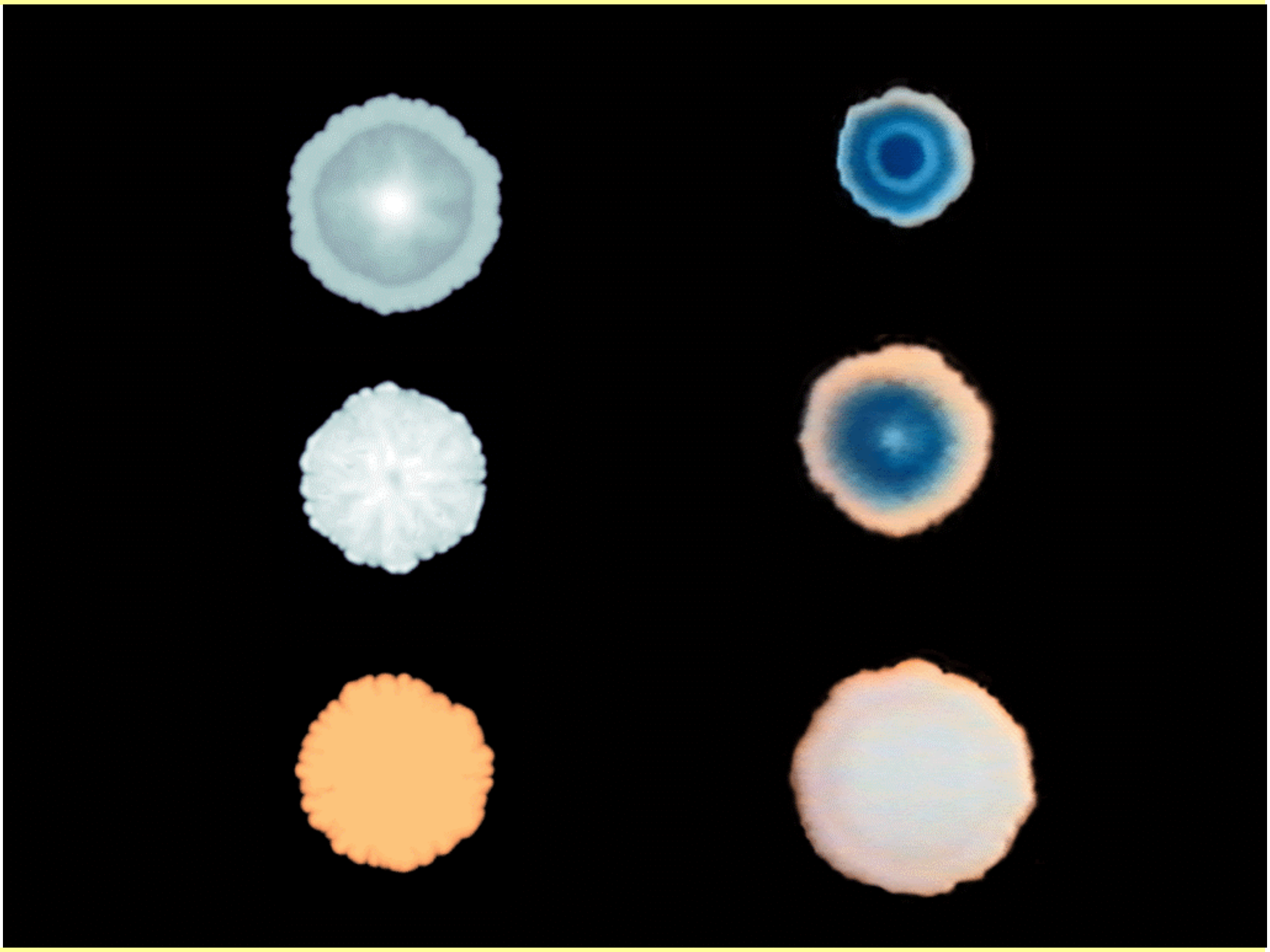
Διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών για μη μαθηματικούς

Α. Πουλιέζος



Εκδοχή 2.0

Χανιά, 2007

Στους φοιτητές μου, περασμένους και μελλοντικούς.

Περιεχόμενα

0 Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές πρωτογράφτηκαν το καλοκαίρι του 1985. Το Σεπτέμβριο του ίδιου χρόνου θ' άρχιζε η ακαδημαϊκή μου πορεία στο Πολυτεχνείο Κρήτης, μια πορεία που συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Για το Πολυτεχνείο Κρήτης ήταν η δεύτερη χρονιά με φοιτητές (του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης) και το έμψυχο δυναμικό λίγο. Ανέλαβα να διδάξω το μάθημα των Διαφορικών Εξισώσεων, και παρ' όλο που υπήρχαν μερικά βοηθήματα στα Ελληνικά και πάμπολλα Αγγλικά, έκρινα ότι η ύλη που θα διδασκόταν στους συγκεκριμένους φοιτητές θα έπρεπε να ήταν «κομμένη και ραμμένη» στα μέτρα τους. Έτσι προέκυψε ο τίτλος και η δομή του συγγράμματος που ακολουθεί.

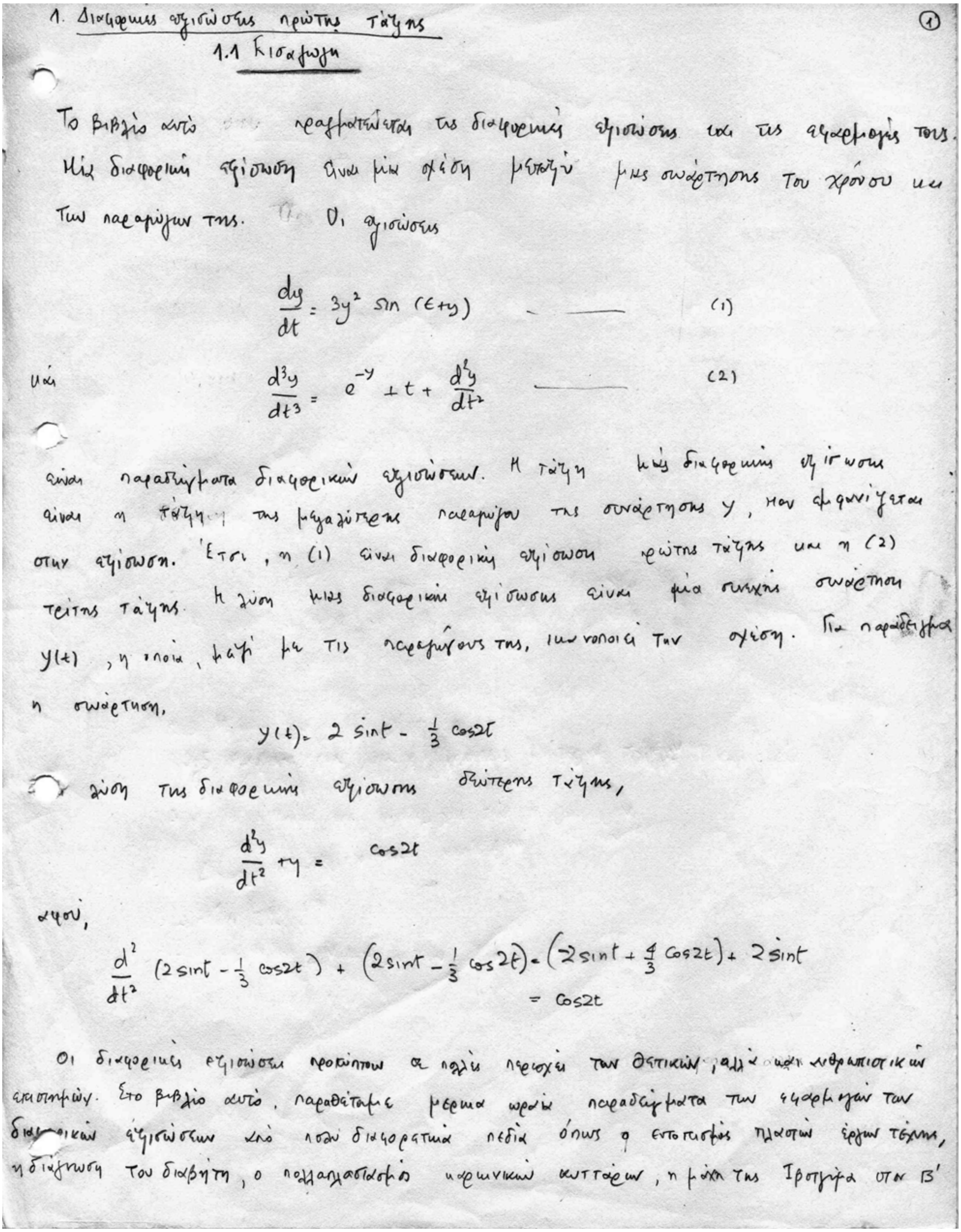
Η πρώτη έκδοση του βιβλίου ήταν χειρόγραφη (απόσπασμα της πρώτης σελίδας στην Εικ. 0.1). Ακολούθησαν διάφορες ηλεκτρονικές μορφές μέσω των εκάστοτε επεξεργαστών κειμένων (Wordstar, WordPerfect κλπ.) για να καταλήξει στη σημερινή εκδοχή, γραμμένη σε Microsoft Word και αναρτημένη στο δίκτυο.

Το συγκεκριμένο σύγγραμμα δεν διεκδικεί δάφνες πρωτοτυπίας, κάτι που ούτως ή άλλως θα ήταν δύσκολο για το θέμα που πραγματεύεται. Αντίθετα είναι εν πολλοίς βασισμένο στο εξαιρετικό βιβλίο του Brown, και επίσης χρησιμοποιεί και σκόρπιο υλικό από τα υπόλοιπα βιβλία που αναφέρονται στις «πηγές».

Ελπίζω η έκδοση αυτή να φανεί όσο χρήσιμη ήταν και η πρώτη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη κυρία Στέλλα Μουντογιαννάκη, που δακτυλογράφησε μεγάλο τμήμα των σημειώσεων καθώς επίσης και τους βοηθούς μου Δρ. Μάγδα Μαρινάκη και Νεκτάριο Αρναουτάκη για τη δακτυλογράφηση μικροτέρων τμημάτων. Επίσης να ευχαριστήσω εκ των προτέρων όλους όσοι συνεισφέρουν με τις διορθώσεις και επισημάνσεις τους.

Εικόνα εξωφύλλου: Βακτηριακές αποικίες από προσομοίωση προτύπων διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την υδροδυναμική τους συμπεριφορά (http://math.arizona.edu/~lega/research.html).



1. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

1.1 Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό πραγματεύεται τις διαφορικές εξισώσεις και τις εφαρμογές τους. Μία διαφορική εξίσωση είναι μία σχέση μεταξύ μιας συνάρτησης του χρόνου και των παραγώγων της. Οι εξισώσεις

$$\frac{dy}{dt} = 3y^2 \sin(t+y) \qquad (1)$$

και

$$\frac{d^3y}{dt^3} = e^{-y} + t + \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (2)$$

είναι παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων. Η τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου της συνάρτησης y, που εμφανίζεται στην εξίσωση. Έτσι, η (1) είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και η (2) τρίτης τάξης. Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι μία συνεχής συνάρτηση $y(t)$, η οποία, μαζί με τις παραγώγους της, ικανοποιεί την σχέση. Για παράδειγμα η συνάρτηση,

$$y(t) = 2\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \cos 2t$$

αφού,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(2\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t\right) + \left(2\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t\right) = \left(-2\sin t + \frac{4}{3}\cos 2t\right) + 2\sin t$$
$$= \cos 2t$$

Οι διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν σε πολλές περιοχές των θετικών, αλλά και ανθρωπιστικών επιστημών. Στο βιβλίο αυτό, παραθέταμε μερικά ωραία παραδείγματα των εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων από πολύ διαφορετικά πεδία όπως ο εντοπισμός πλαστών έργων τέχνης, η διάγνωση του διαβήτη, ο πολλαπλασιασμός καρκινικών κυττάρων, η μάχη της Ιβοτζίμα στον Β'

Εικόνα 0.1

1 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

1.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο τμήμα των σημειώσεων αυτών θα πραγματευτούμε τις διαφορικές εξισώσεις και τις εφαρμογές τους.

Ως ***διαφορική εξίσωση*** ορίζουμε μία σχέση μεταξύ μιας συνάρτησης του χρόνου και των παραγώγων της. Οι εξισώσεις:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 3y^2(t)\eta\mu(t + y(t)) \tag{1.1}$$

και,

$$\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3} = e^{-y(t)} + t + \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.2}$$

είναι παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων (η εξάρτηση της εξαρτημένης μεταβλητής y από την ανεξάρτητη μεταβλητή t θα παραλείπεται συνήθως από δω και στο εξής χάρη συντομίας). Η ***τάξη*** μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου της συνάρτησης $y(t)$, που εμφανίζεται στην εξίσωση. Έτσι, η (1.1) είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και η (1.2) τρίτης τάξεως. Η ***λύση*** μιας διαφορικής εξίσωσης είναι μια συνεχής συνάρτηση $y(t)$, η οποία, μαζί με τις παραγώγους της, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση.

Για παράδειγμα η συνάρτηση,

$$y(t) = 2\eta\mu t - \tfrac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 2t$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = \sigma\upsilon\nu 2t$$

αφού,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(2\eta\mu t - \tfrac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 2t\right) + \left(2\eta\mu t - \tfrac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 2t\right) = \left(-2\eta\mu t + \tfrac{4}{3}\sigma\upsilon\nu 2t\right) + \left(2\eta\mu t - \tfrac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 2t\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu 2t$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ανακύπτουν σε πολλές περιοχές των θετικών, αλλά και ανθρωπιστικών επιστημών. Στις σημειώσεις αυτές παραθέτουμε μερικά ωραία παραδείγματα εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων σε πολύ διαφορετικά πεδία όπως στη διάγνωση του διαβήτη, στο πολλαπλασιασμό καρκινικών κυττάρων και στην ανάπτυξη διαφόρων πληθυσμών. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε πώς η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων εφαρμόζεται για να λύσει, ή για να προσπαθήσει να λύσει πραγματικά προβλήματα από την ζωή.

