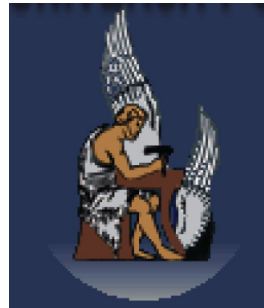


Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 1η



Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

2018

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.
Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103
Ώρες Γραφείου: Τρίτη 12:00-14:00 & Παρασκευή 12:00-14:00
e-mail: adelis@science.tuc.gr

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.

Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103

Ώρες Γραφείου: Τρίτη 12:00-14:00 & Παρασκευή 12:00-14:00

e-mail: adelis@science.tuc.gr

- Ιστοτόπος Μαθήματος:

<https://www.eclass.tuc.gr/courses/MPD276/>

Συνθηματικό: **ΜΑΘ203**

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.
Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103
Ώρες Γραφείου: Τρίτη 12:00-14:00 & Παρασκευή 12:00-14:00
e-mail: adelis@science.tuc.gr
- Ιστοτόπος Μαθήματος:
<https://www.eclass.tuc.gr/courses/MPD276/>
Συνθηματικό: **ΜΑΘ203**
- Προτεινόμενα Συγγράμματα:
 - Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις, Boyce & Di Prima, Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
 - Διαφορικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμοί & Μιγαδικές Συναρτήσεις, Μυλωνάς & Σχοινάς, Εκδόσεις Τζιόλα.

(Απαραίτητες) Βασικές γνώσεις

- **Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός**

- Υπολογισμός (βασικών) παραγώγων & ολοκληρωμάτων
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Ανάλυση σε απλά κλάσματα
- **Μιγαδικοί Αριθμοί**
-

- **Γραμμική Άλγεβρα**

- Λύση γραμμικών συστημάτων, ορίζουσες
- Ιδιοτιμές—Ιδιοδιανύσματα
- Διαγωνοποίηση πινάκων
-

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες - Ορισμοί

Ορισμός Βικιπαιδεία: Διαφορική εξίσωση είναι η μαθηματική εξίσωση η οποία συσχετίζει τις τιμές μιας **άγνωστης συνάρτησης**, μιας ή περισσότερων μεταβλητών και των **παραγώγων** της πρώτου, δεύτερου ή ανώτερου βαθμού.

Οι διαφορικές εξισώσεις παίζουν προεξάρχοντα ρόλο στη φυσική. Επίσης έχουν πολύ σημαντικές εφαρμογές στην τεχνολογία, τα οικονομικά, τη βιολογία και άλλα επιστημονικά πεδία.

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες - Ορισμοί

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες - Ορισμοί

- Τι ονομάζουμε Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (Σ.Δ.Ε.);

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες - Ορισμοί

- Τι ονομάζουμε Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (Σ.Δ.Ε.);

Εξίσωση που περιέχει μία μεταβαλλόμενη ποσότητα (εξαρτημένη μεταβλητή) και παραγώγους της ως προς μία (και μόνο) ανεξάρτητη μεταβλητή.

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες - Ορισμοί

- Τι ονομάζουμε Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (Σ.Δ.Ε.);

Εξίσωση που περιέχει μία μεταβαλλόμενη ποσότητα (εξαρτημένη μεταβλητή) και παραγώγους της ως προς μία (και μόνο) ανεξάρτητη μεταβλητή.

Παράδειγμα: Για την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} = 0.032y(t)$$

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες - Ορισμοί

- Τι ονομάζουμε Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (Σ.Δ.Ε.);

Εξίσωση που περιέχει μία μεταβαλλόμενη ποσότητα (εξαρτημένη μεταβλητή) και παραγώγους της ως προς μία (και μόνο) ανεξάρτητη μεταβλητή.

Παράδειγμα: Για την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} = 0.032y(t)$$

Ο Νόμος του Τραπεζίτη (ή νόμος του Malthus)

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες - Ορισμοί

- Τι ονομάζουμε Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (Σ.Δ.Ε.);

Εξίσωση που περιέχει μία μεταβαλλόμενη ποσότητα (εξαρτημένη μεταβλητή) και παραγώγους της ως προς μία (και μόνο) ανεξάρτητη μεταβλητή.

Παράδειγμα: Για την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} = 0.032y(t)$$

Ο Νόμος του Τραπεζίτη (ή νόμος του Malthus)

- **Επιλύω:** Βρίσκω τη (συνάρτηση) $y \equiv y(t)$, που εξαρτάται από το t (ανεξάρτητη μεταβλητή), και η οποία ικανοποιεί την εξίσωση.

Ένα παράδειγμα: Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

Ένα παράδειγμα: Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

- Νόμος του Νεύτωνα για την ψύξη ενός σώματος όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου ταλαντώνεται στο χρόνο.

Ένα παράδειγμα: Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

- Νόμος του Νεύτωνα για την ψύξη ενός σώματος όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου ταλαντώνεται στο χρόνο.

Επιλύω: Βρίσκω τη y , που εξαρτάται από το t (π.χ. από το χρόνο) και που ικανοποιεί την εξίσωση.

Ένα παράδειγμα: Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

- Νόμος του Νεύτωνα για την ψύξη ενός σώματος όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου ταλαντώνεται στο χρόνο.

Επιλύω: Βρίσκω τη y , που εξαρτάται από το t (π.χ. από το χρόνο) και που ικανοποιεί την εξίσωση.

Μαντεψιά!!

$$y = y(t) = \cos(t) + \sin(t)$$

Ένα παράδειγμα: Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

- Νόμος του Νεύτωνα για την ψύξη ενός σώματος όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου ταλαντώνεται στο χρόνο.

Επιλύω: Βρίσκω τη y , που εξαρτάται από το t (π.χ. από το χρόνο) και που ικανοποιεί την εξίσωση.

