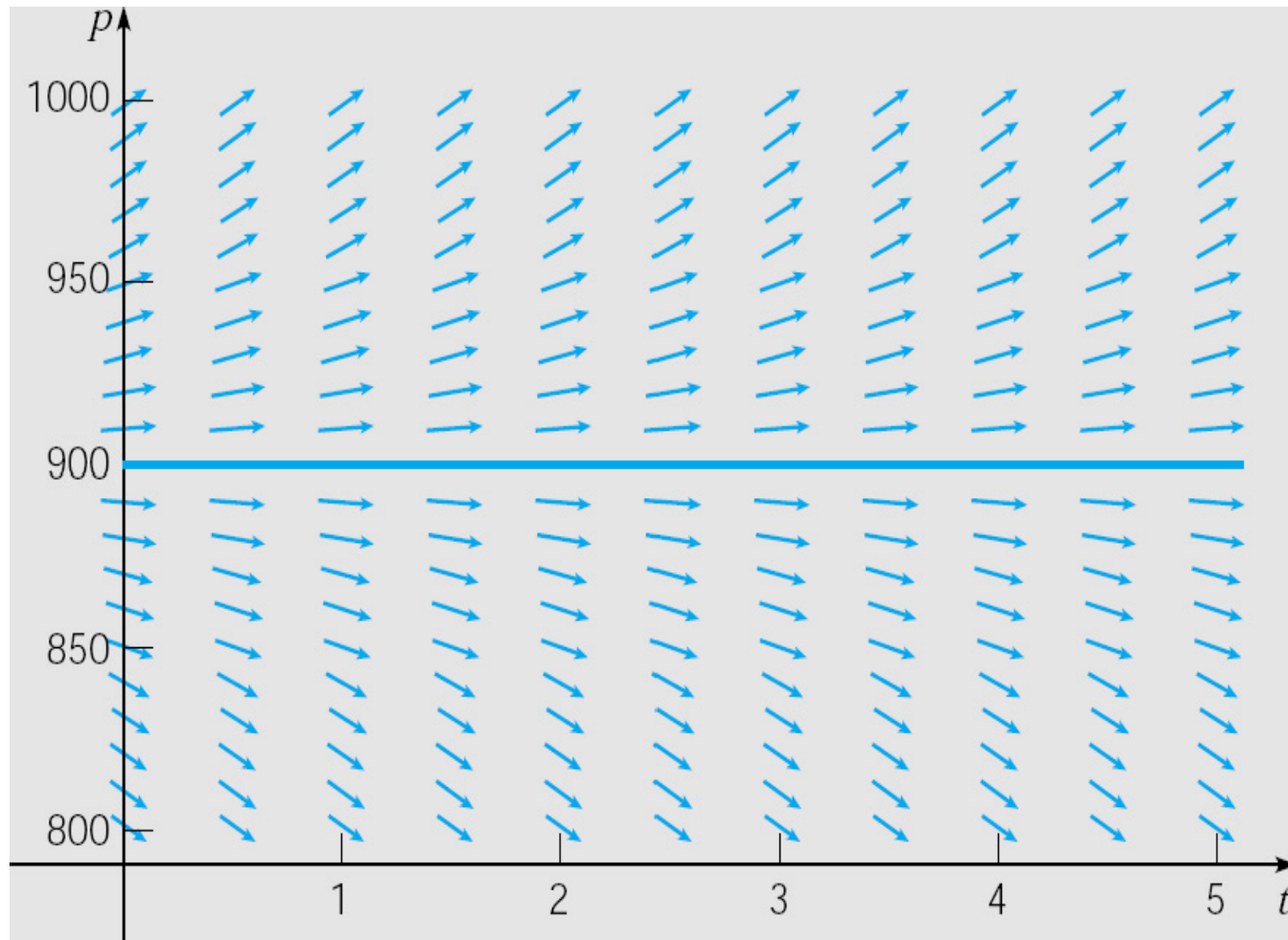
Παράδειγμα (Πτώση σώματος)