1.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Αρχίζουμε με τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως και υποθέτουμε ότι η εξίσωση μας είναι ή μπορεί να τεθεί στη μορφή,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y) \tag{1.3}$$

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι:

Δοθείσης της συνάρτησης $f(t, y)$, ποιες είναι οι συναρτήσεις $y(t)$ που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση (1.3);

Το προσεγγίζουμε ως εξής: για να λύσουμε ένα καινούργιο πρόβλημα προσπαθούμε να το ανάγουμε με κάποιο τρόπο σ' ένα πρόβλημα που το έχουμε ήδη λύσει. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι απλοποιούμε διαδοχικά το πρόβλημα για να μοιάζει με κάποιο που ξέρουμε να επιλύουμε. Εφ' όσον προσπαθούμε να βρούμε λύσεις σε γενικές διαφορικές εξισώσεις, φαίνεται λογικό να απαριθμήσουμε όλες τις διαφορικές εξισώσεις που μπορούμε να λύσουμε χρησιμοποιώντας τη θεωρία του στοιχειώδους λογισμού. Δυστυχώς, η μόνη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που μπορούμε να λύσουμε έτσι, είναι η,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t) \tag{1.4}$$

όπου $g(.)$ είναι οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση του χρόνου. Για να λύσουμε την (1.4) απλά ολοκληρώνουμε και τις δυο πλευρές ως προς t για να πάρουμε,

$$y(t) = \int g(t)\mathrm{d}t + c$$

όπου c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης, και $\int g(t)\mathrm{d}t$ είναι μια συνάρτηση που έχει σαν παράγωγο την g (αντιπαράγωγος της g). Φαίνεται έτσι, ότι για να λύσουμε οποιαδήποτε διαφορική εξίσωση, πρέπει να την ανάγουμε κατά κάποιο τρόπο στη μορφή (1.4). Όπως θα δούμε αργότερα, αυτό είναι αδύνατο στις περισσότερες περιπτώσεις. Δεν θα μπορέσουμε λοιπόν, να λύσουμε τις περισσότερες διαφορικές εξισώσεις χωρίς τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Φαίνεται λογικό λοιπόν, ότι για να βρούμε ποιές διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να λύσουμε, θα πρέπει ν' αρχίσουμε με πολύ απλές εξισώσεις, και όχι π.χ. με την,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{\text{ημ}\left(t - 37\sqrt{|y|}\right)}$$

(η οποία παρεπιπτόντως δεν λύνεται ακριβώς). Η πείρα μας έχει διδάξει ότι οι απλούστερες εξισώσεις είναι αυτές που είναι γραμμικές ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή y.

Ορισμός 1.1 Η γενική ***γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως*** είναι η,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = b(t) \tag{1.5}$$

όπου οι συναρτήσεις $a(t)$ και $b(t)$ θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου t. Ξεχωρίζουμε την εξίσωση αυτή και την ονομάζουμε γραμμική γιατί η εξαρτημένη μεταβλητή y, εμφανίζεται μόνο με γραμμικούς όρους, δηλαδή δεν υπάρχουν όροι της μορφής e^{-y}, y^3, ημy κλπ. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 + \text{ημ}t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \text{συν}y + t$$

είναι μη γραμμικές, εξαιτίας των όρων y^2 και συνy αντίστοιχα. Ακόμη δεν είναι προφανές πώς θα λύσουμε την εξίσωση (1.5). Γι' αυτό την απλοποιούμε περισσότερο, θέτοντας $b(t)$=0.

Ορισμός 1.2 Η εξίσωση,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = 0 \tag{1.6}$$

καλείται ***ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως***, ενώ η (1.6) καλείται ***μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως***.

Ευτυχώς, η ομογενής εξίσωση (1.6) μπορεί να λυθεί αρκετά απλά. Πρώτον, διαιρούμε τις δυο πλευρές με $y(t)$, και έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t}{y(t)} = -a(t)$$

Δεύτερον παρατηρούμε ότι,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t}{y(t)} = \frac{1}{y(t)}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left|y(t)\right|$$

Επομένως, η (1.6) γίνεται,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left|y(t)\right| = -a(t) \qquad (1.7)$$

Αλλά αυτή είναι «ουσιαστικά» η (1.4), αφού ολοκληρώνοντας και τις δύο πλευρές, παίρνουμε,

$$\ln\left|y(t)\right| = -\int a(t)\mathrm{d}t + c_1$$

όπου η c_1 η σταθερά της ολοκλήρωσης. Παίρνοντας αντιλογαρίθμους,

$$\begin{aligned}\left|y(t)\right| &= \exp\left\{-\int a(t)\mathrm{d}t + c_1\right\} = c_2\exp\left\{-\int a(t)\mathrm{d}t\right\}\\ &= \frac{c_2}{\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\}}\end{aligned}$$

ή,

$$c_2 = \left|y(t)\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\}\right| \qquad (1.8)$$

αφού exp(.)>0. Η εξίσωση (1.8) μας λέει ότι η απόλυτη τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης του χρόνου είναι σταθερή. Αλλά αν η απόλυτη τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης $g(t)$ είναι σταθερή, τότε και η ίδια η συνάρτηση είναι σταθερή. Για να το δείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι αν η συνάρτηση $g(t)$ δεν είναι σταθερή, τότε υπάρχουν δύο διαφορετικοί χρόνοι t_1 και t_2 για τους οποίους $g(t_1)=-cg(t_2)=c$. Σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η συνάρτηση g θα πρέπει τότε να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $-c$ και $+c$, πράγμα αδύνατο αφού $\left|g(t)\right|=c$. Επομένως,

$$y(t)\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\} = c_2$$

ή, $$y(t) = c\exp\left\{-\int a(t)\mathrm{d}t\right\} \tag{1.9}$$

Η εξίσωση (1.9) καλείται ***γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης***, επειδή κάθε λύση της (1.6) πρέπει να είναι αυτής της μορφής. Παρατηρούμε ότι στην (1.9) εμφανίζεται η αυθαίρετη σταθερά c. Το γεγονός αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει. Η αυθαίρετη σταθερά c θα εμφανίζεται στην γενική λύση κάθε διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως. Παρατηρούμε επίσης, ότι η εξίσωση (1.6) έχει άπειρες λύσεις˙ μία για κάθε τιμή του c.

Παράδειγμα 1.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2ty(t) = 0$.

Λύση: Εδώ, $a(t)=2t$, έτσι,

$$y(t) = c\exp\left\{-\int 2t\mathrm{d}t\right\} = c\exp\left\{-t^2\right\}$$

Παράδειγμα 1.2 Να προσδιοριστεί η συμπεριφορά όλων των λύσεων της εξίσωσης, $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = 0$, όταν $t \to \infty$, a σταθερά.

Λύση: Η γενική λύση είναι,

$$y(t) = c\exp\left\{-\int a\mathrm{d}t\right\} = c\exp\{at\}$$

Άρα, αν a<0, όλες οι λύσεις εκτός της $y(t)$=0, τείνουν στο άπειρο, ενώ αν a>0, όλες οι λύσεις τείνουν στο 0.

Στην πράξη, δεν ενδιαφερόμαστε συνήθως για όλες τις λύσεις της (1.6). Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ιδιαίτερη λύση $y(t)$, η οποία σε κάποιον αρχικό χρόνο t_0 έχει την τιμή y_0. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε την συνάρτηση $y(t)$, έτσι ώστε,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = 0,\ y(t_0) = y_0 \tag{1.10}$$

Η εξίσωση (1.10) αναφέρεται σαν ***πρόβλημα αρχικής τιμής***, επειδή απ' όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, ενδιαφερόμαστε για την μία λύση η οποία αρχικά (στον χρόνο t_0) έχει την τιμή y_0. Για να βρούμε αυτή τη λύση, ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της (1.7) μεταξύ t_0 και t. Έτσι,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\ln|y(s)|}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \ln|y(t)| - \ln|y(t_0)| = \ln\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right| = -\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right| = \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}$$

Η συνάρτηση μέσα στην απόλυτη τιμή είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου. Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι ταυτόσημη με +1 ή −1. Για να βρούμε ποιο από τα δύο, βρίσκουμε την τιμή της στο σημείο t_0. Επειδή,

$$\frac{y(t_0)}{y(t_0)}\exp\left\{-\int_{t_0}^{t_0} a(s)\mathrm{d}s\right\} = 1$$

πρέπει,

$$\frac{y(t)}{y(t_0)}\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\} = 1$$

Άρα,

$$y(t) = y(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\} = y_0 \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}$$

Παράδειγμα 1.3 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\,\text{ημ}t = 0,\ y(0) = \frac{3}{2}$.

Λύση: Εδώ $a(t)$=ημt, άρα,

$$y(t) = \tfrac{3}{2}\exp\left\{-\int_0^t \text{ημ}s\,\mathrm{d}s\right\} = \tfrac{3}{2}e^{(-1+\text{συν}t)}$$

Παράδειγμα 1.4 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + e^{t^2}y = 0,\ y(1) = 2$.

Λύση: Εδώ $a(t)$=e^{t^2} , άρα

$$y(t) = 2\exp\left\{-\int_1^t e^{s^2}\mathrm{d}s\right\}$$

Με μία πρώτη ματιά, το πρόβλημα αυτό φαίνεται να παρουσιάζει μία πολύ σοβαρή δυσκολία επειδή δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε την συνάρτηση e^{s^2} άμεσα. Παρ' όλ' αυτά η λύση είναι εξίσου ισχυρή και χρήσιμη όσο και η λύση στο Παράδειγμα 1.3. Ο λόγος είναι διπλός: πρώτον, υπάρχουν απλές αριθμητικές μέθοδοι για την εκτίμηση του παραπάνω ολοκληρώματος. Δεύτερον, ακόμη κι αν η λύση του Παραδείγματος 1.3 δινόταν αναλυτικά, δεν μπορούμε να βρούμε την αριθμητική της τιμή την χρονική στιγμή t χωρίς την βοήθεια πινάκων ή κάποιου άλλου υπολογιστικού μέσου.

Ας γυρίσουμε τώρα στην μη ομογενή εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = b(t)$$

Είναι φανερό από την μέχρι τώρα προσέγγιση μας, ότι για να λύσουμε την μη ομογενή εξίσωση, θα πρέπει να την εκφράσουμε σαν,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\text{κάποια συνάρτηση}\right) = b(t)$$

και κατόπιν να ολοκληρώσουμε και τις δύο πλευρές, λύνοντας για την «κάποια συνάρτηση». Όμως η παράσταση,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t)$$

δεν φαίνεται να είναι η παράγωγος κάποιας απλής συνάρτησης. Το επόμενο «λογικό» βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι το εξής: μπορούμε να κάνουμε την αριστερή πλευρά την παράγωγο «κάποιας συνάρτησης»; Ας το προσπαθήσουμε πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της (1.5) με κάποια συνεχή συνάρτηση $\mu(t)$, οπότε παίρνουμε την ισοδύναμη εξίσωση,

$$\mu(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \mu(t)a(t)y(t) = \mu(t)b(t) \tag{1.11}$$

(με τον όρο ισοδύναμη εξίσωση εννοούμε ότι κάθε λύση της (1.11) είναι λύση της (1.5) και αντίστροφα). Τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε την $\mu(t)$ έτσι ώστε η $\mu(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \mu(t)a(t)y(t)$ να είναι η παράγωγος κάποιας απλής συνάρτησης; Η απάντηση είναι <u>ναι</u> και συνάγεται παρατηρώντας ότι,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(t)y(t)=\mu(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}$$

Επομένως,

$$\mu(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\mu(t)a(t)y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(t)y(t)$$

αν και μόνον αν,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-\mu(t)a(t)=0$$

Αλλά αυτή είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που ξέρουμε να λύνουμε, και επειδή μία οποιαδήποτε συνάρτηση αρκεί, θέτουμε στην (1.9) c=1 και παίρνουμε,

$$\mu(t)=\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\}$$

Γι' αυτή την $\mu(t)$, η (1.11) γράφεται,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(t)y(t)=\mu(t)b(t) \tag{1.12}$$

Για να βρούμε την γενική λύση της (1.5) ολοκληρώνουμε τα δύο μέρη της (1.12), παίρνοντας,

$$\begin{aligned}\mu(t)y(t)&=\int\mu(t)b(t)\mathrm{d}t+c\\ \Rightarrow y(t)&=\frac{1}{\mu(t)}\int\mu(t)b(t)\mathrm{d}t+c\\ \Rightarrow y(t)&=\exp\left\{-\int a(t)\mathrm{d}t\right\}\left(\int\mu(t)b(t)\mathrm{d}t+c\right)\end{aligned} \tag{1.13}$$

Αν θέλουμε τώρα μία ιδιαίτερη λύση της (1.5) που να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(t_0)=y_0$, δηλαδή θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a(t)y(t)=b(t),\ y(t_0)=y_0$$

τότε παίρνουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα των δύο μελών της (1.12) μεταξύ t_0 και t, για να βρούμε,

$$\mu(t)y(t)-\mu(t_0)y(t_0)=\int_{t_0}^{t}\mu(s)b(s)\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{\mu(t)}\left[\mu(t_0)y(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mu(s)b(s)\mathrm{d}s\right] \tag{1.14}$$

Παρατηρήσεις: Η συνάρτηση $\mu(t)=\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\}$ καλείται ***παράγοντας ολοκλήρωσης*** της μη ομογενούς εξίσωσης, επειδή μετά τον πολλαπλασιασμό και των δύο μελών της με τη $\mu(t)$ μπορούμε αμέσως να ολοκληρώσουμε την εξίσωση και να βρούμε όλες τις λύσεις.

Ο αναγνώστης δεν θα πρέπει να αποστηθίσει τους τύπους (1.13) και (1.14). Όλες οι μη ομογενείς εξισώσεις θα λύνονται πολλαπλασιάζοντας πρώτα και τα δύο μέλη με την $\mu(t)$, γράφοντας μετά το αριστερό μέλος σαν παράγωγο της $\mu(t)y(t)$ και τέλος ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικής τιμής είναι να βρούμε την γενική λύση (1.13) της (1.5) και μετά να χρησιμοποιήσουμε την αρχική συνθήκη $y(t_0)=y_0$ για να βρούμε την σταθερά c. Αν όμως η συνάρτηση $\mu(t)b(t)$ δεν ολοκληρώνεται ευθέως, τότε πρέπει να πάρουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της (1.12) που δίνει την (1.14), η οποία μπορεί να προσεγγισθεί αριθμητικά.

Παράδειγμα 1.5 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-2ty(t)=t$.

Λύση: Εδώ $a(t)=-2t$, άρα ο παράγοντας ολοκλήρωσης,

$$\mu(t)=\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\}=\exp\left\{-2\int t\mathrm{d}t\right\}=e^{-t^2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\mu(t)$, έχουμε την ισοδύναμη εξίσωση,

$$e^{-t^2}\left\{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-2ty(t)\right\}=e^{-t^2}t$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-t^2}y(t)=e^{-t^2}t$$

$$\Rightarrow e^{-t^2}y(t)=\int e^{-t^2}t\mathrm{d}t+c$$

$$\Rightarrow e^{-t^2}y(t)=-\tfrac{1}{2}e^{-t^2}+c$$

$$\Rightarrow y(t)=-\tfrac{1}{2}+ce^{t^2}$$

Παράδειγμα 1.6 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής, $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2ty(t)=t$, $y(1)=2$.

Λύση: Εδώ $a(t)=2t$, άρα,

$$\mu(t)=\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\}=\exp\left\{2\int t\mathrm{d}t\right\}=e^{t^2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $\mu(t)$, έχουμε,

$$\begin{aligned} e^{t^2}\left\{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-2ty(t)\right\}&=e^{t^2}t \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{t^2}y(t)&=e^{t^2}t \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_1^t \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{s^2}y(s)\mathrm{d}s=\int_1^t e^{s^2}s\mathrm{d}s \\ &\Rightarrow e^{s^2}y(s)\Big|_1^t=\tfrac{1}{2}e^{s^2}\Big|_1^t \\ &\Rightarrow e^{t^2}y(t)-2e=\tfrac{1}{2}\left(e^{t^2}-e\right) \\ &\Rightarrow y(t)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}e^{1-t^2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.7 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής, $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$, $y(2)=3$.