Μαντεψιά!!

$$y = y(t) = \cos(t) + \sin(t)$$

Άλλη μαντεψιά!!

$$y = \cos(t) + \sin(t) + e^{-t}$$

Κλάση λύσεων

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

Υπολογιστικές Μηχανές

Κλάση λύσεων

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

Υπολογιστικές Μηχανές

Όλες οι λύσεις:

$$y = \cos(t) + \sin(t) + Ce^{-t}$$

όπου C είναι κάποια σταθερά $\in \mathbb{R}$ (ανεξάρτητη του t)

Κλάση λύσεων

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos(t)$$

Υπολογιστικές Μηχανές

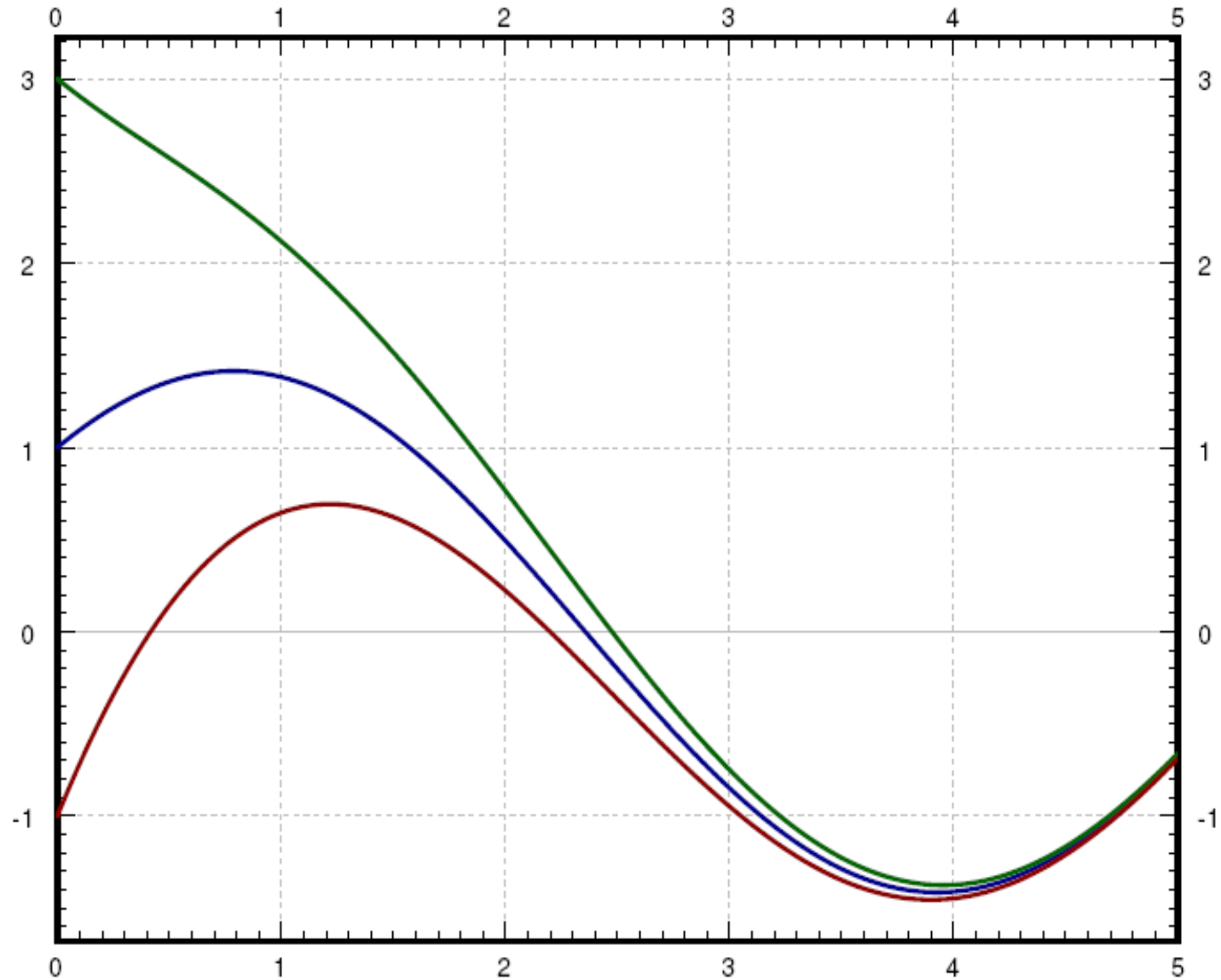
Όλες οι λύσεις:

$$y = \cos(t) + \sin(t) + Ce^{-t}$$

όπου C είναι κάποια σταθερά $\in \mathbb{R}$ (ανεξάρτητη του t)

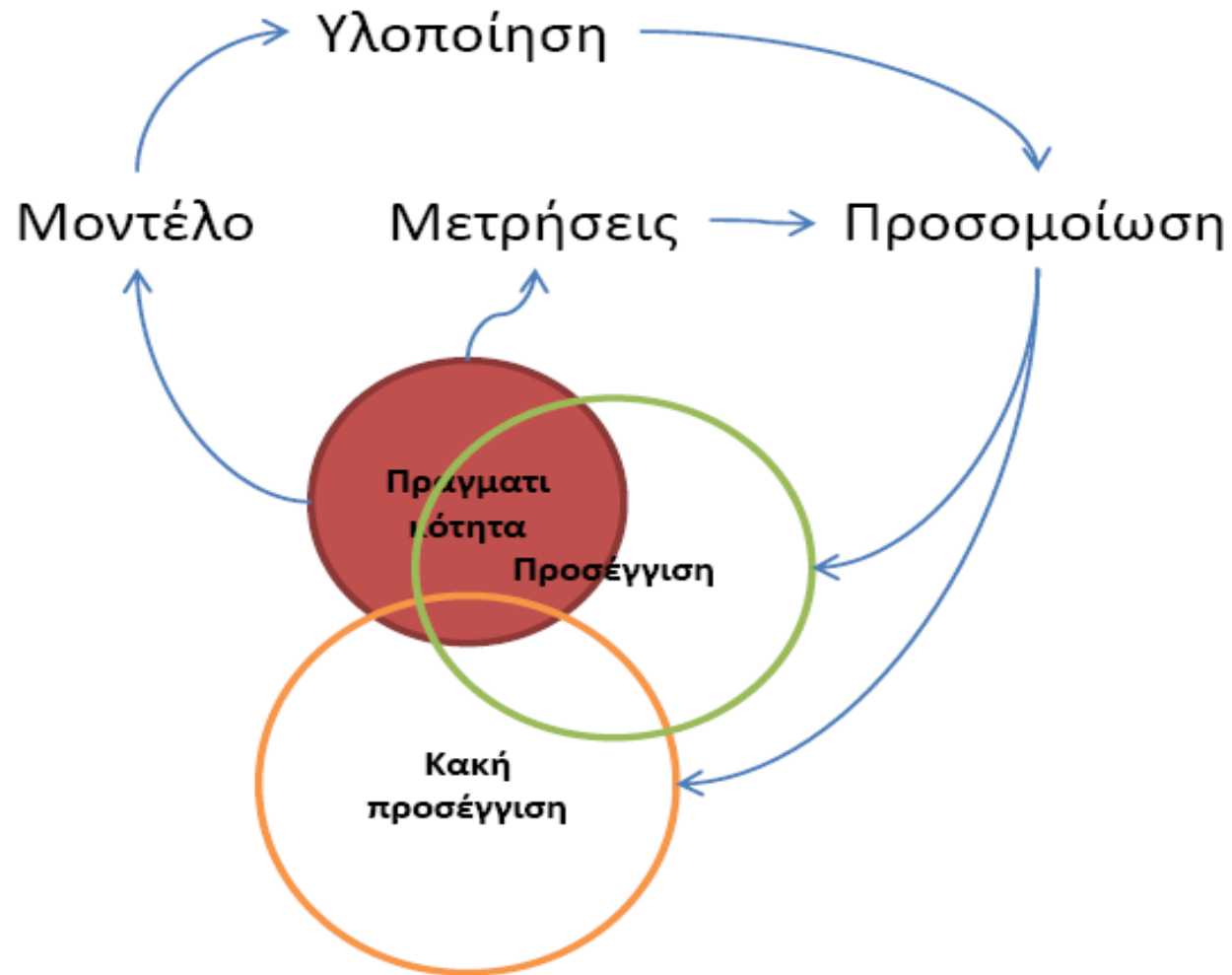
Γιατί πολλές λύσεις; Όλες; Ποιά;;;