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v, \quad m = 10\text{kg}, k = 2\text{kg/sec}$$



Παράδειγμα (πληθυσμιακό πρόβλημα)

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P - 450,$$



Ύπαρξη & Μοναδικότητα της λύσης

Για το Π.Α.Τ

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Υπάρχει λύση;
- Είναι η λύση μοναδική (εάν υπάρχει);

Ύπαρξη & Μοναδικότητα της λύσης

Για το Π.Α.Τ

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Υπάρχει λύση;
- Είναι η λύση μοναδική (εάν υπάρχει);

Παράδειγματα

$$y' = \frac{1}{t}, \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln |t| + C \quad \text{δεν έχει λύση}$$

Ύπαρξη & Μοναδικότητα της λύσης

Για το Π.Α.Τ

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Υπάρχει λύση;
- Είναι η λύση μοναδική (εάν υπάρχει);

Παράδειγματα

$$y' = \frac{1}{t}, \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln |t| + C \quad \text{δεν έχει λύση}$$

$$y' = 2t, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = t^2 + 1 \quad \text{έχει μοναδική λύση}$$

Ύπαρξη & Μοναδικότητα της λύσης

Για το Π.Α.Τ

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Υπάρχει λύση;
- Είναι η λύση μοναδική (εάν υπάρχει);

Παράδειγματα

$$y' = \frac{1}{t}, \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln |t| + C \quad \text{δεν έχει λύση}$$

$$y' = 2t, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = t^2 + 1 \quad \text{έχει μοναδική λύση}$$

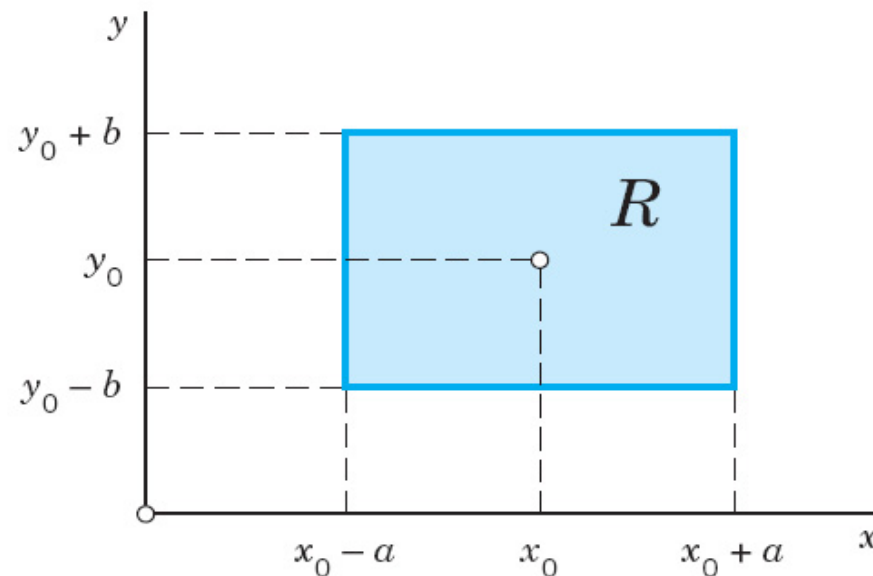
$$ty' = y - 1, \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 + Ct \quad \text{έχει άπειρες λύσεις}$$

Θεώρημα του Picard

Θεώρημα: Εάν (α) η $f(x, y)$ είναι συνεχής και (β) εάν η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής σε κάποια περιοχή, R , γύρω από το (x_0, y_0) , τότε η λύση του Π.Α.Τ.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