Λύση: Εδώ $a(t)=1$, άρα, $\mu(t)=\exp\left\{\int a(t)\mathrm{d}t\right\}=\exp\left\{\int 1\mathrm{d}t\right\}=e^{t}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\mu(t)$, έχουμε,

$$\begin{aligned} e^{t}\left\{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)\right\}&=\frac{e^{t}}{1+t^2} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{t}y(t)&=\frac{e^{t}}{1+t^2} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ 2, t,

$$\Rightarrow \int_2^t \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^s y(s)\mathrm{d}s = \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow e^t y(t) - 3e^2 = \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-t}\left[3e^2 + \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\mathrm{d}s\right]$$

1.3 Χωριζόμενες εξισώσεις

Λύσαμε την ομογενή, γραμμική, διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = 0 \tag{1.6}$$

διαιρώντας και τα δύο μέλη με $y(t)$, για να πάρουμε την ισοδύναμη εξίσωση,

$$\frac{1}{y(t)}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -a(t)$$

ή,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|y(t)| = -a(t) \tag{1.7}$$

Κατόπιν ολοκληρώσαμε και τα δύο μέρη της (1.7) για να βρούμε την $y(t)$. Μ' έναν ακριβώς ανάλογο τρόπο, μπορούμε να λύσουμε την πιο γενική διαφορική εξίσωση,

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{g(t)}{f(y)} \tag{1.15}$$

όπου f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις των y και t αντίστοιχα. Η εξίσωση αυτή, όπως και κάθε άλλη εξίσωση που μπορεί να τεθεί σ' αυτή τη μορφή, καλείται ***χωριζόμενη***. Για να λύσουμε την (1.15), πολλαπλασιάζουμε πρώτα και τα δύο μέλη με $f(y)$ για να πάρουμε την ισοδύναμη εξίσωση,

$$f(y)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = g(t) \tag{1.16}$$

Μετά, παρατηρούμε ότι η (1.16) μπορεί να γραφτεί σαν,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(y)=g(t) \tag{1.17}$$

όπου $F(y)$ είναι κάποια αντιπαράγωγος της $f(y)$, δηλαδή $F(y)=\int f(y)\mathrm{d}y$. Επομένως,

$$F(y)=\int g(t)\mathrm{d}t+c \tag{1.18}$$

όπου c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Λύνοντας την (1.18) ως προς $y(t)$, βρίσκουμε την γενική λύση της (1.15).

Παράδειγμα 1.8 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{t^2}{y^2}$.

Λύση: Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με y^2, έχουμε,

$$y^2\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=t^2$$

ή,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{3}y^3(t)\right)=t^2\\ &\Rightarrow \tfrac{1}{3}y^3(t)=\int t^2\mathrm{d}t=\tfrac{1}{3}t^3+c_1\\ &\Rightarrow y(t)=\left(t^3+c_2\right)^{1/3}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.9 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης $e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-t-t^3=0$.

Λύση: Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^y=t+t^3$$

Άρα,

$$e^{y(t)}=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^4+c$$

Παίρνοντας λογαρίθμους,

$$y(t) = \ln\left(\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 + c\right)$$

Επιπλέον της διαφορικής εξίσωσης (1.15), θα υπάρχουν επίσης αρχικές συνθήκες της μορφής $y(t_0)=y_0$. Η διαφορική εξίσωση (1.15) μαζί με την αρχική της συνθήκη $y(t_0)=y_0$ καλείται ***πρόβλημα αρχικής τιμής***. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό με δύο διαφορετικούς τρόπους: ή να χρησιμοποιήσουμε την αρχική συνθήκη για να βρούμε την σταθερά c της (1.18) ή να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέρη της (1.17) μεταξύ t_0 και t για να πάρουμε,

$$F\big(y(t)\big) - F(y_0) = \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s \tag{1.19}$$

Τώρα, αν παρατηρήσουμε ότι,

$$F\big(y(t)\big) - F(y_0) = \int_{y_0}^{y} f(r)\mathrm{d}r \tag{1.20}$$

μπορούμε να γράψουμε την (1.19) στην απλούστερη μορφή,

$$\int_{y_0}^{y} f(r)\mathrm{d}r = \int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s \tag{1.21}$$

Παράδειγμα 1.10 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής $e^y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - (t + t^3) = 0, y(1) = 1$.

Λύση ($1^{η}$ *μέθοδος*): Απο το Παράδειγμα (1.9) ξέρουμε ότι η γενική λύση είναι,

$$y(t) = \ln\left(\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 + c\right)$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $t=1$, $y=1 \Rightarrow 1=\ln(3/4+c) \Rightarrow c=e-3/4$. Άρα,

$$y(t) = \ln\left(e + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{3}{4}\right)$$

$2^{η}$ *μέθοδος*: Από την (1.21),

$$\int_1^y e^r \mathrm{d}r = \int_1^t (s + s^3)\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow e^y - e = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}$$
$$\Rightarrow y(t) = \ln\left(e + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{3}{4}\right)$$

Παράδειγμα 1.11 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + y^2, y(0) = 0.$

Λύση: Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $1+y^2$ για να πάρουμε την ισοδύναμη εξίσωση,

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1$$

Από την (1.21),

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}r}{1+r^2} = \int_0^t \mathrm{d}s \Rightarrow \text{τοξεφ}\, y = t \Rightarrow y = \text{εφ}\, t$$

Η λύση αυτή, έχει την ανησυχητική ιδιότητα ότι πηγαίνει στο $\pm\infty$, όταν $t\to\pm\pi/2$.

Το γεγονός αυτό δεν είναι καθόλου προφανές ούτε από την ίδια την διαφορική εξίσωση ούτε από την αρχική της συνθήκη. Συμβαίνει όμως οι λύσεις μερικών καθ' όλα «ωραίων» διαφορικών εξισώσεων να πηγαίνουν στο άπειρο σε πεπερασμένο χρόνο. Στις περιπτώσεις αυτές οι λύσεις συνήθως ισχύουν για ένα πεπερασμένο ανοιχτό διάστημα $a<t<b$. Ακόμη, όπως θα δούμε παρακάτω, διαφορετικές λύσεις της ίδιας διαφορικής εξίσωσης συνήθως πηγαίνουν στο άπειρο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα 1.12 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + y^2, y(0) = 1.$

Λύση: Από την (1.21),

$$\int_1^y \frac{1}{1+r^2}\mathrm{d}r = \int_0^t \mathrm{d}s$$

Επομένως,

$$\text{τοξεφ}\, y - \text{τοξεφ}\, 1 = t \Rightarrow y = \text{εφ}(t + \pi/4)$$

Η λύση αυτή ισχύει στο ανοιχτό διάστημα $-3\pi<t<\pi/4$.

Παράδειγμα 1.13 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής,

$y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\left(1+y^2\right)\eta\mu t=0\,,\quad y(0)=1\,.$

Λύση: Διαιρώντας και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με $1+y^2$, παίρνουμε,

$$\frac{y}{1+y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\eta\mu t$$

Επομένως,

$$\int_1^y \frac{r\,\mathrm{d}r}{1+r^2}=\int_0^t -\,\eta\mu\;\mathrm{d}s$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+y^2\right)-\frac{1}{2}\ln 2\right)-\sigma\upsilon\nu t-1$$

Λύνοντας ως προς $y(t)$:

$$y(t)=\pm\left(2e^{-4\eta\mu^2 t/2}-1\right)^{1/2}$$

Επειδή το $y(0)$ είναι θετικό, διαλέγουμε τη θετική ρίζα. Άρα,

$$y(t)=\left(2e^{-4\eta\mu^2 t/2}-1\right)^{1/2}$$

Η λύση αυτή ισχύει, αν $2e^{-4\eta\mu^2 t/2}\geq 1$, ή

$$e^{4\eta\mu^2 t/2}\leq 2 \tag{1.22}$$

Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση αυξάνει μονοτονικά, μπορούμε να πάρουμε τους λογαρίθμους και των δύο μελών της (1.22):

$$4\eta\mu^2\ t/2\ \leq\ \ln 2$$

ή,
$$\left|\frac{t}{2}\right|\leq \tau o\xi\,\eta\mu\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}$$

Επομένως, η $y(t)$ ορίζεται στο ανοιχτό διάστημα $(-\alpha, \alpha)$, όπου $a=2\ \tau o\xi\,\eta\mu\left[\sqrt{\ln 2/2}\right]$.

Εδώ, φαίνεται ν' αντιμεπωτίζουμε μία καινούργια δυσκολία που σχετίζεται με τις μη γραμμικές εξισώσεις, αφού η $y(t)$ «εξαφανίζεται» όταν $t=\pm\alpha$ και δεν πηγαίνει απλώς στο άπειρο. Όμως, η φαινομενική αυτή δυσκολία μπορεί να εξηγηθεί αρκετά εύκολα και ακόμη περισσότερο μπορεί να προβλεφθεί, αν γράψουμε την διαφορική εξίσωση στην κανονική μορφή,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{(1+y^2)\,\text{ημ}t}{y}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση δεν ορίζεται όταν $y(t)=0$. Άρα, αν κάποια λύση $y(t)$ έχει την τιμή μηδέν σε κάποιο χρόνο $t=t^*$, τότε δεν θα πρέπει να περιμένουμε ότι θα ορίζεται για $t>t^*$. Αυτό ακριβώς συμβαίνει και στο παράδειγμα μας, αφού $y(\pm\alpha)=0$.

Παράδειγμα 1.14 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής $(1+e^y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \text{συν}t$, $y(\pi/2)=3$.

Λύση: Από την (1.21),

$$\begin{aligned} &\int_3^y (1+e^r)\mathrm{d}r = \int_{\pi/2}^t \text{συν}s\,\mathrm{d}s \\ \Rightarrow \quad & y+e^y = 2+e^3+\text{ημ}t \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί ως προς y αναλυτικά. Είναι δε γεγονός ότι οι περισσότερες χωριζόμενες εξισώσεις δεν μπορούν να δώσουν αναλυτική λύση για την $y(t)$. Αυτό όμως δεν δημιουργεί προβλήματα στην πράξη, αφού μπορούμε πάντα να βρούμε την $y(t)$ με αριθμητικές μεθόδους.

Παράδειγμα 1.15 Να βρεθούν όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{t}{y}$.

Λύση: Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με y, παίρνουμε:

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -t$$

άρα,

$$y^2+t^2=c^2 \tag{1.23}$$

Οι καμπύλες που ορίζονται από την (1.23) είναι κλειστές και δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς *y* μονοσήμαντα. Ο λόγος γι' αυτή τη δυσκολία είναι ότι η διαφορική εξίσωση δεν ορίζεται για *y*=0. Παρ' όλα αυτά οι κύκλοι (1.23) ορίζονται ακόμη κι όταν *y*=0. Καλούμε τους κύκλους (1.23) ***καμπύλες λύσεων*** της διαφορικής εξίσωσης $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-t$.

1.4 Ομογενείς εξισώσεις

Αν μία διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f\left(\frac{y}{t}\right) \tag{1.24}$$

καλείται ***ομογενής***. Δηλαδή η παράγωγος d*y*/d*t* είναι συνάρτηση τους λόγου *y*/*t*. Μια εξίσωση τέτοιου τύπου μπορεί να μετασχηματισθεί σε χωριζόμενη εξίσωση, αν κάνουμε την αντικατάσταση:

$$y=vt \tag{1.25}$$

Τότε,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=f(v)$$

ή,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{f(v)-v}{t}\Rightarrow\frac{1}{f(v)-v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow y=\ln t+e\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v}=\ln t+c \tag{1.26}$$

όπου ως συνήθως η σταθερά της ολοκλήρωσης *c*, υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 1.16 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\eta\mu\left(\frac{2y}{t}\right)+\frac{y}{t},\quad y(1)=\pi/4$.

Λύση: Θέτοντας *y*=*vt*, παίρνουμε,

$$t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=\eta\mu(2v)+v\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}v}{\eta\mu 2v}=\ln t+c$$

ή,
$$\frac{1}{2}\ln(\text{εφ}v)=\ln t+c$$

Θέτοντας $v=y/t$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\text{εφ}\frac{y}{t}\right)=\ln t+c$$

Οι αρχικές συνθήκες δίνουν,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\text{εφ}\frac{\pi}{4}\right)=c=0\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left(\text{εφ}\frac{y}{t}\right)=\ln t$$

Άρα,

$$\text{εφ}\frac{y}{t}=t^2\Rightarrow y=t\,\text{εφ}^{-1}(t^2)$$

1.5 Εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενή μορφή

Η διαφορική εξίσωση,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{at+by+c}{a_1t+b_1y+c_1} \tag{1.27}$$

όπου α, b, c, α_1, b_1, c_1 είναι σταθερές, μπορεί να αναχθεί στην ομογενή μορφή (1.24) με τον μετασχηματισμό,

$$t=T+h,\quad y=Y+k \tag{1.28}$$

Αντικαθιστώντας τις (1.28) στην (1.27) παίρνουμε,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}T}=\frac{aT+bY+(ah+bk+c)}{a_1T+b_1Y+(a_1h+b_1k+c_1)} \tag{1.29}$$

Αν οι σταθερές h, k επιλεγούν έτσι ώστε το σύστημα των εξισώσεων,

$$\alpha h+bk+c=0$$

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$

να έχει λύση, τότε η (1.29) είναι ομογενής και μπορεί να λυθεί με την προηγούμενη μέθοδο. Για να συμβεί αυτό,

$$\frac{h}{bc_1 - b_1 c} = \frac{k}{ca_1 - c_1 a} = \frac{1}{ab_1 - a_1 b} \tag{1.30}$$

Προφανώς, αν $ab_1 = a_1 b$ για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα, η μέθοδος μας δεν οδηγεί στη λύση. Στην περίπτωση αυτή όμως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $z=at+by$ αντί του (1.28). Αν η (1.30) ισχύει, η (1.29) γίνεται,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}T} = \frac{aT + bY}{a_1 T + b_1 Y} = \frac{a + b\dfrac{Y}{T}}{a_1 + b_1\dfrac{Y}{T}} = f\left(\frac{Y}{T}\right)$$

που είναι ομογενής.

Παράδειγμα 1.17 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t + y + 1}{t - y + 2}$, $y(-0,5)=0,5$.

Λύση: Αντικαθιστώντας $t=T+h$, $y=Y+k$, παίρνουμε,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}T} = \frac{T + Y + (h + k + 1)}{T - Y + (h - k + 2)}$$

Για να βρούμε τις σταθερές h, k λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων,

$$h+k+1=0$$
$$h-k+2=0$$

που δίνει $h=-1,5$, $k=0,5$.