Κάποιες λύσεις



Σχήμα 1: Γραφικές παραστάσεις μερικών από τις λύσεις της $\frac{dy}{dt} + y = 2 \cos t$

Μαθηματικά μοντέλα (πρότυπα) & Προσομοιώσεις



Σχήμα 2: Διαφορικές εξισώσεις στη πράξη

Παράδειγμα I

Φυσικό Πρόβλημα: Σ' ένα δοχείο, με αρκετή τροφή, υπάρχουν 100 βακτήρια τη χρονική στιγμή $t = 0$ και 200 βακτήρια μετά από 10 λεπτά.

Παράδειγμα I

Φυσικό Πρόβλημα: Σ' ένα δοχείο, με αρκετή τροφή, υπάρχουν 100 βακτήρια τη χρονική στιγμή $t = 0$ και 200 βακτήρια μετά από 10 λεπτά.

Μοντέλο (μαθηματικό) μεταβολής του πληθυσμού $P(t)$ στο χρόνο

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad \text{όπου } k > 0 \text{ (σταθερά-ρυθμός μεταβολής)}$$

Παράδειγμα I

Φυσικό Πρόβλημα: Σ' ένα δοχείο, με αρκετή τροφή, υπάρχουν 100 βακτήρια τη χρονική στιγμή $t = 0$ και 200 βακτήρια μετά από 10 λεπτά.

Μοντέλο (μαθηματικό) μεταβολής του πληθυσμού $P(t)$ στο χρόνο

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad \text{όπου } k > 0 \text{ (σταθερά-ρυθμός μεταβολής)}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Παράδειγμα I

Φυσικό Πρόβλημα: Σ' ένα δοχείο, με αρκετή τροφή, υπάρχουν 100 βακτήρια τη χρονική στιγμή $t = 0$ και 200 βακτήρια μετά από 10 λεπτά.

Μοντέλο (μαθηματικό) μεταβολής του πληθυσμού $P(t)$ στο χρόνο

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad \text{όπου } k > 0 \text{ (σταθερά-ρυθμός μεταβολής)}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Όμως ξέρουμε ότι για $t = 0$ και $t = 10$:

$$100 = P(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

$$200 = P(10) = 100e^{k \cdot 10}$$

Παράδειγμα I

Φυσικό Πρόβλημα: Σ' ένα δοχείο, με αρκετή τροφή, υπάρχουν 100 βακτήρια τη χρονική στιγμή $t = 0$ και 200 βακτήρια μετά από 10 λεπτά.

Μοντέλο (μαθηματικό) μεταβολής του πληθυσμού $P(t)$ στο χρόνο

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad \text{όπου } k > 0 \text{ (σταθερά-ρυθμός μεταβολής)}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$P(t) = Ce^{kt}$$

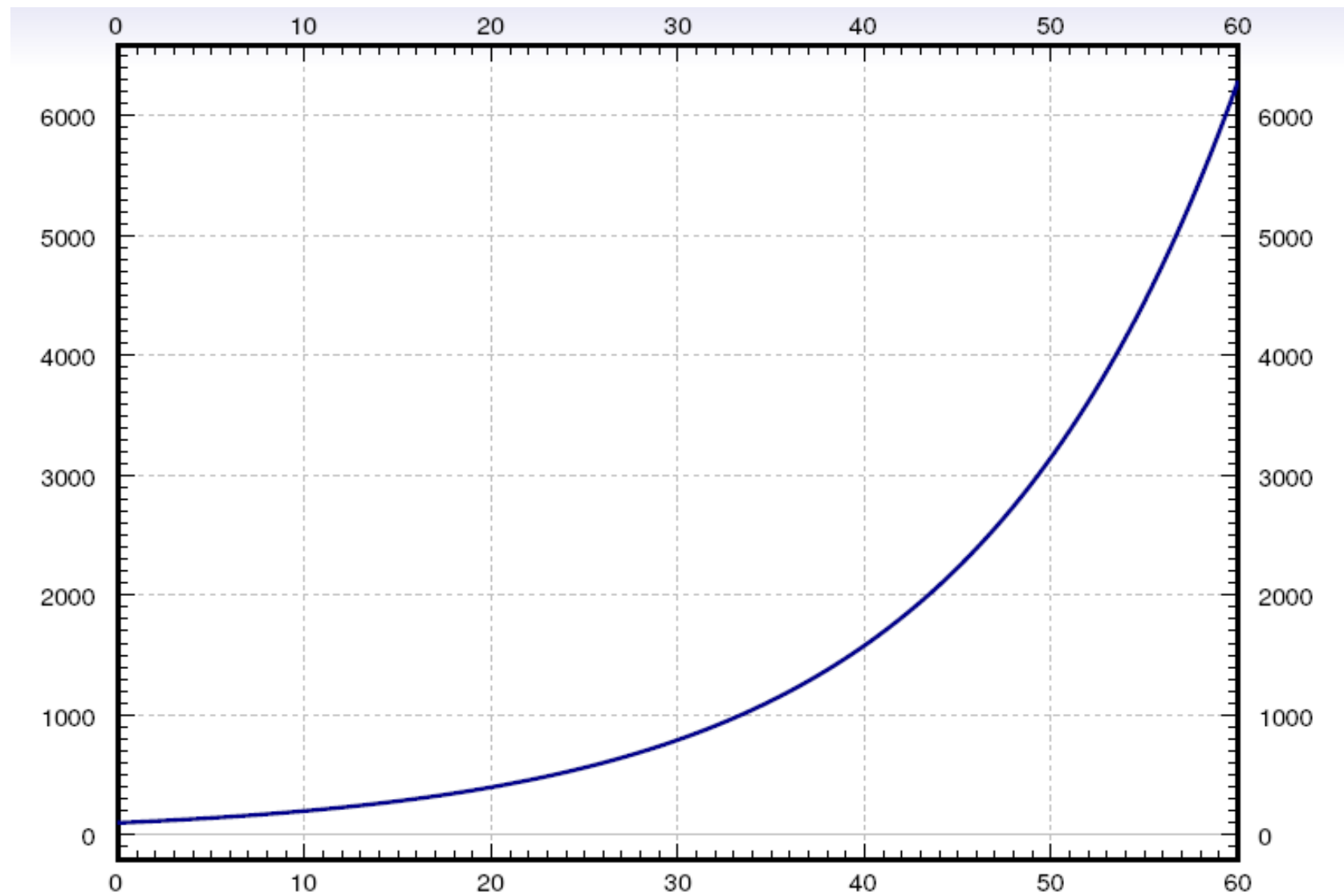
Όμως ξέρουμε ότι για $t = 0$ και $t = 10$:

$$100 = P(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

$$200 = P(10) = 100e^{k \cdot 10}$$

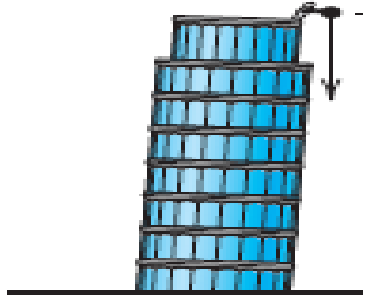
Η λύση:

$$P(t) = 100e^{(\ln 2)/10 \cdot t} \approx 100e^{0.069t}$$



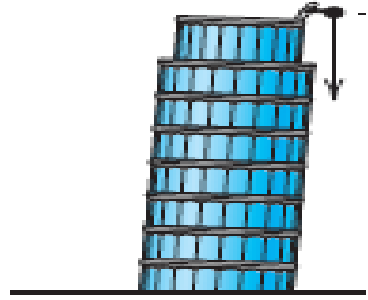
Σχήμα 3: Αύξηση του πληθυσμού των βακτηριδίων σε 60 λεπτά

Παράδειγμα ΙΙα



Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο επιδρά μόνο η βαρύτητα, g , ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ από τη θέση (ύψος) $x = x_0$ με ταχύτητα v_0 και έστω $x(t)$ η **θέση** του σώματος στο χρόνο t .

Παράδειγμα Ια

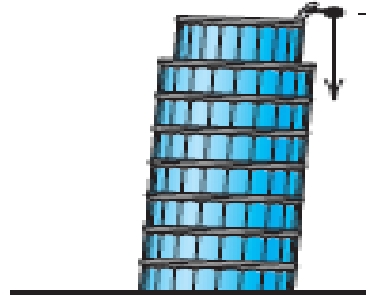


Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο επιδρά μόνο η βαρύτητα, g , ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ από τη θέση (ύψος) $x = x_0$ με ταχύτητα v_0 και έστω $x(t)$ η **θέση** του σώματος στο χρόνο t .

Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$F = m\gamma \Rightarrow mg = mx'' \Rightarrow x' = gt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα ΙΙα



Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο επιδρά μόνο η βαρύτητα, g , ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ από τη θέση (ύψος) $x = x_0$ με ταχύτητα v_0 και έστω $x(t)$ η **θέση** του σώματος στο χρόνο t .

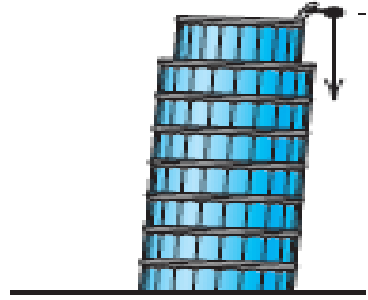
Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$F = m\gamma \Rightarrow mg = mx'' \Rightarrow x' = gt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα Ια



Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο επιδρά μόνο η βαρύτητα, g , ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ από τη θέση (ύψος) $x = x_0$ με ταχύτητα v_0 και έστω $x(t)$ η **θέση** του σώματος στο χρόνο t .

Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$F = m\gamma \Rightarrow mg = mx'' \Rightarrow x' = gt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Όλες) οι λύσεις

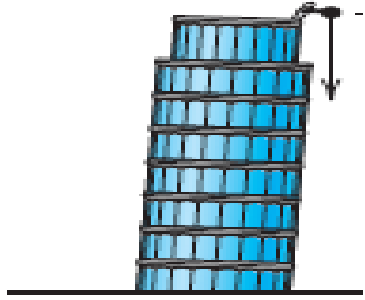
$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Όμως ξέρουμε ότι στο χρόνο $t = 0$:

$$x_0 = x(0) = C_2$$

$$v_0 = x'(0) = C_1$$

Παράδειγμα ΙΙα



Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο επιδρά μόνο η βαρύτητα, g , ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ από τη θέση (ύψος) $x = x_0$ με ταχύτητα v_0 και έστω $x(t)$ η **θέση** του σώματος στο χρόνο t .

Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$F = m\gamma \Rightarrow mg = mx'' \Rightarrow x' = gt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Όμως ξέρουμε ότι στο χρόνο $t = 0$:

$$x_0 = x(0) = C_2$$

$$v_0 = x'(0) = C_1$$

Η λύση:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Παράδειγμα ΙΙβ

Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο τώρα επιδρά και η αντίσταση του αέρα, ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ με ταχύτητα v_0 . Ποιά η **ταχύτητά** του $u(t)$ στο χρόνο t ;

Παράδειγμα ΙΙβ

Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο τώρα επιδρά και η αντίσταση του αέρα, ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ με ταχύτητα v_0 . Ποιά η **ταχύτητά** του $u(t)$ στο χρόνο t ;

Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$m\gamma = F \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad k > 0 \quad \text{σταθερά επιβράδυνσης του αέρα}$$

Παράδειγμα ΙΙβ

Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο τώρα επιδρά και η αντίσταση του αέρα, ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ με ταχύτητα v_0 . Ποιά η **ταχύτητά** του $u(t)$ στο χρόνο t ;

Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$m\gamma = F \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad k > 0 \quad \text{σταθερά επιβράδυνσης του αέρα}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$v(t) = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Παράδειγμα ΙΙβ

Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο τώρα επιδρά και η αντίσταση του αέρα, ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ με ταχύτητα v_0 . Ποιά η **ταχύτητά** του $u(t)$ στο χρόνο t ;

Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$m\gamma = F \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad k > 0 \quad \text{σταθερά επιβράδυνσης του αέρα}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$v(t) = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Όμως ξέρουμε ότι:

$$v(0) = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad C + \frac{mg}{k} = v_0$$