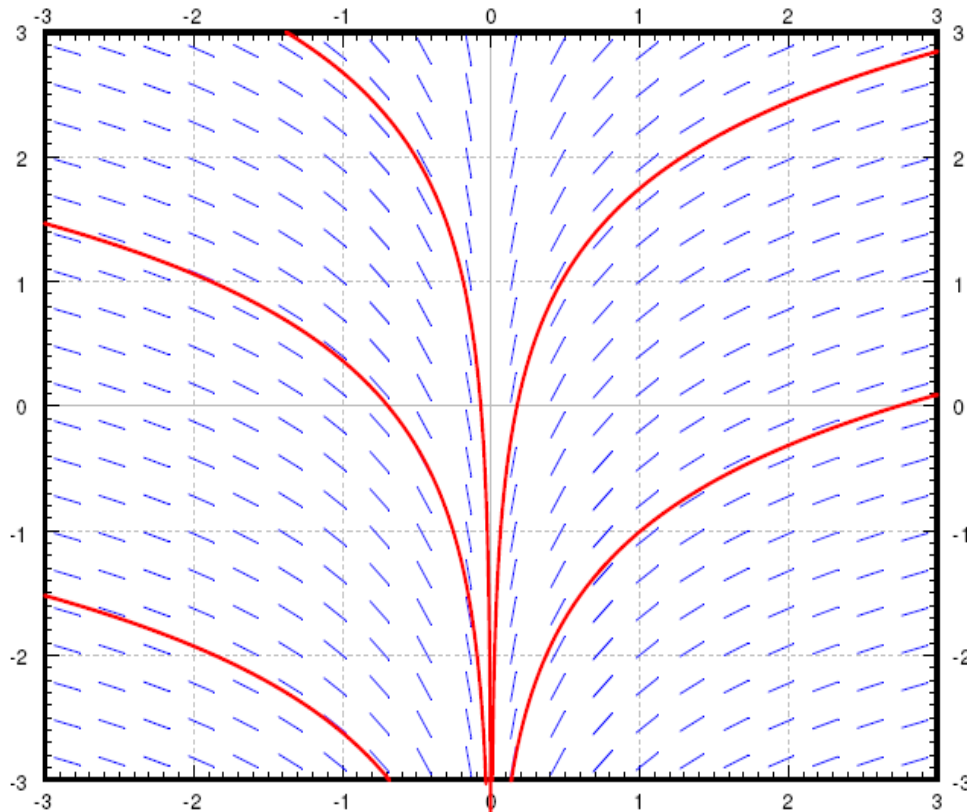
υπάρχει (τουλάχιστον για κάποια x) και είναι μοναδική.