Άρα, πρέπει να λύσουμε την,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}T} = \frac{T + Y}{T - Y} = \frac{1 + \dfrac{Y}{T}}{1 - \dfrac{Y}{T}}$$

Θέτοντας $v=\dfrac{Y}{T}$ παίρνουμε,

$$T\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T}=\left[\frac{1+v}{1-v}-v\right]$$

ή,
$$\int\frac{(1-v)\mathrm{d}v}{1+v^2}=\ln T=c$$

Αντικαθιστώντας $T=x-h=x+3/2$,

$$v=\frac{Y}{T}=\frac{y-k}{t-h}=\frac{y-1/2}{t+3/2}$$

παίρνουμε,

$$\varepsilon\varphi^{-1}\left[\frac{2y-1}{2t+3}\right]=\tfrac{1}{2}\ln\left[(t+\tfrac{3}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2\right]+c$$

Θέτοντας την οριακή συνθήκη, έχουμε τελικά (c=0),

$$\varepsilon\varphi^{-1}\left[\frac{2y-1}{2t+3}\right]=\tfrac{1}{2}\ln\left[(t+\tfrac{3}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2\right]$$

Παράδειγμα 1.18 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t-y+1}{t-y}$.

Λύση: Εδώ, $ab_1=a_1b=-1$, γι' αυτό χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό, $z=at+by=t-y$. Άρα,

$$1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1+z}{z}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{z}$$
$$\Rightarrow\int z\mathrm{d}z=-\int\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow\quad z^2=-2t+c$$

ή,
$$(t-y)^2=-2t+c$$

1.6 Ακριβείς εξισώσεις και γιατί δεν μπορούμε να λύσουμε πά-

ρα πολλές διαφορικές εξισώσεις

Όταν αρχίσαμε την σπουδή μας πάνω στις διαφορικές εξισώσεις, η μοναδική εξίσωση που μπορούσαμε να λύσουμε ήταν η,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

Κατόπιν μεγαλώσαμε το ρεπερτόριο μας, συμπεριλαμβάνοντας όλες τις γραμμικές και χωριζόμενες εξισώσεις. Πιο γενικά, μπορούμε να λύσουμε όλες τις διαφορικές εξισώσεις που είναι, ή μπορούν να τεθούν στη μορφή,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi\,(t,\,y)\right) = 0 \tag{1.31}$$

για κάποια συνάρτηση $\varphi(t,\,y)$, αφού ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1.31) παίρνουμε,

$$\varphi(t,\,y) = \text{σταθερά} \tag{1.32}$$

και κατόπιν λύνουμε ως προς t για να βρούμε την $y(t)$.

Παράδειγμα 1.19 Η εξίσωση $1 + \text{συν}(t+y) + \text{συν}(t+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ μπορεί να γραφτεί,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t + \text{ημ}(t+y)\right] = 0$$

Άρα,

$$\varphi(t,\,y) = t + \text{ημ}(t+y) = c \Rightarrow y = -t + \text{τοξημ}(c-t)$$

Παράδειγμα 1.20 Η εξίσωση $\text{συν}(t+y) + \left[1 + \text{συν}(t+y)\right]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ γράφεται,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y + \text{ημ}(t+y)\right] = 0$$

Άρα,

$$\varphi(t,\ y)=y+\eta\mu(t+y)=c$$

Η λύση πρέπει να δοθεί στη μορφή αυτή, αφού δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς t αναλυτικά.

Η εξίσωση (1.31) είναι φανερά η πιο γενική μορφή διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως που μπορούμε να λύσουμε. Γι' αυτό είναι σημαντικό να μπορούμε να ξεχωρίζουμε πότε μία διαφορική εξίσωση μπορεί να τεθεί στην μορφή αυτή. Για να βρούμε όλες τις διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να τεθούν στη μορφή (1.31), παρατηρούμε ότι από τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t,\ y(t))=\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Άρα η διαφορική εξίσωση $M(t,\ y)+N(t,\ y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,\ y)=0$ αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi(t,\ y)$ τέτοια που να ισχύει,

$$\begin{aligned} M(t,\ y)&=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ N(t,\ y)&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{aligned} \tag{1.33}$$

Η διαπίστωση αυτή μας οδηγεί στην ακόλουθη ερώτηση: αν μας δοθούν δύο συναρτήσεις $M(t,\ y)$, $N(t,\ y)$ υπάρχει κάποια συνάρτηση $\varphi(t,\ y)$ τέτοια, που να ισχύουν οι (1.33); Δυστυχώς η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι σχεδόν πάντα όχι, όπως δείχνει και το ακόλουθο θεώρημα, που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.1 Έστω ότι οι συναρτήσεις $M(t,\ y)$ και $N(t,\ y)$ είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς t και y στο ορθογώνιο που ορίζεται από τα σημεία $(t,\ y)$, $\alpha<t<b$, $c<y<d$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $\varphi(t,\ y)$, τέτοια που να ισχύει:

$$M(t,\ y)=\frac{\partial\phi}{\partial t},\quad N(t,\ y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

αν και μόνον αν,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$$

Στη περίπτωση αυτή,

$$\varphi(t,y)=\int M(t,y)\mathrm{d}t+\int\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y$$

Ορισμός 1.3 Η διαφορική εξίσωση,

$$M(t,y)+N(t,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0 \tag{1.34}$$

καλείται ***ακριβής*** αν $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial t}$.

Παρατήρηση: Συνηθίζεται να λέγεται ότι η λύση μίας ακριβούς διαφορικής εξίσωσης δίνεται από την σχέση $\varphi(t, y)$=σταθερά. Αυτό που πραγματικά εννοούμε είναι ότι η εξίσωση $\varphi(t,y)=c$ πρέπει να λυθεί ως προς y σαν συνάρτηση των t, c. Δυστυχώς, οι πιο πολλές από τις ακριβείς διαφορικές εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά ως προς y, μπορούμε όμως να βρούμε προσεγγιστικές λύσεις οποιασδήποτε επιθυμητής ακρίβειας, με την χρήση αριθμητικών μεθόδων.

Για να λύσουμε μία ακριβή διαφορική εξίσωση, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

Από το Θεώρημα 1.1, αν $N(t,y)=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$, τότε αναγκαστικά

$$\phi(t,y)=\int N(t,y)\mathrm{d}y+k(t)$$

όπου $k(t)$ κάποια συνάρτηση του t. Επειδή,

$$M(t,y)=\frac{\partial\phi}{\partial t}=\int\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t}$$

προκύπτει ότι,

$$\frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t}=M(t,y)-\int\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\mathrm{d}y$$

Εναλλακτικά, από τις εξισώσεις (1.33) προκύπτει ότι,

$$\phi(t,y)=\int M(t,y)\mathrm{d}t+h(y)$$

και,

$$\phi(t, y) = \int N(t, y)\mathrm{d}y + k(t)$$

Συνήθως, μπορούμε να υπολογίσουμε τα $h(y)$, $k(t)$ με απλή παρατήρηση.

Παράδειγμα 1.21 Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $3y + e^t + (3t + \text{συν}y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$.

Λύση: Εδώ, $M(t, y)=3y+e^t$, $N(t, y)=3t+\text{συν}y$. Η εξίσωση αυτή είναι ακριβής αφού, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t} = 3$. Άρα, υπάρχει συνάρτηση $\varphi(t, y)$ τέτοια που να ισχύει,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 3y + e^t \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3t + \text{συν}y \tag{1.36}$$

(1) Από την (1.35) $\Rightarrow \phi(y, t) = \int (3y + e^t)\mathrm{d}t + h(y) = 3yt + e^t + h(y)$

Από την (1.36) $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 3t + h'(y) = e^t + \text{συν}y$, $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} = \text{συν}y \Rightarrow h(y) = \text{ημ}y$

(2) Από την (1.36), $\varphi(t, y)=\text{ημ}y+3ty+k(t)$. Παραγωγίζοντας ως προς t, η (1.36) μας δίνει, $3y+k'(t)=3y+e^t$. Άρα, $k(t)=e^t$ και $\varphi(t, y)=e^t+3ty+\text{ημ}y$.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τη σχέση,

$$e^t+3ty+\text{ημ}y=c$$

η οποία όμως δεν μας επιτρέπει να εκφράσουμε την $y(t)$ αναλυτικά.

(3) Εναλλακτικά, από τις (1.35), (1.36),

$$\varphi(t, y)=e^t+3ty+h(y)$$

και

$$\varphi(t, y)=\text{ημ}y+3ty+k(t)$$

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές σχέσεις που ισχύουν για την ίδια συνάρτηση, $\varphi(t, y)$, είναι προφανές ότι, $h(y)=\text{ημ}y$, $k(t)=e^t$. Άρα, $\varphi(t, y)=e^t+3ty+\text{ημ}y$.

Παράδειγμα 1.22 Να βρεθεί η λύση στο πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$3t^2y+8ty^2+(t^3+8t^2y+12y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,\quad y(2)=1.$$

Λύση:

(1) Από την (1.35), $\frac{\partial\phi}{\partial t}=3t^2y+8ty^2$

$$\Rightarrow \phi(t,y)=\int(3t^2y+8ty^2)\mathrm{d}t+h(y)=t^3y+4t^2y^2+h(y)$$

Από την (1.36), $\frac{\partial\phi}{\partial y}=t^3+8t^2y+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=t^3+8t^2y+12y^2$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=12y^2 \Rightarrow h(y)=4y^3$$

και
$$\varphi(t,\ y)=t^3y+4t^2y^2+4y^3$$

(2) Από την (1.36), $\varphi(t,\ y)=t^3y+4t^2y^2+4y^3+k(t)$. Παραγωγίζοντας ως προς t,

$$3t^2y+8ty^2+\frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t}=3t^2y+8ty^2$$

Άρα, $k(t)=0$ και $\varphi(t,y)=t^3y+4t^2y^2+4y^3=c$. Η σταθερά c δίνεται από την $\varphi(2,1)=28$.

(3) Εναλλακτικά, από τις (1.35), (1.36),

$$\varphi(t,\ y)=t^3y+4t^2y^2+h(y)$$

και,
$$\varphi(t,\ y)=t^3y+4t^2y^2+4y^3+k(t)$$

Συγκρίνοντας, βλέπουμε ότι $h(y)=4y^3$, $k(t)=0$.

Παρατήρηση: Στις περισσότερες περιπτώσεις η δεύτερη μέθοδος είναι η απλούστερη. Αν όμως είναι ευκολότερο να ολοκληρώσουμε την M ως προς t από ότι την N ως προς y, θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη και αντίστροφα.

Παράδειγμα 1.23 Να βρεθεί η λύση στο πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$4t^3e^{t+y}+t^4e^{t+y}+2t+(t^4e^{t+y}+2y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,\quad y(0)=1.$$

Λύση: Η εξίσωση είναι ακριβής, αφού,

$$\frac{\partial}{\partial y}(4t^3e^{t+y}+t^4e^{t+y}+2t)=(t^4+4t^3)e^{t+y}=\frac{\partial}{\partial t}(t^4e^{t+y}+2y)$$

Άρα, υπάρχει συνάρτηση $\varphi(t, y)$, τέτοια ώστε,

(i) $\quad 4t^3e^{t+y}+t^4e^{t+y}+2t=\frac{\partial\phi}{\partial t}$

(ii) $\quad t^4e^{t+y}+2y=\frac{\partial\phi}{\partial y}$

Σύμφωνα με την παρατήρησή μας, χρησιμοποιούμε τη δεύτερη μέθοδο. Απο την (ii), $\varphi(t,\ y)=t^4e^{t+y}+y^2+k(t)$. Παραγωγίζοντας ως προς t, και χρησιμοποιώντας την (i),

$$(t^4+4t^3)e^{t+y}+k'(t)=4t^3e^{t+y}+t^4e^{t+y}+2t$$

Άρα, $k'(t)=2t,\ k(t)=t^2$, και η γενική λύση είναι:

$$\varphi(t,\ y)=t^4e^{t+y}+y^2+t^2=c,\ \varphi(0,\ 1)=1=c$$

Άρα, η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής δίνεται από τη σχέση:

$$t^4e^{t+y}+t^2+y^2=1$$

Έστω τώρα ότι μας δίνεται η διαφορική εξίσωση,

$$M(t,\ y)+N(t,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (1.34)$$

που δεν είναι ακριβής. Μπορούμε να την κάνουμε ακριβή; Ειδικότερα, μπορούμε να βρούμε μία συνάρτηση $\mu(t, y)$ τέτοια ώστε η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση,

$$\mu(t,\ y)\ M(t,\ y)+\mu(t,\ y)\ N(t,\ y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (1.37)$$

να είναι ακριβής; Η ερώτηση αυτή είναι απλή να απαντηθεί κατά κανόνα. Η συνθήκη για να είναι η (1.37) ακριβής είναι:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(t, y)\, M(t, y)\big) = \frac{\partial}{\partial t}\big(\mu(t, y)\, N(t, y)\big)$$

ή
$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\frac{\partial N}{\partial t} \tag{1.38}$$

(όπου έχουμε παραλείψει τις ανεξάρτητες μεταβλητές t, y για απλούστευση). Άρα, η εξίσωση (1.37) είναι ακριβής αν και μόνο αν η $\mu(t, y)$ ικανοποιεί την (1.38).

Ορισμός 1.4 Η συνάρτηση $\mu(t, y)$ που ικανοποιεί την (1.38) καλείται ***παράγοντας ολοκλήρωσης*** της διαφορικής εξίσωσης (1.34).

Η συνάρτηση $\mu(t, y)$ καλείται παράγοντας ολοκλήρωσης, γιατί αν η $\mu(t, y)$ ικανοποιεί την (1.38), τότε μπορούμε να γράψουμε την (1.37) στη μορφή,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t, y) = 0$$

που μπορεί στη συνέχεια να ολοκληρωθεί για να μας δώσει την λύση $\varphi(t, y)=c$. Δυστυχώς υπάρχουν μόνο δύο ειδικές περιπτώσεις που δίνουν αναλυτικές λύσεις της (1.38). Αυτό συμβαίνει όταν ο παράγοντας ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης (1.34) είναι συνάρτηση μόνο του t ή συνάρτηση μόνο του y. Στην πρώτη περίπτωση παρατηρούμε ότι, η (1.38) γίνεται,

$$N\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu$$

Η εξίσωση αυτή όμως δεν μας οδηγεί πουθενά εκτός αν η παράσταση,

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} \tag{1.39}$$

είναι συνάρτηση μόνο του t, δηλαδή,

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} = R(t)$$

Στην περίπτωση αυτή η,

$$\mu(t) = \exp\left(\int R(t)\mathrm{d}t\right)$$

είναι ο παράγοντας ολοκλήρωσης για την (1.38).

Στην δεύτερη περίπτωση που η $\mu(t, y)$ είναι συνάρτηση μόνο του y, η (1.38) γίνεται,

$$M\frac{\mathrm{d}\mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]\mu$$

Η παράσταση αυτή δεν έχει νόημα εκτός εάν,

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = Q(y)$$

οπότε,

$$\mu(y) = \exp\left\{\int Q(y)\mathrm{d}y\right\}$$

Παρατήρηση: Πρέπει να τονισθεί ότι η παράσταση (1.39) είναι σχεδόν πάντα συνάρτηση και του y και του t και μόνο για ειδικά ζευγάρια συναρτήσεων $M(t, y)$ και $N(t, y)$ είναι συνάρτηση μόνο του ενός. ***Αυτός είναι ο λόγος που δεν μπορούμε να λύσουμε πάρα πολλές διαφορικές εξισώσεις***.