Παράδειγμα ΙΙβ

Φυσικό Πρόβλημα: Ένα σώμα μάζας m , στο οποίο τώρα επιδρά και η αντίσταση του αέρα, ρίχνεται κάθετα στο χρόνο $t = 0$ με ταχύτητα v_0 . Ποιά η **ταχύτητά** του $u(t)$ στο χρόνο t ;

Μοντέλο (μαθηματικό) Από το νόμο του Νεύτωνα

$$m\gamma = F \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad k > 0 \quad \text{σταθερά επιβράδυνσης του αέρα}$$

(Όλες) οι λύσεις

$$v(t) = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Όμως ξέρουμε ότι:

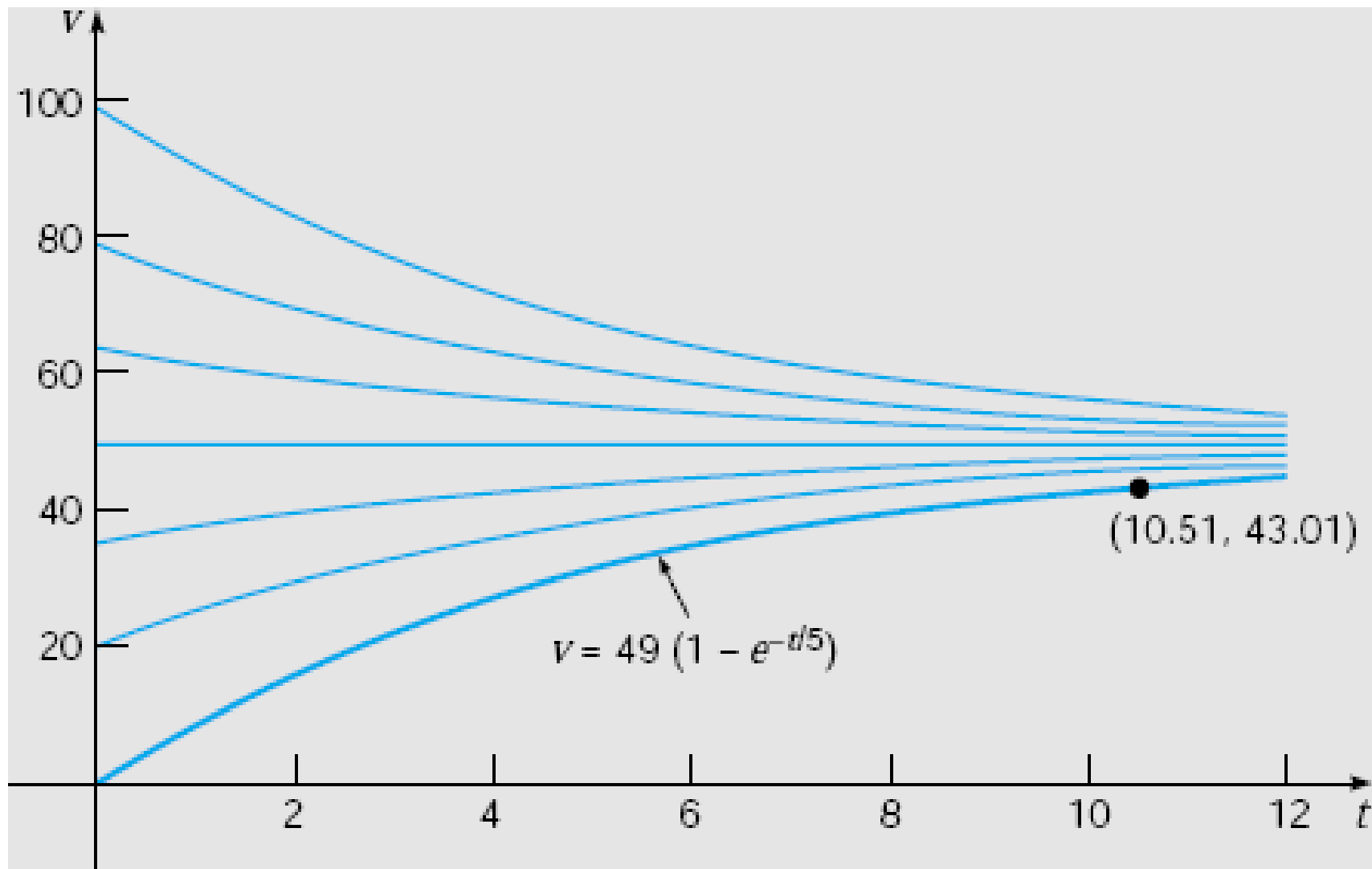
$$v(0) = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad C + \frac{mg}{k} = v_0$$

Η λύση:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

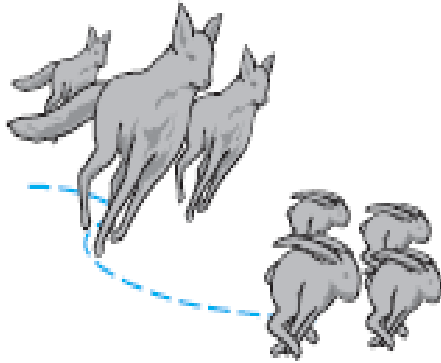
Για $m = 10kg$, $k = 2kg/sec$ και $v(0) = v_0 = 0$ από ύψος $300m$

Για $m = 10kg$, $k = 2kg/sec$ και $v(0) = v_0 = 0$ από ύψος $300m$



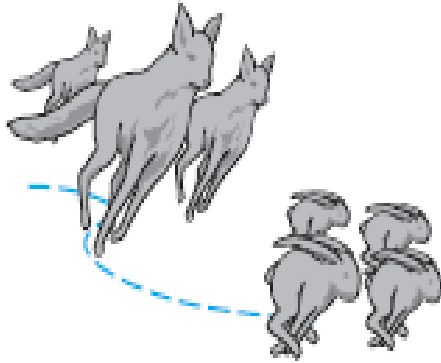
Σχήμα 4: Λύσεις για διαφορετικές (αρχικές) τιμές του v_0

Παράδειγμα IIγ



(Πληθυσμιακό) Πρόβλημα: Σε μία περιοχή ο αριθμός αύξησης ενός είδους ζώων είναι $k=0.5/\mu\eta\nu\alpha$ και ταυτόχρονα υπάρχει μείωση του πληθυσμού κατά $15/\eta\mu\epsilon\rho\alpha$ λόγω κάποιου εισβολέα (ή ασθένειας).