Σχήμα 2: Χωρίο R ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του Π.Α.Τ

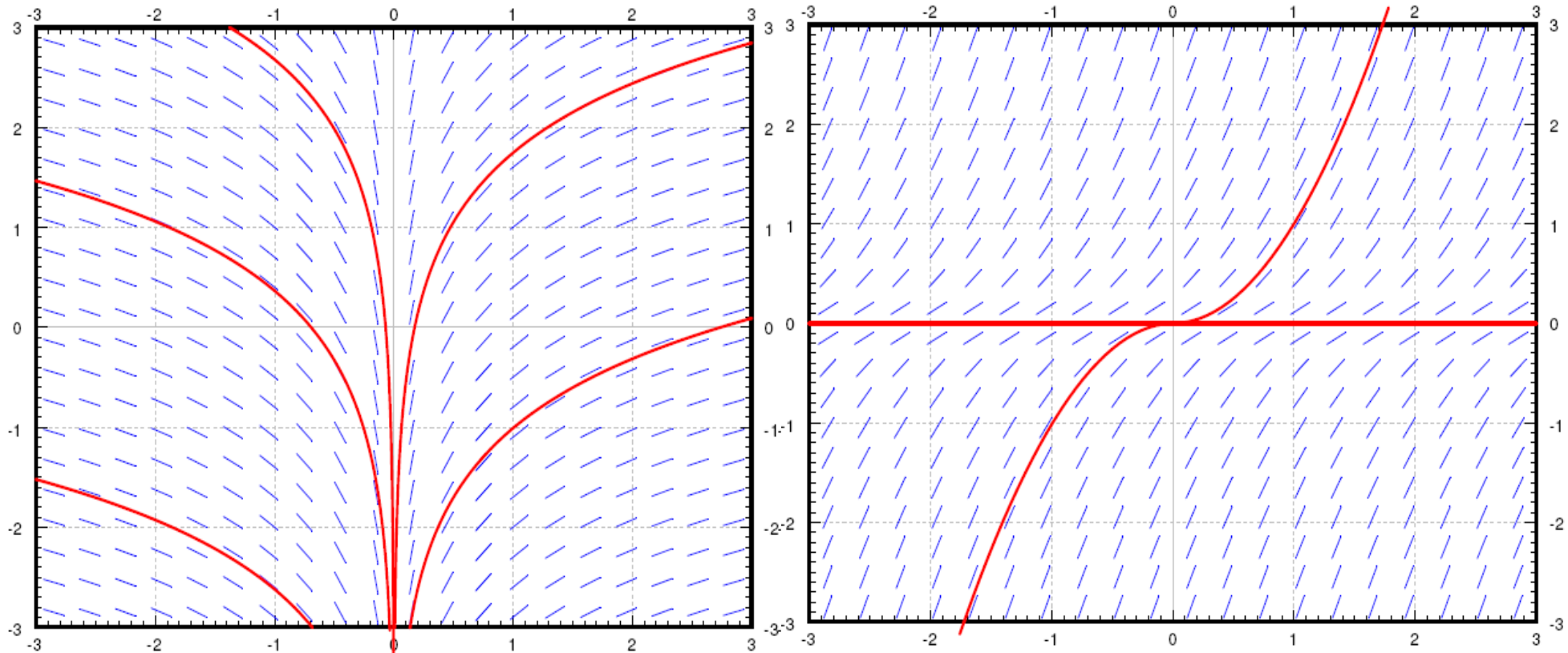
Ύπαρξη & Μοναδικότητα της λύσης

Παραδείγματα: $y' = \frac{1}{x}, y(0) = 0, \Rightarrow y = \ln |x| + C$



Ύπαρξη & Μοναδικότητα της λύσης

Παραδείγματα: $y' = \frac{1}{x}, y(0) = 0, \Rightarrow y = \ln |x| + C$



και της $y' = 2\sqrt{|y|}, y(0) = 0$

Παράδειγμα

$$y' = y^2, \quad y(0) = A$$

Παράδειγμα

$$y' = y^2, \quad y(0) = A$$

Ας υποθέσουμε ότι $A \neq 0$, και άρα $y \neq 0$, συνεπώς (βλ. σελ. 18, αντίστροφη συνάρτηση)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

Παράδειγμα

$$y' = y^2, \quad y(0) = A$$

Ας υποθέσουμε ότι $A \neq 0$, και άρα $y \neq 0$, συνεπώς (βλ. σελ. 18, αντίστροφη συνάρτηση)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$x(y) = -\frac{1}{y} + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{C - x}$$

Παράδειγμα

$$y' = y^2, \quad y(0) = A$$

Ας υποθέσουμε ότι $A \neq 0$, και άρα $y \neq 0$, συνεπώς (βλ. σελ. 18, αντίστροφη συνάρτηση)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$x(y) = -\frac{1}{y} + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{C - x}$$

Από την αρχική συνθήκη $\Rightarrow y(0) = A \Rightarrow C = \frac{1}{A}$ άρα

$$y = \frac{1}{1/A - x}$$

- Αν $A = 0$, τότε η $y = 0$ είναι λύση
- Αν $A = 1$, έχουμε **έκρηξη** της λύσης για $x = 1$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στη περίπτωση $y' = f(t, y)$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στη περίπτωση $y' = f(t, y)$

Έστω ότι

$$f(t, y) = f(t)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(t)g(y)$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στη περίπτωση $y' = f(t, y)$