Παράδειγμα 1.24 Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης,

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

Λύση: Εδώ, $M(t,\ y)=(y^2/2)+2ye^t$, $N(t,\ y)=y+e^t$. Η εξίσωση δεν είναι ακριβής, αφού $\dfrac{\partial M}{\partial y} = y + 2e^t \neq \dfrac{\partial N}{\partial t} = e^t$. Όμως,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{y + e^t}{y + e^t} = 1$$

Άρα, η εξίσωση έχει παράγοντα ολοκλήρωσης την $\mu(t) = \exp\left(\int 1\mathrm{d}t\right) = e^t$. Αυτό σημαίνει ότι η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση,

$$\frac{y^2}{2}e^t+2ye^{2t}+(ye^t+e^{2t})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$$

είναι ακριβής. Άρα, υπάρχει συνάρτηση $\varphi(t, y)$, τέτοια ώστε,

$$\text{(i)}\qquad \frac{y^2}{2}e^t+2ye^{2t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\text{(ii)}\qquad ye^t+e^{2t}=\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

που σημαίνει,

$$\text{(i)}\qquad \phi(t,y)=\frac{y^2}{2}e^t+ye^{2t}+h(y)$$

$$\text{(ii)}\qquad \phi(t,y)=\frac{y^2}{2}e^t+ye^{2t}+k(t)$$

Άρα, $h(y)=k(t)=0$ και η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι,

$$\phi(t,y)=\frac{y^2}{2}e^t+ye^{2t}=c$$

Λύνοντας ως προς y,

$$y(t)=-e^t\pm[e^{2t}+2ce^{-t}]^{1/2}$$

Παράδειγμα 1.25 Χρησιμοποιήσετε τις μεθόδους της ενότητας αυτής, για να βρείτε την γενική λύση της γραμμικής εξίσωσης $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a(t)y=b(t)$.

Λύση: Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $M(t,y)+N(t,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$, όπου $M(t,y)=a(t)y-b(t)$ και $N(t,y)=1$.

Η εξίσωση αυτή δεν είναι ακριβής, αφού $\frac{\partial M}{\partial y}=a(t)\neq\frac{\partial N}{\partial t}=0$. Όμως,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)=a(t)$$

Άρα, $\mu(t)=\exp\left(\int a(t)\mathrm{d}t\right)$ είναι παράγοντας ολοκλήρωσης για την γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως. Επομένως, υπάρχει συνάρτηση $\varphi(t, y)$ τέτοια ώστε,

$$\text{(i)} \qquad \mu(t)\,[a(t)y-b(t)]=\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\text{(ii)} \qquad \mu(t)=\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Από την (ii), $\varphi(t,\ y)=\mu(t)y+k(t) \ \Rightarrow \dfrac{\partial\phi}{\partial t}=\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}y+\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$.

Από την (i) $\mu'(t)y+k'(t)=\mu(t)a(t)y-\mu(t)b(t)$.

Αλλά $\mu'(t)=a(t)\mu(t)\Rightarrow k'(t)=-\mu(t)b(t)$. Άρα και, $\phi(t, y)=\mu(t)y-\int\mu(t)b(t)\mathrm{d}t$.
και η γενική λύση είναι,

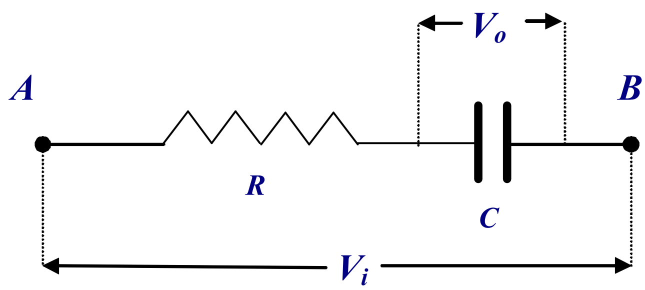
$$\mu(t)y-\int\mu(t)b(t)\mathrm{d}t=c$$

που είναι η ίδια με αυτή που βρήκαμε στην Ενότητα 1.2.

1.7 Εφαρμογές

Α. Ηλεκτρικά κυκλώματα

Τμήμα κάποιου ηλεκτρονικού κυκλώματος αποτελείται από ένα πυκνωτή C και αντίσταση R συνδεδεμένα εν σειρά, όπως φαίνεται και στο Σχ. 1.1.



Σχήμα 1.1

Εάν εφαρμόσουμε μία τάση V_i μεταξύ των σημείων A, B ποιά θα είναι η συμπεριφορά της τάσης V_o;

Για το ρεύμα που περνάει από την αντίσταση R, έχουμε,

$$i = \frac{V_i - V_o}{R} \tag{1.40}$$

ενώ για τον πυκνωτή,

$$i = C\frac{\mathrm{d}V_o}{\mathrm{d}t} \tag{1.41}$$

Απαλείφοντας το ρεύμα i, μεταξύ των δύο εξισώσεων,

$$\frac{V_i - V_o}{R} = C\frac{\mathrm{d}V_o}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}V_o}{\mathrm{d}t} + \frac{V_o}{CR} = \frac{V_i}{CR} \tag{1.42}$$

Η διαφορική εξίσωση εξίσωση (1.42) είναι μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που μπορούμε να λύσουμε με την μέθοδο του παράγοντα ολοκλήρωσης. Έχουμε λοιπόν:

$$\mu(t) = \exp\left\{\int \frac{1}{CR}\mathrm{d}t\right\} = e^{t/CR}$$

Επομένως,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t/CR}\ V_o = e^{t/CR}\ \frac{V_i}{CR}$$

ή
$$V_o = e^{-t/CR}\left\{\int \frac{V_i}{CR} e^{t/CR}\ \mathrm{d}t + A\right\}$$

$$= e^{-t/CR}\,\{V_i\ e^{t/CR} + A\} = V_i + A\exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\}$$

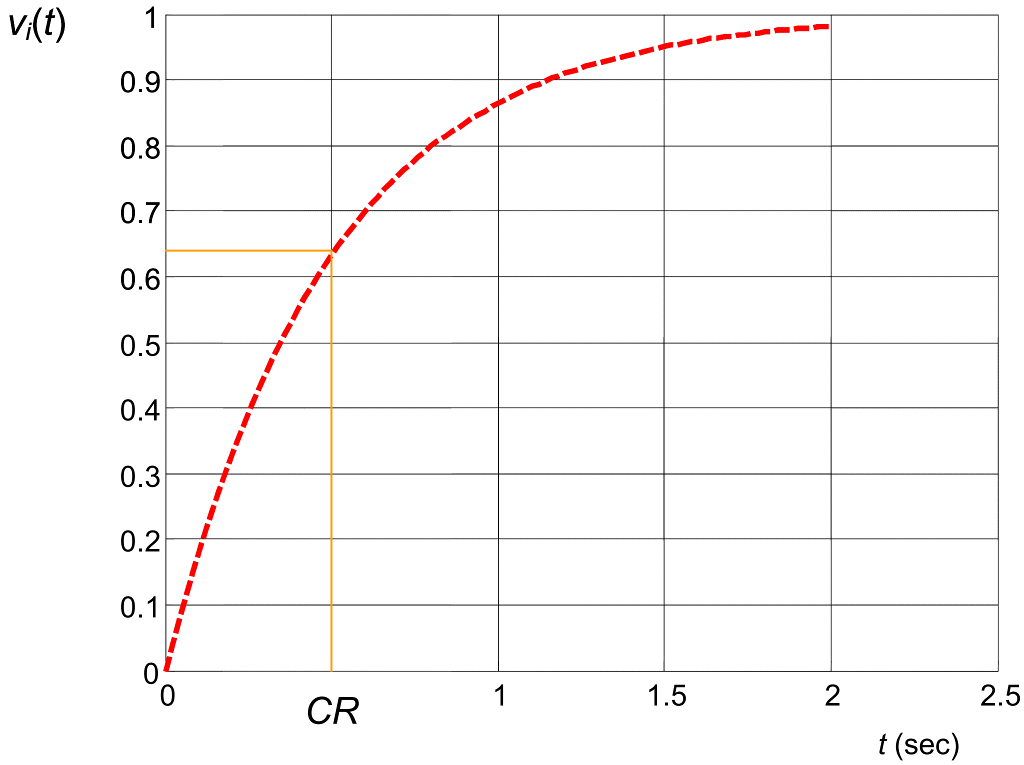
Για να υπολογίσουμε την σταθερά A, υποθέτουμε ότι σε χρόνο t=0, το σύστημα είναι σε ηρεμία και άρα $V_o(0)$=0. Άρα, $0=V_i+A \Rightarrow A=-V_i$. Τελικά,

$$V_o = V_i\left(1 - \exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\}\right) \tag{1.43}$$

Η (1.43) μας δίνει την απόκριση του συστήματος για διάφορα είδη εισόδων V_i. Αν υποθέσουμε ότι V_i=1, η (1.43) γίνεται,

$$V_o = 1 - \exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\}$$

και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχ. 1.2.



Σχήμα 1.2

Βλέπουμε ότι η τάση V_o αυξάνεται εκθετικά και πλησιάζει ασυμπτωτικά την τιμή της τάσης εισόδου V_i. Μπορούμε επίσης να επισημάνουμε κάποια φυσική σημασία στην σταθερά CR. Παρατηρούμε ότι στον χρόνο t=CR,

$$V_o = 1 - e^{-1} = 0{,}632$$

δηλαδή μετά από διάστημα CR η απόκριση έχει φθάσει στο 63,2% της τάσης εισόδου V_i. Άρα, η σταθερά CR είναι κάποιο μέτρο της ταχύτητας με την οποία αντιδρά το σύστημα σε κάποια είσοδο, και γι' αυτό καλείται ***χρονική σταθερά*** του συστήματος. Επίσης, συστήματα που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση (1.42) καλούνται ***συ-***

στήματα εκθετικής καθυστέρησης.

Β. Ένα πρόβλημα απόρριψης πυρηνικών αποβλήτων

Για αρκετά χρόνια η Επιτροπή Ατομικής Ενέργειας των Η.Π.Α. ξεφορτωνόταν τα συμπυκνωμένα ραδιενεργά απόβλητα, τοποθετώντάς τα σε καλά σφραγισμένα βαρέλια τα οποία μετά έριχναν στην θάλασσα σε βάθος περίπου 300 ποδών (Εικ. 1.3).

Εικόνα 1.3

Όταν ορισμένες ομάδες - οικολόγοι, επιστήμονες - ανησύχησαν για την μέθοδο αυτή, διαβεβαιώθηκαν από την Ε.Α.Ε. ότι τα βαρέλια δεν θα παρουσιάζουν διαρροές. Εξαντλητικές δοκιμές απόδειξαν ότι αυτό ήταν πράγματι σωστό. Όμως, στη συνέχεια ορισμένοι επιστήμονες διερωτήθηκαν μήπως τα βαρέλια παρουσιάσουν ρωγμές κατά την πρόσκρουση στον πυθμένα του ωκεανού. Η απάντηση της Ε.Α.Ε. ήταν: «Ποτέ». «Αυτό θα το δούμε», ήταν η απάντηση των επιστημόνων, οι οποίοι στην συνέχεια πειραματιζόμενοι βρήκαν ότι τα βαρέλια θα ράγιζαν κατά την πρόσκρουση αν η ταχύτητά τους την στιγμή εκείνη ήταν μεγαλύτερη από 40 πόδια/δευτερόλεπτο. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στον υπολογισμό της ταχύτητας των βαρελιών κατά την πρόσκρουση.Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι η επιτάχυνση ενός σώματος μάζας m είναι ανάλογη με την συνισταμένη δύναμη F που ενεργεί πάνω στο κέντρο βάρους του σώματος, δηλαδή,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}F \tag{1.44}$$

Η μάζα ενός σώματος συνδέεται με το βάρος του με τη σχέση,

$$w = mg$$

όπου g η επιτάχυνση εξαιτίας της βαρύτητας.

Τώρα κατά την κάθοδο του βαρελιού επενεργούν σ' αυτό τρεις δυνάμεις: το βάρος του w, η δύναμη άνωσης B και η αντίσταση του νερού D. Χρησιμοποιώντας το Εγγλέζικο σύστημα μέτρησης, τα μεγέθη των δυνάμεων αυτών είναι: (i) w=527,436 lb (ii) το μέγεθος της δύναμης άνωσης είναι ίσο με το βάρος του νερού που εκτοπίζεται από το βαρέλι, δηλαδή, B=7,35 ft^3×63,99 lb=470,327 lb (όγκος βαρελιού 7,35ft^3, βάρος 1 ft^3 θαλασσινού νερού=63,99 lb). (iii) Η αντίσταση του νερού είναι ανάλογη με την ταχύτητα του κινούμενου βαρελιού, $D=cV$. Μετά από πειράματα,

$$D = 0{,}08V\,\frac{(\mathrm{lb})\,(\mathrm{s})}{\mathrm{ft}}$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι y=0 στην επιφάνεια της θάλασσας, και ότι το y αυξάνει προς τα κάτω. Τότε η w είναι θετική και οι E, D αρνητικές. Άρα, από την (1.44),

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}(w - B - cV) = \frac{g}{w}(w - B - cV)$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την εξίσωση σαν πρώτης τάξεως, θέτοντας,

$$V = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Έτσι,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{cg}{w}V = \frac{g}{w}(w - B)$$

Αρχικά, η ταχύτητα του βαρελιού είναι 0, άρα ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{cg}{w}V = \frac{g}{w}(w - B)\,, \quad V(0) = 0 \tag{1.45}$$

που έχει λύση την,

$$V(t) = \frac{w - B}{c}\left[1 - e^{(-cg/w)t}\right] \tag{1.46}$$

Η εξίσωση (1.46) μας δίνει την ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου. Για να βρούμε την ταχύτητα πρόσκρουσης πρέπει να υπολογίσουμε τον χρόνο t της διάρκειας της πτώσης. Δυστυχώς από την (1.46) δεν μπορούμε να βρούμε τον χρόνο σαν συνάρτηση της απόστασης y. Επομένως από την (1.46) δεν μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα πρόσκρουσης. Όμως η Ε.Α.Ε. μπορεί να χρησιμοποιήσει την (1.46) για να προσπαθήσει να αποδείξει ότι τα βαρέλια δεν θα ραγίσουν κατά την πρόσκρουση. Πραγματικά από την (1.46) παρατηρούμε ότι η $V(t)$ είναι μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση του χρόνου με ασυμπτωτικό όριο,

$$V_T = \frac{w-B}{c}$$

Η τιμή V_T ονομάζεται τελική ταχύτητα του βαρελιού. Προφανώς $V(t) \le V_T$, επομένως η ταχύτητα πρόσκρουσης είναι σίγουρα μικρότερη από,

$$\frac{w-B}{c} = \frac{527{,}436 - 470{,}327}{0{,}08} = 713{,}86 \text{ ft/s}$$

που όμως είναι ανεπίτρεπτα μεγάλη.