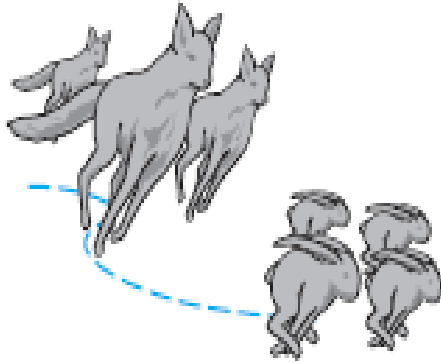
Παράδειγμα IIγ



(Πληθυσμιακό) Πρόβλημα: Σε μία περιοχή ο αριθμός αύξησης ενός είδους ζώων είναι $k=0.5/\mu\eta\nu\alpha$ και ταυτόχρονα υπάρχει μείωση του πληθυσμού κατά $15/\eta\mu\epsilon\rho\alpha$ λόγω κάποιας εισβολέα (ή ασθένειας).

Μοντέλο (μαθηματικό)

Παράδειγμα IIγ

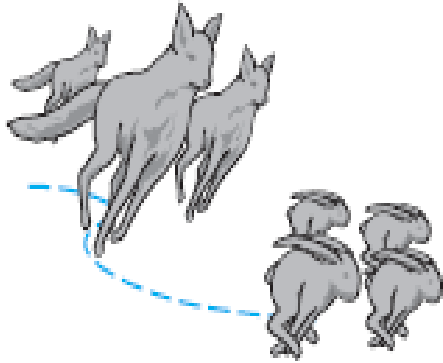


(Πληθυσμιακό) Πρόβλημα: Σε μία περιοχή ο αριθμός αύξησης ενός είδους ζώων είναι $k=0.5/\mu\eta\nu\alpha$ και ταυτόχρονα υπάρχει μείωση του πληθυσμού κατά $15/\eta\mu\epsilon\rho\alpha$ λόγω κάποιου εισβολέα (ή ασθένειας).

Μοντέλο (μαθηματικό)

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(t)$$

Παράδειγμα IIγ

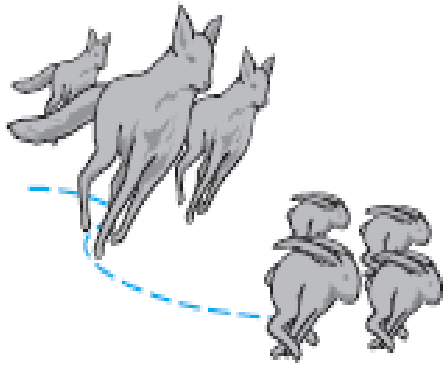


(Πληθυσμιακό) Πρόβλημα: Σε μία περιοχή ο αριθμός αύξησης ενός είδους ζώων είναι $k=0.5/\mu\eta\nu\alpha$ και ταυτόχρονα υπάρχει μείωση του πληθυσμού κατά $15/\eta\mu\epsilon\rho\alpha$ λόγω κάποιου εισβολέα (ή ασθένειας).

Μοντέλο (μαθηματικό)

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{dt} = 0.5P - 450$$

Παράδειγμα IIγ



(Πληθυσμιακό) Πρόβλημα: Σε μία περιοχή ο αριθμός αύξησης ενός είδους ζώων είναι $k=0.5/\mu\eta\nu\alpha$ και ταυτόχρονα υπάρχει μείωση του πληθυσμού κατά $15/\eta\mu\epsilon\rho\alpha$ λόγω κάποιου εισβολέα (ή ασθένειας).

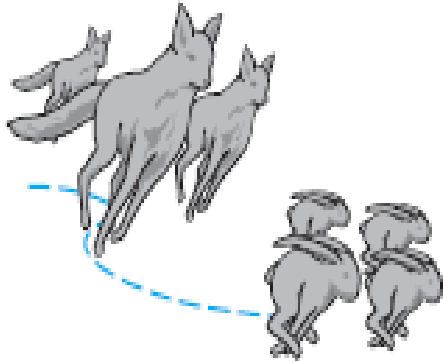
Μοντέλο (μαθηματικό)

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(t) \implies \frac{dP}{dt} = 0.5P - 450$$

Η λύση

$$P(t) = 900 + C e^{t/2}$$

Παράδειγμα IIγ



(Πληθυσμιακό) Πρόβλημα: Σε μία περιοχή ο αριθμός αύξησης ενός είδους ζώων είναι $k=0.5/\mu\eta\nu\alpha$ και ταυτόχρονα υπάρχει μείωση του πληθυσμού κατά $15/\eta\mu\epsilon\rho\alpha$ λόγω κάποιου εισβολέα (ή ασθένειας).

Μοντέλο (μαθηματικό)

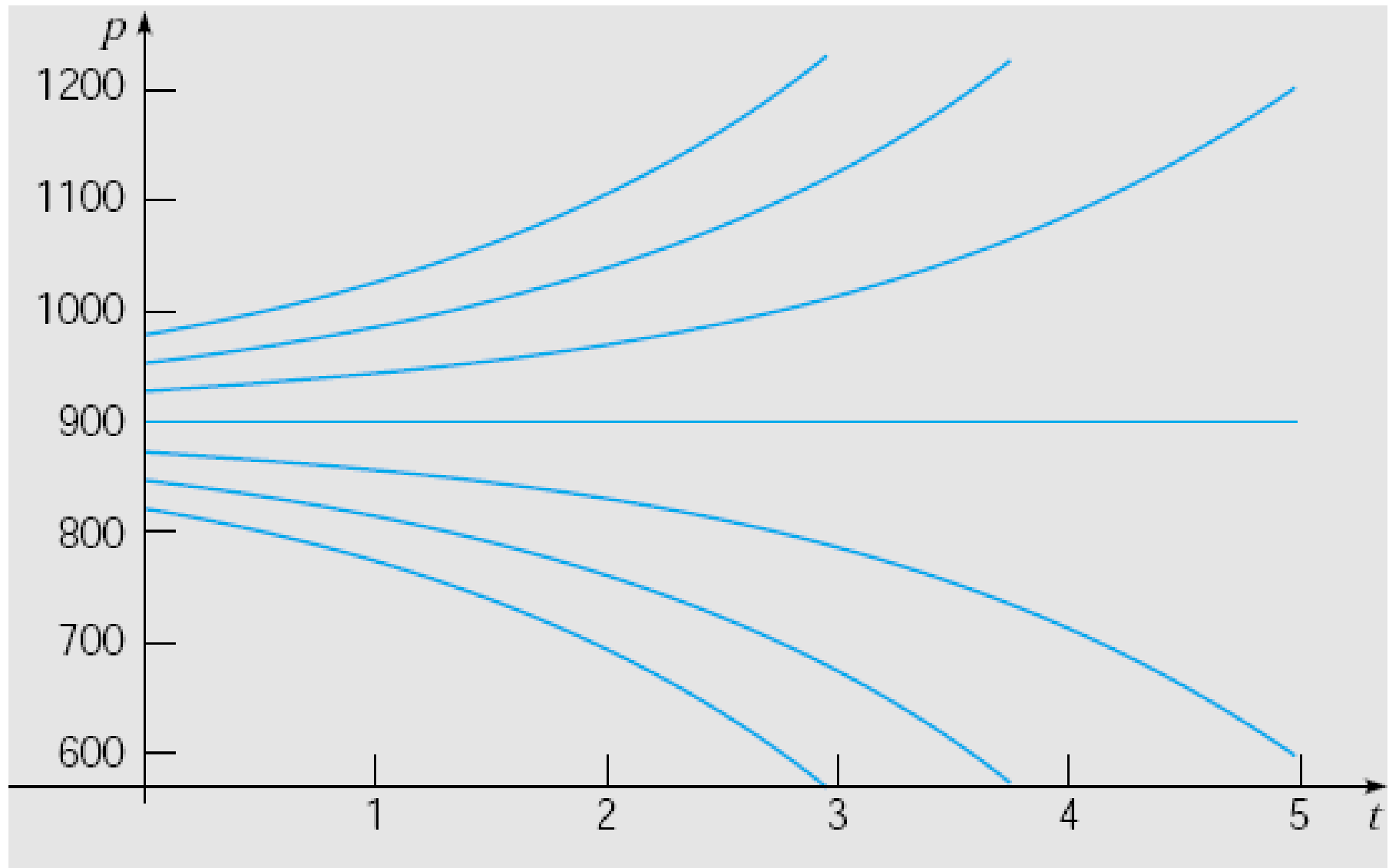
$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(t) \implies \frac{dP}{dt} = 0.5P - 450$$