Έστω ότι

$$f(t, y) = f(t)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(t)g(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} = f(t) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} dt = \int f(t) dt + C$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στη περίπτωση $y' = f(t, y)$

Έστω ότι

$$f(t, y) = f(t)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(t)g(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} = f(t) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} dt = \int f(t) dt + C$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $y = y(t) \Rightarrow dy = y'(t)dt$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + C$$

Παράδειγμα I

$$y' = ty$$

Παράδειγμα I

$$y' = ty$$

Μια λύση η $y = 0$

Παράδειγμα I

$$y' = ty$$

Μια λύση η $y = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int t dt + C$$

Παράδειγμα I

$$y' = ty$$

Μια λύση η $y = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int t dt + C$$

$$\ln |y| = \frac{t^2}{2} + C$$

Παράδειγμα Ι

$$y' = ty$$

Μια λύση η $y = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int t dt + C$$

$$\ln |y| = \frac{t^2}{2} + C$$

$$|y| = e^{\frac{t^2}{2} + C} = e^{\frac{t^2}{2}} e^C = D e^{\frac{t^2}{2}}$$

Παράδειγμα Ι

$$y' = ty$$

Μια λύση η $y = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int t dt + C$$

$$\ln |y| = \frac{t^2}{2} + C$$

$$|y| = e^{\frac{t^2}{2} + C} = e^{\frac{t^2}{2}} e^C = D e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$y = D e^{\frac{t^2}{2}} \quad \forall D$$

Παράδειγμα II

$$t^2 y' = 1 - t^2 + y^2 - t^2 y^2, \quad y(1) = 0$$

Παράδειγμα II

$$t^2 y' = 1 - t^2 + y^2 - t^2 y^2, \quad y(1) = 0$$

$$t^2 y' = (1 - t^2)(1 + y^2)$$

Παράδειγμα II

$$t^2 y' = 1 - t^2 + y^2 - t^2 y^2, \quad y(1) = 0$$

$$t^2 y' = (1 - t^2)(1 + y^2)$$

$$\frac{t^2 y'}{1 + y^2} = (1 - t^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1 + y^2} = \frac{1}{t^2} - 1$$

Παράδειγμα II

$$t^2 y' = 1 - t^2 + y^2 - t^2 y^2, \quad y(1) = 0$$

$$t^2 y' = (1 - t^2)(1 + y^2)$$

$$\frac{t^2 y'}{1 + y^2} = (1 - t^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1 + y^2} = \frac{1}{t^2} - 1$$

$$\arctan(y) = -\frac{1}{t} - t + C \quad \Rightarrow \quad y = \tan\left(-\frac{1}{t} - t + C\right)$$

Παράδειγμα II

$$t^2 y' = 1 - t^2 + y^2 - t^2 y^2, \quad y(1) = 0$$

$$t^2 y' = (1 - t^2)(1 + y^2)$$

$$\frac{t^2 y'}{1 + y^2} = (1 - t^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1 + y^2} = \frac{1}{t^2} - 1$$

$$\arctan(y) = -\frac{1}{t} - t + C \quad \Rightarrow \quad y = \tan\left(-\frac{1}{t} - t + C\right)$$

Από την αρχική συνθήκη $\Rightarrow \tan(-2 + C) = 0 \Rightarrow C = 2$ (ή $2 + \pi, \dots$) άρα

$$y = \tan\left(\frac{1}{t} - t + 2\right)$$

Παράδειγμα III (Πεπλεγμένη ή Έμμεση λύση)

$$y' = \frac{ty}{y^2 + 1}$$

Παράδειγμα III (Πεπλεγμένη ή Έμμεση λύση)

$$y' = \frac{ty}{y^2 + 1}$$

$$\int \frac{y^2 + 1}{y} dy = \int \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \int t dt$$

Παράδειγμα III (Πεπλεγμένη ή Έμμεση λύση)

$$y' = \frac{ty}{y^2 + 1}$$

$$\int \frac{y^2 + 1}{y} dy = \int \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \int t dt$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln |y| = \frac{t^2}{2} + C$$