Για να λύσουμε λοιπόν το πρόβλημα μας θα πρέπει να εκφράσουμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση της απόστασης. Η συνάρτηση $v(y)$ είναι πολύ διαφορετική από την $V(t)$ αλλά συνδέονται με την σχέση:

$$V(t) = v(y(t))$$

αν εκφράσουμε την απόσταση σαν συνάρτηση χρόνου. Παραγωγίζοντας αλυσιδωτά,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Επομένως,

$$\frac{w}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = w - B - cV$$

Αλλά $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V(t) = v(y)$. Άρα, η $v(y)$ ικανοποιεί την,

$$\frac{w}{g}v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = w - B - cv \Rightarrow \frac{v}{w-B-cv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{g}{w}$$

Επιπλέον, $v(0)=v(y(0)=V(0)=0$. Άρα,

$$\int_0^v \frac{r\,\mathrm{d}r}{w-B-cr} = \int_0^y \frac{g}{w}\mathrm{d}s = \frac{gy}{w}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\int_0^v \frac{r\,\mathrm{d}r}{w-B-cr} &= \int_0^v \frac{r-(w-B)/c}{w-B-cr}\mathrm{d}r + \frac{w-B}{c}\int_0^v \frac{\mathrm{d}r}{w-B-cr} \\ &= -\frac{1}{c}\int_0^v \mathrm{d}r + \frac{w-B}{c}\int_0^v \frac{\mathrm{d}r}{w-B-cr} \\ &= -\frac{v}{c} - \frac{w-B}{c^2}\ln\frac{|w-B-cv|}{w-B}\end{aligned}$$

Επειδή, $v<(w-g)/c$,

$$\frac{gy}{w} = -\frac{v}{c} - \frac{(w-g)}{c^2}\ln\frac{w-B-cv}{w-B} \tag{1.47}$$

Σ' αυτό το σημείο θα έπρεπε να απογοητευτούμε, αφού δεν μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση της απόστασης από την (1.47). Χρησιμοποιώντας όμως αριθμητικές μεθόδους μπορούμε να υπολογίσουμε το $v(300)$, αρκεί να βρούμε μία καλή αρχική προσέγγιση. Την προσέγγιση αυτή βρίσκουμε ως εξής: θέτοντας $c=0$, στην διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $v(y)$, παίρνουμε,

$$\frac{w}{g}u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = w-B\,,\;\; u(0)=0 \tag{1.48}$$

(όπου έχουμε αντικαταστήσει το v με το u για να αποφύγουμε την σύγχυση). Ολοκληρώνοντας την (1.48) κατευθείαν παίρνουμε,

$$\frac{w}{g}\frac{u^2}{2} = (w-B)y \Rightarrow u(y) = \left[\frac{2g}{w}(w-B)y\right]^{1/2}$$

Ειδικότερα,

$$u(300) = \left[\frac{2g}{w}(w-B)300\right]^{1/2} = \sqrt{2092} \cong 45{,}7\text{ft/s}$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η τιμή $u(300)$ είναι μία πολύ καλή προσέγγιση στην $v(300)$. Η απόδειξη του ισχυρισμού μας είναι ως εξής:

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του βαρελιού είναι μεγαλύτερη αν δεν υπάρχει αντίσταση. Άρα, $v(300)\le u(300)$.

Δεύτερον, η ταχύτητα αυξάνεται όσο αυξάνεται η απόσταση, και άρα $v(y)\le v(300)$ για $y \le 300$. Επομένως η αντίσταση D είναι πάντα μικρότερη από $0{,}08\times u(300)$ που είναι περίπου 3,7 lb, και η συνισταμένη $w-B$ που τραβάει το βαρέλι προς τα κάτω είναι περίπου 57,1 lb που είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την D. Φαίνεται λογικό λοιπόν, ότι η $u(y)$ είναι πολύ καλή προσέγγιση στην $v(300)$. Και πραγματικά αυτό επιβεβαιώνεται και από τον αριθμητικό υπολογισμό της ταχύτητας, που είναι:

$$v(300)=45{,}1\ \text{ft/s}$$

Άρα τα βαρέλια μπορούν να σπάσουν κατά την πρόσκρουση και οι επιστήμονες είχαν δίκιο. Σαν αποτέλεσμα η Ε.Α.Ε. απαγόρευσε έκτοτε την απόρριψη των ραδιενεργών αποβλήτων στη θάλασσα.

Γ. Πρότυπα πληθυσμών

(α) Η δυναμική της αύξησης των καρκινικών όγκων

Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι τα «ελευθέρως ζώντα» διαιρούμενα κύτταρα, όπως τα βακτήρια, αυξάνονται με ρυθμό ανάλογο του όγκου των διαιρούμενων κυττάρων εκείνη την στιγμή. Έστω $v(t)$ ο όγκος των διαιρουμένων κυττάρων σε χρόνο t. Τότε,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\lambda v \qquad (1.49)$$

για κάποια θετική σταθερά λ. Η λύση της (1.49) είναι,

$$v(t)=v_0\, e^{\lambda(t-t_0)} \qquad (1.50)$$

όπου v_0 είναι ο όγκος των διαιρούμενων κυττάρων στον αρχικό χρόνο t_0. Επομένως τα ελευθέρως ζώντα διαιρούμενα κύτταρα αυξάνονται εκθετικά. Ένα σημαντικό επακόλουθο της (1.50) είναι ότι ο όγκος των κυττάρων διπλασιάζεται κάθε χρονικό διάστημα μήκους $\ln 2/\lambda$, αφού στην περίπτωση αυτή,

$$\begin{aligned} v(t_2)=2v(t_1) &\Rightarrow v_0\, e^{\lambda(t_2-t_0)}-2v_0\, e^{\lambda(t_1-t_0)}=0 \\ &\Rightarrow v_0\, e^{-\lambda t_0}\,(e^{\lambda t_2}-2\,e^{\lambda t_1})=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda t_2 - \ln 2 - \lambda t_1 = 0$$
$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \ln 2/\lambda$$

Από την άλλη μεριά, οι στερεοί όγκοι δεν αυξάνονται εκθετικά. Όσο οι όγκοι μεγαλώνουν, ο χρόνος διπλασιασμού του συνολικού όγκου των όγκων μειώνεται συνεχώς. Διάφοροι ερευνητές έχουν δείξει ότι τα δεδομένα για πολλούς στερεούς όγκους ταιριάζουν αξιοσημείωτα καλά, στην εξίσωση,

$$v(t) = v_0 \exp\left\{\frac{\lambda}{a}\left(1 - \exp(-at)\right)\right\} \tag{1.51}$$

όπου λ, α θετικές σταθερές. Η εξίσωση (1.51) συνήθως αναφέρεται σαν ***σχέση Gompertzian***. Λέει ότι οι όγκοι αυξάνονται όλο και πιο αργά και τελικά πλησιάζουν τον οριακό όγκο $v_0 e^{\lambda/\alpha}$. Οι ιατρικοί ερευνητές από πολύ καιρό ενδιαφέρονται για τα αίτια της παρέκκλισης αυτής από την εκθετική αύξηση. Μπορούμε να πλησιάσουμε την απάντηση του προβλήματος αυτού, βρίσκοντας μία διαφορική εξίσωση που να ικανοποιείται από την $v(t)$. Παραγωγίζοντας την (1.51), παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= v_0 \lambda \exp(-at) \exp\left\{\frac{\lambda}{a}\left(1 - \exp(-at)\right)\right\} \\ &= \lambda e^{-at} v\end{aligned} \tag{1.52}$$

Δυο αντικρουόμενες θεωρίες έχουν προωθηθεί για την δυναμική της αύξησης των όγκων. Αντιστοιχούν στις δύο διατάξεις,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (\lambda e^{-at})v \tag{1.53α}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lambda(e^{-at}v) \tag{1.53β}$$

της διαφορικής εξίσωσης (1.52). Σύμφωνα με την πρώτη θεωρία, η επιβράδυνση της αύξησης των όγκων οφείλεται στην αύξηση της μέσης ηλικίας γενεών των κυττάρων, χωρίς αλλαγή στο ποσοστό των αναπαραγομένων κυττάρων. Όσο προχωράει ο χρόνος, τα αναπαραγόμενα κύτταρα ενηλικιώνονται και έτσι διαιρούνται βραδύτερα. Η θεωρία αυτή αντιστοιχεί στην (1.53α). Η (1.53β) υποδηλώνει ότι η μέση ηλικία γενεών παραμένει σταθερά, και ότι η επιβράδυνση της αύξησης οφείλεται στην απώλεια αναπαραγομένων κυττάρων των όγκων. Μια πιθανή εξήγηση αυτού είναι ότι στο κέντρο των όγκων δημιουργείται μία νεκρωμένη περιοχή. Η νέκρωση αυτή παρουσιάζεται όταν οι όγκοι έχουν φθάσει σε κάποιο κρίσιμο μέγεθος, διαφορετικό για κάθε τύπο όγκου, και στην συνέχεια «ο πυρήνας» αυτός αυξάνεται ταχύτατα καθώς αυξάνεται η συνολική μάζα των όγκων. Σύμφωνα με την θεωρία αυτή, η νεκρωμένη περιοχή δημιουργείται γιατί σε πολλούς όγκους η παροχή αίματος, και επομένως οξυγόνου και τροφής, περιορίζεται στην επιφάνεια τους και σε μικρή απόσταση κάτω από αυτή. Καθώς οι όγκοι μεγαλώνουν, η παροχή οξυγόνου στον πυρήνα με διάχυση, γίνεται όλο και δυσκολώτερη με αποτέλεσμα την δημιουργία της νεκρωμένης περιοχής.

(β) Ανθρώπινοι πληθυσμοί

Ο εκθετικός νόμος της αύξησης των πληθυσμών δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται σε ανθρώπινες ή παρόμοιες κοινωνίες. Στις περιπτώσεις αυτές το πρότυπο της γραμμικής εξίσωσης ισχύει όσο οι πληθυσμοί είναι μικροί. Όταν όμως ο πληθυσμός αυξάνεται τα μέλη του συναγωνίζονται μεταξύ τους για τον περιορισμένο χρόνο, φυσικούς πόρους και τροφή. Επομένως πρέπει να προσθέσουμε κάποιον όρο που να αντανακλά τον περιορισμό αυτό. Μια κατάλληλη εκλογή είναι ο bp^2 όπου b σταθερά. Επομένως η διορθωμένη εξίσωση είναι,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = ap - bp^2 \ , \quad p(t_0) = p_0 \tag{1.54}$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή σαν ***λογιστικός νόμος***, και οι συντελεστές a, b καλούνται ***ζωτικοί συντελεστές*** του πληθυσμού. Λύνοντας την (1.54), παίρνουμε,

$$\int_{p_0}^{p} \frac{1}{ar - br^2}\mathrm{d}r = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s = t - t_0 \tag{1.55}$$

Επειδή $\dfrac{1}{ar - br^2} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{b}{a - br}\right)$, από την (1.55),

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\ln\frac{p}{p_0}\left|\frac{a - bp_0}{a - bp}\right| = t - t_0 \Rightarrow e^{a(t-t_0)} = \frac{p}{p_0}\frac{a - bp_0}{a - bp}$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}} \tag{1.56}$$

(σημ.: κάποιες ενδιάμεσες πράξεις έχουν παραλειφθεί).

Παρατηρούμε ότι,

$$\underset{t\to\infty}{\text{ορ}}\; p(t) = \frac{ap_0}{bp_0} = \frac{a}{b}$$

Δηλαδή ανεξάρτητα από την αρχική τιμή, ο πληθυσμός πάντα πλησιάζει την οριακή τιμή α/b. Η καμπύλη της $p(t)$ φαίνεται στο Σχ. 1.4.

Βλέπουμε ότι αν $0<p_0<\alpha/b$ η $p(t)$ αυξάνεται μονοτονικά. Επίσης, επειδή,

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2} = a\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - 2bp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = (a-2bp)\; p(a-bp)$$

η $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ αυξάνεται όταν η $p(t)<\alpha/2b$ και μειώνεται όταν $p(t)>\alpha/2b$.

Για να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα αυτά στον ανθρώπινο πληθυσμό στην γη, πρέπει να υπολογίσουμε τους ζωτικούς συντελεστές α και b. Ορισμένοι οικολόγοι έχουν εκτιμήσει ότι η φυσική τιμή του α είναι 0,029. Ξέρουμε επίσης ότι ο ανθρώπινος πληθυσμός αυξάνονταν με ρυθμό 2% ετησίως όταν ο πληθυσμός ήταν $3{,}06\times10^9$. Επειδή,

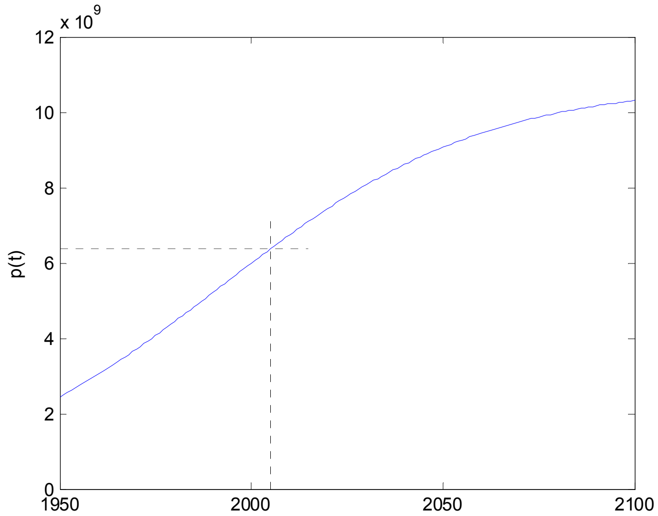
$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = a - bp$$

$$\Rightarrow\; 0{,}02=\alpha-3{,}06\times10^9 b \Rightarrow\; b=2{,}941\times10^{-12}$$

Επομένως, σύμφωνα με τον λογιστικό νόμο η οριακή τιμή του ανθρώπινου πληθυσμού στην γη είναι:

$$\frac{a}{b} = \frac{0.029}{(2.941)10^{-12}} = 9{,}86 \text{ δισεκατομμύρια}$$

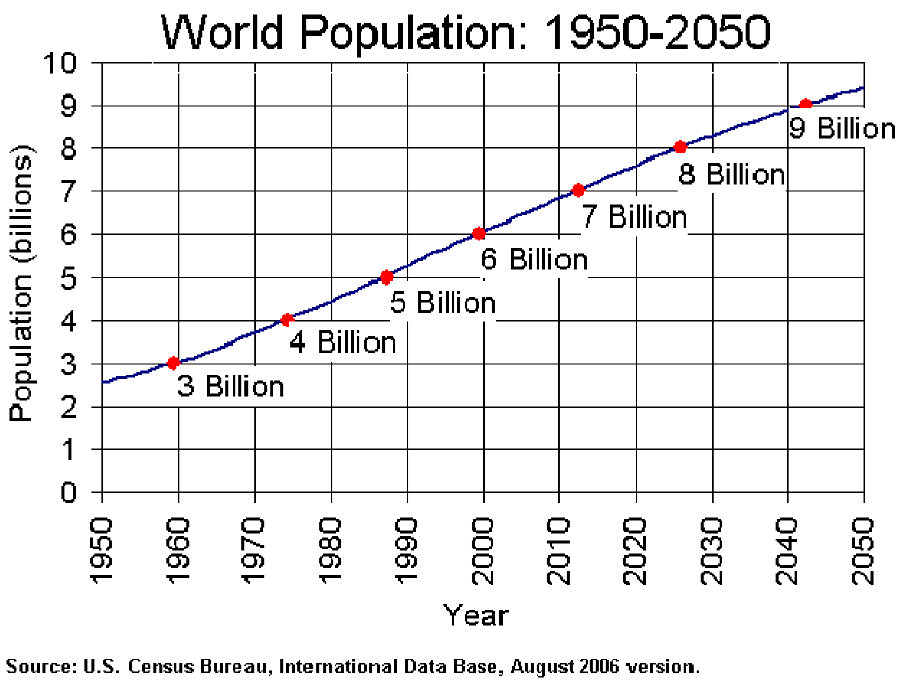
Για να δούμε πόσο καλά απεικονίζει την εξέλιξη του ανθρώπινου πληθυσμού η συνάρτηση αυτή. Στο Σχ. 1.4 βλέπουμε το γράφημα της όπου ως αρχική τιμή πήραμε $p(1950) = 2{,}45$ δισ/ρια.