Η λύση

$$P(t) = 900 + C e^{t/2}$$

Ποιά η συμπεριφορά/μεταβολή του πληθυσμού στο χρόνο;

Πληθυσμιακό μοντέλο IIγ



Σχήμα 5: Λύσεις για διαφορετικές τιμές του C (δηλ. του αρχικού πληθυσμού $P(0)$)

Παράδειγμα III

Η σχέση του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας (The love equations)

Πώς αλλάζουν, στο χρόνο, τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας του ενός απέναντι στον άλλο;

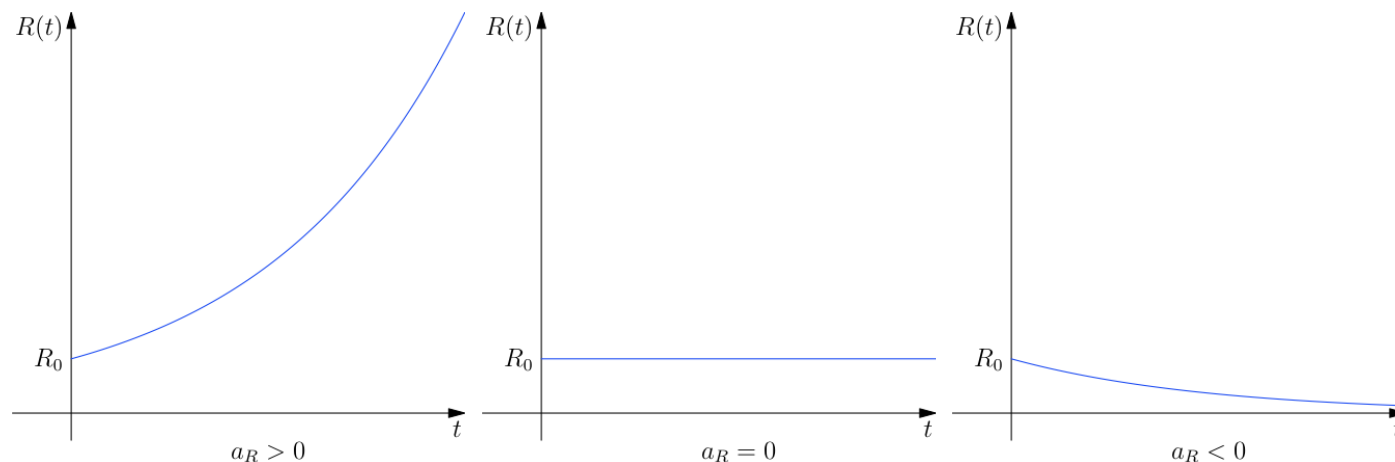
Παράδειγμα III

Η σχέση του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας (The love equations)

Πώς αλλάζουν, στο χρόνο, τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας του ενός απέναντι στον άλλο;

Έστω $R(t)$ τα αισθήματα του Ρωμαίου και $\frac{dR}{dt}$ ο ρυθμός μεταβολής τους (που εξαρτάται από τα ίδια του τα αισθήματα)

$$\frac{dR}{dt} = a_R R(t), \quad R(0) = R_0$$



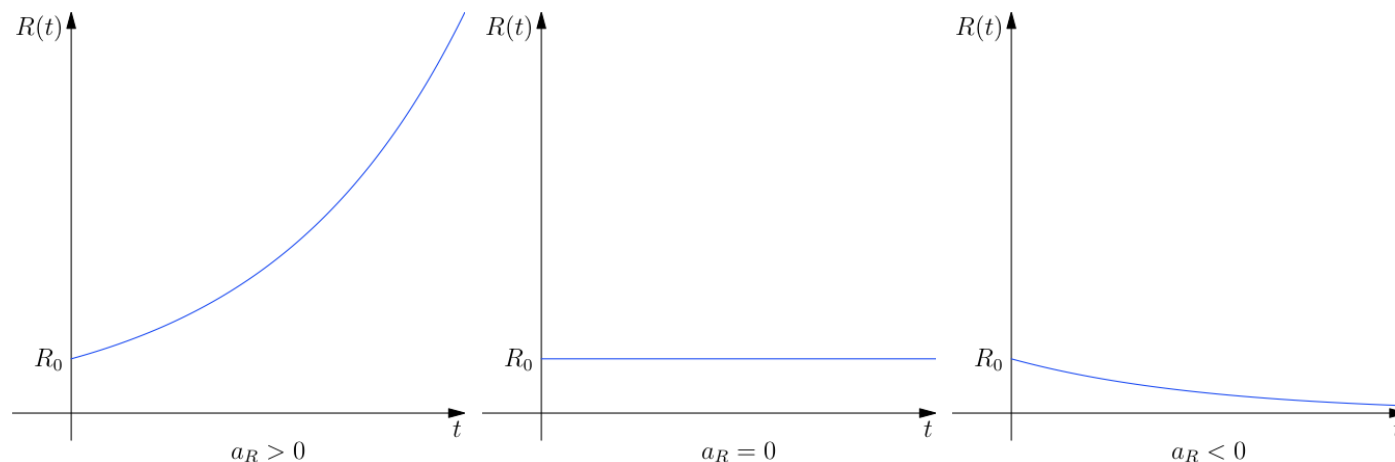
Παράδειγμα III

Η σχέση του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας (The love equations)