Παράδειγμα III (Πεπλεγμένη ή Έμμεση λύση)

$$y' = \frac{ty}{y^2 + 1}$$

$$\int \frac{y^2 + 1}{y} dy = \int \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \int t dt$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln |y| = \frac{t^2}{2} + C$$

Η πεπλεγμένη λύση

$$y^2 + 2 \ln |y| = t^2 + C$$

Παράδειγμα III (Πεπλεγμένη ή Έμμεση λύση)

$$y' = \frac{ty}{y^2 + 1}$$

$$\int \frac{y^2 + 1}{y} dy = \int \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \int t dt$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln |y| = \frac{t^2}{2} + C$$

Η πεπλεγμένη λύση

$$y^2 + 2 \ln |y| = t^2 + C$$

Υπάρχει βεβαίως και η λύση $y(t) = 0$ (**ιδιάζουσα λύση**)

Παράδειγμα IV

$$y' + \frac{1}{y}e^{y^2+3t} = 0$$

Παράδειγμα IV

$$y' + \frac{1}{y}e^{y^2+3t} = 0$$

Η ΔΕ γράφεται ως $y' = -\frac{1}{y}e^{y^2}e^{3t}$. Από τη μορφή της εξίσωσης έχουμε ότι $y \neq 0$, και $\frac{1}{y}e^{y^2} \neq 0$.

Παράδειγμα IV

$$y' + \frac{1}{y}e^{y^2+3t} = 0$$

Η ΔΕ γράφεται ως $y' = -\frac{1}{y}e^{y^2}e^{3t}$. Από τη μορφή της εξίσωσης έχουμε ότι $y \neq 0$, και $\frac{1}{y}e^{y^2} \neq 0$.

$$-\frac{y}{e^{y^2}}dy = e^{3t}dt \Rightarrow$$

Παράδειγμα IV

$$y' + \frac{1}{y}e^{y^2+3t} = 0$$

Η ΔΕ γράφεται ως $y' = -\frac{1}{y}e^{y^2}e^{3t}$. Από τη μορφή της εξίσωσης έχουμε ότι $y \neq 0$, και $\frac{1}{y}e^{y^2} \neq 0$.

$$-\frac{y}{e^{y^2}}dy = e^{3t}dt \Rightarrow \int \frac{-y}{e^{y^2}}dy = \int e^{3t}dt + C$$

Παράδειγμα IV

$$y' + \frac{1}{y}e^{y^2+3t} = 0$$

Η ΔΕ γράφεται ως $y' = -\frac{1}{y}e^{y^2}e^{3t}$. Από τη μορφή της εξίσωσης έχουμε ότι $y \neq 0$, και $\frac{1}{y}e^{y^2} \neq 0$.

$$-\frac{y}{e^{y^2}}dy = e^{3t}dt \Rightarrow \int \frac{-y}{e^{y^2}}dy = \int e^{3t}dt + C$$

$$\Rightarrow \int -ye^{-y^2}dy = \frac{1}{3}e^{3t} + C \quad (1)$$

Παράδειγμα IV

$$y' + \frac{1}{y}e^{y^2+3t} = 0$$

Η ΔΕ γράφεται ως $y' = -\frac{1}{y}e^{y^2}e^{3t}$. Από τη μορφή της εξίσωσης έχουμε ότι $y \neq 0$, και $\frac{1}{y}e^{y^2} \neq 0$.

$$-\frac{y}{e^{y^2}}dy = e^{3t}dt \Rightarrow \int \frac{-y}{e^{y^2}}dy = \int e^{3t}dt + C$$

$$\Rightarrow \int -ye^{-y^2}dy = \frac{1}{3}e^{3t} + C \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-y^2} = \frac{1}{3}e^{3t} + C \quad (1)$$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι η κάθε συνάρτηση $y(t)$ που ικανοποιεί την (1).