Σχήμα 1.4 Γράφημα του ανθρώπινου πληθυσμού

Όπως φαίνεται $p(2006) \approx 6{,}4 \times 10^9$.

Από τον ιστότοπο `http://www.census.gov/ipc/www/world.html` διαβάζουμε ότι ο πληθυσμός το 2006 ήταν περίπου $6{,}5 \times 10^9$. Επομένως οι συγκεκριμένες τιμές ταιριάζουν αρκετά καλά με τα δεδομένα. Για περαιτέρω συγκρίσεις, στο Σχ. 1.5 μπορούμε να δούμε το σύνολο των πραγματικών τιμών.



Σχήμα 1.5 Παγκόσμιος πληθυσμός από την Αμερικανικό Γραφείο Απογραφής

Σημείωση: Ο αναγνώστης δεν θα πρέπει να υπερτιμήσει το προηγούμενο υπόδειγμα, καθώς έχει δεχτεί πολλές αρνητικές κριτικές. Οι κυριότερες είναι: α) οι παράμετροι a, b δεν είναι σταθεροί, β) ο πληθυσμός δεν είναι ομογενής και γ) έχει παρατηρηθεί ότι κάποιοι πληθυσμού ταλαντώνονται γύρω από μία μέση τιμή.

1.8 Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

(α) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\ \text{συν}t = 0$

(β) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\sqrt{t}\ \text{ημ}t = 0$

(γ) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = te^{t}$

(δ) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{t}{1+t^2}\,y = 1 - \dfrac{t^3}{1+t^4}\,y$

2. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικής τιμής:

(α) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}$, $y(0)=-1$

β) $t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + \sqrt{t^2+y^2}$, $y(1)=0$

(γ) $3ty + y^2 + (t^2 + ty)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$, $y(2)=1$

3. Δείξτε ότι αν, $\dfrac{1}{M}\left[\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right] = Q(y)$, η διαφορική εξίσωση,

$$M(t,\,y) + N(t,\,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

έχει παράγοντα ολοκλήρωσης της μορφής $\exp\left(\int Q(y)\mathrm{d}y\right)$.

4. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(α) $(t + 2y + 3) + (2t + 4y - 1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$

(β) $y\text{τεμ}2t + \text{τεμ}t\,\text{εφ}t + (2y + \text{εφ}t)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$

5. Η διαφορική εξίσωση, $e^{t}\text{τεμ}y - \text{εφ}y + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$, έχει ένα παράγοντα ολοκλήρωσης της μορφής $e^{-at}\text{συν}y$ για κάποια σταθερά a. Να βρεθεί η a και να λυθεί η διαφορική εξίσωση.

6. Να υπολογισθεί η συμπεριφορά όλων των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{t}y=\frac{1}{t^2} \text{ όταν } t\to\infty\ .$$

7. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k(a-y)\,(b-y)\ ,\ \ y(0)=0\ ,\ \ \ a,b>0$$

και να βρεθεί το πεδίο ορισμού των λύσεων.

8. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα V_0 από την επιφάνεια της γης. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει αντίσταση αέρος αλλά θεωρώντας ότι το πεδίο βαρύτητας αλλάζει με το ύψος, βρίσκεται ότι $m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{mgR^2}{(y+R)^2}$ όπου R η ακτίνα της γης και y η απόσταση από την επιφάνεια.

(α) Έστω $V(t)=v(y(t))$. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $v(y)$.

(β) Να βρεθεί η μικρότερη αρχική ταχύτητα V_0 για την οποία το σώμα δεν θα γυρίσει στην γη.

9. Να υπολογισθεί η σταθερά a ώστε η εξίσωση $\frac{1}{t^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{(at+1)}{y^3}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ να είναι ακριβής και στη συνέχεια να λυθεί η διαφορική εξίσωση.

2 Διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως

2.1 Αλγεβρικές ιδιότητες των λύσεων

Η διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως είναι μία εξίσωση της μορφής,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.1}$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \eta\mu t + 3y + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

είναι μία διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Η συνάρτηση $y(t)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.1) αν ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση, δηλαδή, αν:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

Έτσι η συνάρτηση $y(t)$=συνt είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -y$$

αφού $\frac{\mathrm{d}^2(\sigma\upsilon\nu t)}{\mathrm{d}t^2} = -\sigma\upsilon\nu t$.

Οι διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως ανακύπτουν πολύ συχνά σε εφαρμογές. Η πιο φημισμένη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως είναι ο δεύτερος νόμος της κίνησης του Νεύτωνα,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

η οποία διέπει την κίνηση ενός σώματος μάζας m που κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης F. Στην εξίσωση αυτή, m είναι η μάζα του σώματος, y=$y(t)$ είναι η θέση στον χρόνο t, dy/dt είναι η ταχύτητα και F είναι η ολική δύναμη που επενεργεί στο σώμα. Η δύναμη F μπορεί να εξαρτάται από την θέση και την ταχύτητα του σώματος, όπως επίσης και από τον χρόνο.

Επιπλέον της διαφορικής εξίσωσης (2.1), συχνά θα υπάρχουν αρχικές συνθήκες στην $y(t)$, της μορφής,

$$y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0' \tag{2.2}$$

(όπου ο τόνος «$'$» δηλώνει παραγώγιση δηλαδή $y'\equiv \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$).

Η διαφορική εξίσωση (2.1) μαζί με τις αρχικές συνθήκες (2.2) συνθέτουν το γνωστό πρόβλημα αρχικής τιμής. Για παράδειγμα, έστω $y(t)$ η θέση ενός σώματος που κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας. Τότε η $y(t)$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-g,\quad y(t_0)=y_0,\quad y'(t_0)=y_0'$$

όπου y_0 είναι η αρχική θέση του σώματος και y_0' η αρχική του ταχύτητα.

Οι διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως είναι εξαιρετικά δύσκολο να λυθούν. Αυτό δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει μετά την εμπειρία μας με τις εξισώσεις πρώτης τάξεως. Το μόνο που θα κατορθώσουμε θα είναι να λύσουμε την ειδική διαφορική εξίσωση,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+q(t)y=g(t) \tag{2.3}$$

Ευτυχώς όμως, πολλές από τις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως που εμφανίζονται στις εφαρμογές είναι αυτής της μορφής. Η διαφορική εξίσωση (2.3) καλείται ***γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως***, επειδή οι $y(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ εμφανίζονται μόνες τους.

Για παράδειγμα οι διαφορικές εξισώσεις,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\eta\mu t=e^t \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+e^t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=1$$

είναι γραμμικές, ενώ η,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=1$$

είναι μη γραμμική λόγω του όρου $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2$.

Ας θεωρήσουμε κατ' αρχή την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}q(t)y=0 \tag{2.4}$$

η οποία προκύπτει από την (2.3) αν θέσουμε $g(t)\equiv 0$. Δεν είναι καθόλου προφανές στο σημείο αυτό πώς να βρούμε όλες τις λύσεις της (2.4) ή πώς να λύσουμε το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+q(t)y=0\,,\quad y(t_0)=y_0\,,\quad y'(t_0)=y'_0 \tag{2.5}$$

Για τον λόγο αυτό, πριν αναπτύξουμε κάποια λεπτομερή διαδικασία για να λύσουμε την (2.4) θα πρέπει πρώτα να δούμε αν υπάρχει κάποια λύση. Η πληροφορία αυτή περιέχεται στο ακόλουθο Θεώρημα, που παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.1 (Ύπαρξης και μοναδικότητας) Έστω ότι οι συναρτήσεις $p(t)$ και $q(t)$ είναι συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $\alpha<t<\beta$. Τότε, υπάρχει μία και μόνο μία συνάρτηση $y(t)$ που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικής τιμής (2.5) στο διάστημα $\alpha<t<\beta$. Ειδικότερα, οποιαδήποτε λύση $y(t)$ της (2.4) που ικανοποιεί τις $y(t_0)=y'(t_0)=0$ για κάποιο χρόνο $t=t_0$ πρέπει να είναι ταυτόσημη με 0.

Το θεώρημα αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο για δύο λόγους: πρώτον μας επιτρέπει να ψάξουμε για την μοναδική λύση $y(t)$ της (2.5) και δεύτερον μας βοηθάει να βρούμε όλες τις λύσεις της (2.4).

Αρχίζουμε την ανάλυση της εξίσωσης (2.4) με την σημαντική παρατήρηση ότι το αριστερό μέλος,

$$y''+p(t)y'+q(t)y$$

της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να ιδωθεί σαν ορισμός μίας «συνάρτησης συναρτήσεως»: για κάθε συνάρτηση y που έχει δύο παραγώγους ορίζουμε μία άλλη συνάρτηση, που καλούμε $\mathcal{D}[y]$, με τη σχέση,

$$\mathcal{D}[y](t)=y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)$$

Σε μαθηματική γλώσσα, ο $\mathcal{D}$ είναι ένας ***τελεστής*** που επιδρά σε συναρτήσεις: υπάρχει δηλαδή κάποιος προδιαγεγραμμένος κανόνας που σχετίζει κάθε συνάρτηση $y(t)$ με μία νέα συνάρτηση $\mathcal{D}[y](t)$.

Παράδειγμα 2.1 Έστω, $p(t)=0$, $q(t)=t$. Τότε, $\mathcal{D}[y](t)=y''(t)+ty(t)$. Αν $y(t)=$συνt, τότε,

$$\mathcal{D}[y](t)=(\text{συν}t)''+t\text{συν}t=(t-1)\text{συν}t$$

και αν $y(t)=t^3$,

$$\mathcal{D}[y](t)=(t^3)''+t(t^3)=t^4+6t$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο τελεστής $\mathcal{D}$ ταιριάζει την συνάρτηση $(t-\alpha)$ συνt στην συνάρτηση συνt και την (t^4+6t) στην t^3.

Η έννοια ενός τελεστή που επιδρά πάνω σε συναρτήσεις, ή με άλλα λόγια της «συνάρτησης συναρτήσεως», είναι ανάλογη με την έννοια της συνάρτησης μίας μεταβλητής t. Ας θυμηθούμε τον ορισμό μίας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα $\mathbb{I}$: για κάθε αριθμό t στο $\mathbb{I}$ σχετίζουμε ένα νέο αριθμό που καλούμε $f(t)$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, σε κάθε συνάρτηση y που έχει δύο παραγώγους, σχετίζουμε μία νέα συνάρτηση που καλούμε $\mathcal{D}[y]$. Η έννοια αυτή είναι εξαιρετικά εκλεπτυσμένη, γιατί κατά κάποιο τρόπο, μεταχειριζόμαστε μία συνάρτηση όπως ένα σημείο. Πρέπει να παραδεχτούμε, ότι η έννοια αυτή είναι αρκετά δύσκολο να κατανοηθεί. Γι' αυτό δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι η έννοια της «συνάρτησης συναρτήσεως» αναπτύχθηκε στις αρχές αυτού του αιώνα, και ότι πολλά από τα «δυνατά» θεωρήματα της μαθηματικής ανάλυσης αποδείχθηκαν μετά την τελειοποίησή της.

Θα συνάγουμε τώρα ορισμένες ιδιότητες του τελεστή $\mathcal{D}$ που θα χρησιμοποιήσουμε προς όφελός μας σύντομα.

Ιδιότητα 2.1 $\mathcal{D}[cy]=c\mathcal{D}[y]$, για οποιαδήποτε σταθερά c.

Απόδειξη:
$$\begin{aligned}\mathcal{D}[cy]&=(cy)''+p(t)(cy)'+q(t)(cy)\\&=cy''+cp(t)y'+cq(t)y\\&=c[y''+p(t)y'+q(t)y]\\&=c\mathcal{D}[y]\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, έστω,

$$\mathcal{D}[y]=y''(t)+6y'(t)-2y(t)$$

Ο τελεστής $\mathcal{D}$ ορίζει για την συνάρτηση t^2, την συνάρτηση:

$$(t^2)''+6(t^2)'-2(t^2)=2+12t-2t^2$$

Επομένως, ο $\mathcal{D}$ πρέπει να ορίζει για την συνάρτηση $5t^2$ την $5(2+12t-2t^2)$.

Ιδιότητα 2.2 $\mathcal{D}[y_1+y_2]=\mathcal{D}[y_1]+\mathcal{D}[y_2]$

Η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη.

Για παράδειγμα αν, $\mathcal{D}[y]=y''(t)+2y'(t)-y(t)$, ο τελεστής αυτός ορίζει για την συνάρτηση συνt την,

$$\mathcal{D}[\text{συν}t]=(\text{συν}t)''+2(\text{συν}t)'-\text{συν}t=-2\text{συν}t-2\text{ημ}t$$

και για την ημt την,

$$\mathcal{D}[\text{ημ}t]=(\text{ημ}t)''+2(\text{ημ}t)'-\text{ημ}t=2\text{συν}t-2\text{ημ}t$$

Επομένως, ο $\mathcal{D}$ ορίζει για την συνάρτηση ημt+συνt την,

$$(-2\text{συν}t-2\text{ημ}t)+(2\text{συν}t-2\text{ημ}t)=-4\text{ημ}t$$

Ορισμός 2.1 Ένας τελεστής $\mathcal{D}$ που σχετίζει συναρτήσεις σε συναρτήσεις και ο οποίος ικανοποιεί τις Ιδιότητες 2.1 και 2.2 καλείται ***γραμμικός τελεστής***. Όλοι οι άλλοι τελεστές είναι μη γραμμικοί. Ένα παράδειγμα μη γραμμικού τελεστή είναι ο,

$$\mathcal{D}[y]=y''(t)-2t[y(t)]^4$$

Ο τελεστής αυτός ορίζει για την συνάρτηση $\frac{1}{t}$ την συνάρτηση,

$$\left(\frac{1}{t}\right)''-2t\left[\frac{1}{t}\right]^4=0$$

και για την συνάρτηση $\frac{c}{t}$ την,

$$\left(\frac{c}{t}\right)'' - 2t\left[\frac{c}{t}\right]^4 = \frac{2c(1-c^3)}{t^3}$$

Άρα, για $c \neq \{0, 1\}$ δεν ισχύει $\mathcal{D}[cy]=c\mathcal{D}[y]$.