Πώς αλλάζουν, στο χρόνο, τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας του ενός απέναντι στον άλλο;

Έστω $R(t)$ τα αισθήματα του Ρωμαίου και $\frac{dR}{dt}$ ο ρυθμός μεταβολής τους (που εξαρτάται από τα ίδια του τα αισθήματα)

$$\frac{dR}{dt} = a_R R(t), \quad R(0) = R_0$$



Για τη Ιουλιέτα επίσης

$$\frac{dJ}{dt} = a_J J(t), \quad J(0) = J_0$$

Άρα 2 εξισώσεις

$$\frac{dR}{dt} = a_R R(t) \quad (1)$$

$$\frac{dJ}{dt} = a_J J(t) \quad (2)$$

Άρα 2 εξισώσεις

$$\frac{dR}{dt} = a_R R(t) \quad (1)$$

$$\frac{dJ}{dt} = a_J J(t) \quad (2)$$

Τα αισθήματα του ενός όμως εξαρτώνται και από αυτά του άλλου, άρα

$$\frac{dR}{dt} = a_R R(t) + p_R J(t) \quad (3)$$

$$\frac{dJ}{dt} = a_J J(t) + p_J R(t) \quad (4)$$

όπου p_R, p_J σταθερές που περιγράφουν την απόκριση του ενός προς τον άλλο.

Ένα σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων: A Course in Mathematical Biology:

Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Tools, by G. de Vries et al.,

SIAM 2006.

Μαθηματική Μοντελοποίηση (Προτυποποίηση) και Σ.Δ.Ε

Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού μοντέλου χρειάζεται:

Μαθηματική Μοντελοποίηση (Προτυποποίηση) και Σ.Δ.Ε

Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού μοντέλου χρειάζεται:

- (1) Ο σωστός χαρακτηρισμός εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (συνήθως ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή)

Μαθηματική Μοντελοποίηση (Προτυποποίηση) και Σ.Δ.Ε

Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού μοντέλου χρειάζεται:

- (1) Ο σωστός χαρακτηρισμός εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (συνήθως ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή)
- (2) Οι σωστές μονάδες μέτρησης κάθε μεταβλητής

Μαθηματική Μοντελοποίηση (Προτυποποίηση) και Σ.Δ.Ε

Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού μοντέλου χρειάζεται:

- (1)** Ο σωστός χαρακτηρισμός εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (συνήθως ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή)
- (2)** Οι σωστές μονάδες μέτρησης κάθε μεταβλητής
- (3)** Διάρθρωση των βασικών αρχών που διέπουν το πρόβλημα. Φυσικός νόμος (π.χ. Νεύτωνα) ή κάποια υπόθεση

Μαθηματική Μοντελοποίηση (Προτυποποίηση) και Σ.Δ.Ε

Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού μοντέλου χρειάζεται:

- (1)** Ο σωστός χαρακτηρισμός εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (συνήθως ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή)
- (2)** Οι σωστές μονάδες μέτρησης κάθε μεταβλητής
- (3)** Διάρθρωση των βασικών αρχών που διέπουν το πρόβλημα. Φυσικός νόμος (π.χ. Νεύτωνα) ή κάποια υπόθεση
- (4)** Έκφραση της υπόθεσης ή του φυσικού νόμου με μεταβλητές, εισαγωγή σταθερών και παραμέτρων ή/και βοηθητικών μεταβλητών

Μαθηματική Μοντελοποίηση (Προτυποποίηση) και Σ.Δ.Ε

Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού μοντέλου χρειάζεται:

- (1)** Ο σωστός χαρακτηρισμός εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (συνήθως ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή)
- (2)** Οι σωστές μονάδες μέτρησης κάθε μεταβλητής
- (3)** Διάρθρωση των βασικών αρχών που διέπουν το πρόβλημα. Φυσικός νόμος (π.χ. Νεύτωνα) ή κάποια υπόθεση
- (4)** Έκφραση της υπόθεσης ή του φυσικού νόμου με μεταβλητές, εισαγωγή σταθερών και παραμέτρων ή/και βοηθητικών μεταβλητών
- (5)** Συμφωνία ως προς τις μονάδες μέτρησης κάθε όρου του μοντέλου (εξίσωση)

Μαθηματική Μοντελοποίηση (Προτυποποίηση) και Σ.Δ.Ε

Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού μοντέλου χρειάζεται:

- (1)** Ο σωστός χαρακτηρισμός εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (συνήθως ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή)
- (2)** Οι σωστές μονάδες μέτρησης κάθε μεταβλητής
- (3)** Διάρθρωση των βασικών αρχών που διέπουν το πρόβλημα. Φυσικός νόμος (π.χ. Νεύτωνα) ή κάποια υπόθεση
- (4)** Έκφραση της υπόθεσης ή του φυσικού νόμου με μεταβλητές, εισαγωγή σταθερών και παραμέτρων ή/και βοηθητικών μεταβλητών
- (5)** Συμφωνία ως προς τις μονάδες μέτρησης κάθε όρου του μοντέλου (εξίσωση)
- (6)** Σύγκριση αποτελεσμάτων με μετρήσεις ή πειραματικά δεδομένα

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθειες *vs* Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθειες παραγώγους της.

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθεις vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους της.

Συμβολισμός: $y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\dots$, $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθεις vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους της.

Συμβολισμός: $y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\dots$, $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$

Στις Μ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και η εξίσωση περιέχει μερικές παραγώγους της

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθειες vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθειες παραγώγους της.

Συμβολισμός: $y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\dots$, $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$

Στις Μ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και η εξίσωση περιέχει μερικές παραγώγους της

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Εξίσωση Διάχυσης}$$

Ταξινόμηση των Σ.Δ.Ε & βασικοί ορισμοί

- **Συνήθειες vs Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Στις Σ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή και η εξίσωση περιέχει μόνο συνήθειες παραγώγους της.

Συμβολισμός: $y'(t) \equiv y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\dots$, $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$

Στις Μ.Δ.Ε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και η εξίσωση περιέχει μερικές παραγώγους της

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Εξίσωση Διάχυσης}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Κυματική Εξίσωση}$$