Η χρησιμότητα των Ιδιοτήτων 2.1 και 2.2 έγκειται στο γεγονός ότι οι λύσεις $y(t)$ της διαφορικής εξίσωσης (2.4) είναι ακριβώς οι συναρτήσεις y για τις οποίες,:

$$\mathcal{D}[y]=y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=0$$

Με άλλα λόγια, οι λύσεις $y(t)$ της (2.4) είναι ακριβώς οι συναρτήσεις αυτές για τις οποίες ο τελεστής $\mathcal{D}$ υσχετίζει την μηδενική συνάρτηση, δηλαδή την συνάρτηση που έχει την τιμή μηδέν για οποιοδήποτε t. Επομένως, αν $y(t)$ είναι μία λύση της (2.4), τότε και η $cy(t)$ είναι λύση, αφού $\mathcal{D}[cy]-c\mathcal{D}[y]=0$.

Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι λύσεις της (2.4), τότε η $y_1(t)+y_2(t)$ είναι επίσης λύση της (2.4), αφού, $\mathcal{D}[y_1+y_2]=\mathcal{D}[y_1]+\mathcal{D}[y_2]=0+0=0$.

Συνδυάζοντας τις Ιδιότητες 2.1 και 2.2, βλέπουμε ότι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ λύσεων της (2.4) είναι επίσης λύσεις της.

Το σκεπτικό αυτό δείχνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνώση δύο λύσεων $y_1(t)$, $y_2(t)$ της (2.4) για να παράγουμε απείρως πολλές λύσεις. Η δήλωση αυτή έχει μερικές ενδιαφέρουσες προεκτάσεις. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την διαφορική εξίσωση,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \tag{2.6}$$

Δύο λύσεις της (2.6) είναι οι $y_1(t)$=συνt , $y_2(t)$=ημt. Άρα,

$$y(t)=c_1\text{συν}t+c_2\text{ημ}t \tag{2.7}$$

είναι επίσης λύση της (2.6) για κάθε c_1, c_2. Τώρα η (2.7) περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές. Είναι φυσικό λοιπόν να υποψιαζόμαστε ότι η παράσταση αυτή αντιπροσωπεύει την γενική λύση της (2.6) δηλαδή κάθε λύση $y(t)$ της (2.6) πρέπει να είναι της μορφής (2.7). Πραγματικά, έτσι συμβαίνει, όπως θα δείξουμε αμέσως.

Έστω ότι $y(t)$ είναι κάποια λύση της (2.6). Από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας η $y(t)$ υπάρχει για κάθε t. Έστω $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$ και θεωρούμε την συνάρτηση, $\varphi(t)=y_0\text{συν}t+y_0'\text{ημ}t$. Η συνάρτηση αυτή είναι λύση της (2.6) αφού είναι γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (2.6). Επιπλέον $\varphi(0)=y_0$, $\varphi'(0)=y_0'$. Άρα η $y(t)$ και η $\varphi(t)$ ικανοποιούν την ίδια γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Επομένως, σύμφωνα με την ιδιότητα της μοναδικότητας, η $y(t)$ πρέπει να είναι ταυτόσημη με την $\varphi(t)$, έτσι ώστε,

$$y(t)=y_0\text{συν}t+y_0'\text{ημ}t$$

Άρα η εξίσωση (2.7) είναι πράγματι η γενική λύση της (2.6).

Ας γυρίσουμε τώρα στην γενική γραμμική εξίσωση (2.4). Ας υποθέσουμε ότι με κάποιο τρόπο καταφέρνουμε να βρούμε δύο λύσεις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ της (2.4). Τότε κάθε συνάρτηση,

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t) \tag{2.8}$$

είναι πάλι λύση της (2.4). Αντιπροσωπεύει όμως η (2.8) την γενική λύση της (2.4); Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει την απάντηση.

Θεώρημα 2.2 Έστω $y_1(t)$ και $y_2(t)$ δύο λύσεις της (2.4) στο διάστημα $\alpha<t<\beta$ και, $y_1(t)\,y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)=0$ στο διάστημα αυτό. Τότε, η $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ είναι η γενική λύση της (2.4).

Απόδειξη: Έστω $y(t)$ κάποια λύση της (2.4). Πρέπει να βρούμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$. Για τον σκοπό αυτό, διαλέγουμε κάποια χρονική στιγμή t_0 στο διάστημα (α, β) και έστω $y(t_0)=y_0$, $y_0'=y'(t_0)$. Οι σταθερές c_1, c_2, αν υπάρχουν, πρέπει να ικανοποιούν τις δύο εξισώσεις,

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)&=y_0 \\ c_1\,y_1'(t_0)+c_2\,y_2'(t_0)&=y_0' \end{aligned}$$

που δίνουν,

$$c_1=\frac{y_0y_2'(t_0)-y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0)-y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

και

$$c_2 = \frac{y_0' y_1(t_0) - y_0 y_1'(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

αν $y_1(t_0)\, y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0) \neq 0$. Τώρα, έστω $\varphi(t)=c_1 y_1(t)+c_2 y_2(t)$ όπου c_1, c_2 οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω. Ξέρουμε ότι η $\varphi(t)$ ικανοποιεί την (2.4). Επιπλέον, εκ κατασκευής, $\varphi(t_0)=y_0$ και $\varphi'(t_0)=y_0'$. Άρα, οι $y(t)$ και $\varphi(t)$ ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση και αρχικές συνθήκες και γι' αυτό πρέπει να είναι ταυτόσημες στο (α, β), δηλαδή,

$$y(t)=c_1 y_1(t)+c_2 y_2(t), \quad \alpha<t<\beta$$

Το Θεώρημα 2.2 είναι εξαιρετικά χρήσιμο γιατί ανάγει το πρόβλημα της εύρεσης όλων των λύσεων της (2.4) στο απλούστερο πρόβλημα της εύρεσης μόνο δύο λύσεων $y_1(t)$, $y_2(t)$. Ο μοναδικός περιορισμός στις λύσεις αυτές είναι η παράσταση $y_1(t)\, y_2'(t) - y_1'(t) y_2(t)$ να είναι διάφορη του μηδενός στο $\alpha<t<\beta$. Οι λύσεις αυτές καλούνται ***θεμελιώδες σύνολο λύσεων*** αφού όλες οι άλλες είναι γραμμικοί συνδυασμοί τους.

Ορισμός 2.2 Η παράσταση $y_1(t)\, y_2'(t) - y_1'(t) y_2(t)$ καλείται ***Wronskian*** των y_1, y_2 και συμβολίζεται με $w(t)=w[y_1, y_2]$.

Το Θεώρημα 2.2 απαιτεί η $w(t)\neq 0$ σε όλα τα σημεία του διαστήματος (α, β). Στην πραγματικότητα η Wronskian οποιονδήποτε δύο λύσεων $y_1(t)$, $y_2(t)$ της (2.4) είναι ή ταυτόσημη με μηδέν ή ποτέ μηδέν όπως δηλώνουν και τα επόμενα θεωρήματα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.3 Έστω $p(t)$, $q(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $\alpha<t<\beta$, και έστω $y_1(t)$, $y_2(t)$ δύο λύσεις της (2.4). Τότε η $w[y_1, y_2]$ είναι ή ταυτόσημη με μηδέν ή ποτέ μηδέν στο διάστημα $\alpha<t<\beta$.

Θεώρημα 2.4 Έστω $y_1(t)$, $y_2(t)$ δύο λύσεις της (2.4) στο διάστημα $\alpha<t<\beta$, και έστω ότι $w[y_1, y_2]=0$ για κάποιο $t\in(\alpha, \beta)$. Τότε μία από τις λύσεις είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης.

2.2 Γραμμικές ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε τώρα την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές,

$$\mathcal{D}[y] = a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + cy = 0 \tag{2.9}$$

όπου α, b, c είναι σταθερές, με $\alpha \neq 0$. Το Θεώρημα 2.2 μας λέει ότι αρκεί να βρούμε δύο οποιεσδήποτε λύσεις y_1 και y_2 της (2.9)˙ όλες οι άλλες λύσεις προέρχονται από γραμμικούς συνδυασμούς των y_1, y_2. Δυστυχώς, το Θεώρημα 2.2 δεν μας λέει πώς να βρούμε δύο λύσεις της (2.9). Επομένως θα προσπαθήσουμε να τις μαντέψουμε. Για τον σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι κάποια συνάρτηση $y(t)$ είναι λύση της (2.9) αν το άθροισμα (σταθερά × δεύτερη παράγωγο)+(σταθερά × πρώτη παράγωγο) + (σταθερά × συνάρτηση)=0. Με άλλα λόγια οι τρεις όροι πρέπει να απαλείφονται μεταξύ τους. Αυτό μπορεί να συμβεί γενικά αν οι τρεις συναρτήσεις $y''(t)$, $y'(t)$, $y(t)$ είναι του «ίδιου τύπου». Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y(t)=t^5$ δεν μπορεί ποτέ να είναι λύση της (2.9), αφού οι τρεις όροι $20\alpha t^3$, $5bt^4$ και ct^5 δεν μπορούν να απαλειφθούν μεταξύ τους. Η συνάρτηση $y(t)=e^{rt}$, r σταθερά, όμως έχει την ιδιότητα οι $y''(t)$ και $y'(t)$ να είναι πολλαπλάσια της $y(t)$. Αυτό μας προτρέπει να δοκιμάσουμε την $y(t)=e^{rt}$ σαν λύση της (2.9). Υπολογίζοντας την,

$$\mathcal{D}[e^{rt}]=\alpha(e^{rt})''+b(e^{rt})'+ce^{rt}=(\alpha r^2+br+c)\,e^{rt}$$

βλέπουμε ότι η $y(t)=e^{rt}$ είναι λύση της (2.9), αν και μόνο αν,

$$\alpha r^2+br+c=0 \tag{2.10}$$

Η εξίσωση (2.10) καλείται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** της (2.9). Έχει δύο ρίζες r_1, r_2 που δίνονται από τον γνωστό τύπο,

$$r_1=\frac{-b+(b^2-4ac)^{1/2}}{2a}\,,\quad r_2=\frac{b-(b^2-4ac)^{1/2}}{2a}$$

Α. Πραγματικές διακεκριμένες ρίζες

Αν $b^2-4\alpha c>0$, τότε οι r_1, r_2 είναι πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή,

$$y_1(t)=e^{r_1 t}\,,\quad y_2(t)=e^{r_2 t}$$

είναι δύο λύσεις της (2.9) που είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού,

$$w[e^{r_1 t},e^{r_2 t}]=(r_2-r_1)\,e^{(r_1+r_2)t}=0$$

Παράδειγμα 2.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης $\dfrac{d^2y}{dt^2}+5\dfrac{dy}{dt}+4y=0$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι, $r^2+5r+4=(r+4)(r+1)=0$. Άρα οι $y_1(t)=e^{-4t}$, $y_2(t)=e^{-t}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων και η γενική λύση είναι της μορφής, $y(t)=c_1e^{-4t}+c_2e^{-t}$.

Παράδειγμα 2.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-2y=0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση r^2+4r-2 έχει τις ρίζες $r_1=-2+\sqrt{6}$, $r_2=-2-\sqrt{6}$. Άρα, $y(t)=c_1e^{(-2+\sqrt{6})t}+c_2e^{(-2-\sqrt{6})t}$. Από τις αρχικές συνθήκες,

$$y(0)=c_1+c_2=1,\ y'(0)=(-2+\sqrt{6})\,c_1+(-2-\sqrt{6})c_2=2$$

απ' όπου μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε,

$$c_1=\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{2},\quad c_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

και,

$$y(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{2}\right)e^{(-2+\sqrt{6})t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)e^{(-2-\sqrt{6})t}$$

Β. Μιγαδικές ρίζες

Αν $b^2-4ac<0$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τις μιγαδικές ρίζες,

$$r_1=\frac{-b+i(4ac-b^2)^{1/2}}{2a},\quad r_2=\frac{-b-i(4ac-b^2)^{1/2}}{2a}$$

Θα θέλαμε να πούμε ότι οι e^{r_1t} και e^{r_2t} είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2.9). Όμως οι λύσεις αυτές είναι μιγαδικές συναρτήσεις, ενώ εμείς ψάχνουμε για συναρτήσεις με πραγματικές τιμές. Ξεπερνάμε την δυσκολία αυτή ως εξής: ας υποθέσουμε ότι $y(t)=u(t)+iv(t)$ είναι μία μιγαδική λύση της (2.9), που σημαίνει,

$$\alpha[u''(t)+\mathrm{i}v''(t)]+b[u'(t)+\mathrm{i}v'(t)]+c[u(t)+\mathrm{i}v(t)]=0$$
$$\Rightarrow \alpha u''(t)+bu'(t)+cu(t)+\mathrm{i}[\alpha v''(t)+bv'(t)+cv(t)]=0$$

Αλλά αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ίσος με μηδέν, τότε και το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος είναι ίσα με μηδέν. Άρα,

$$\alpha u''(t)+bu'(t)+cu(t)=0,\ v''(t)+bv'(t)+cv(t)\ =0$$

που σημαίνει ότι,

$$y_1(t)=u(t),\ y_2(t)=v(t)$$

είναι λύσεις της (2.9). Απομένει να εκφράσουμε τις συναρτήσεις $e^{r_i t}$, για μιγαδικά r, στη μορφή $u(t)+\mathrm{i}v(t)$. Ως γνωστόν, $e^{\mathrm{i}\beta t}=\text{συν}\beta t+\mathrm{i}\,\text{ημ}\beta t$. Άρα, αν $r=\alpha+\mathrm{i}\beta$,

$$e^{rt}=e^{(a+\mathrm{i}\beta)t}=e^{at}(\text{συν}\beta t+\mathrm{i}\,\text{ημ}\beta t)=e^{\alpha t}\text{συν}\beta t+\mathrm{i}e^{\alpha t}\text{ημ}\beta t$$

Γυρίζοντας πίσω στην διαφορική εξίσωση (2.9), βρίσκουμε ότι η,

$$y(t)=e^{\left[-b+\mathrm{i}(4ac-b^2)^{1/2}\right]t/2a}=e^{-bt/2a}\left[\text{συν}(4ac-b^2)^{1/2}\ t/2a+\mathrm{i}\,\text{ημ}\ (4ac-b^2)^{1/2}\ t/2a\right]$$

είναι μία μιγαδική λύση της (2.9). Επομένως,

$$y_1(t)=e^{-bt/2\alpha}\ \text{συν}\beta t\ ,\quad y_2(t)=e^{-bt/2\alpha}\ \text{ημ}\beta t$$

όπου $\beta=\dfrac{(4ac-b^2)^{1/2}}{2a}$, είναι δύο πραγματικές λύσεις της (2.9), γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού,

$$w[y_1,\ y_2]=w[e^{-bt/2\alpha}\ \text{συν}\beta t,\ e^{-bt/2\alpha}\ \text{ημ}\beta t]=\beta e^{2\alpha t}\neq 0$$

Τελικά, η γενική λύση της (2.9) για $b^2-4\alpha c<0$, δίνεται από την:

$$y(t)=e^{-bt/2a}[c_1\text{συν}\beta t+c_2\text{ημ}\beta t],\quad \beta=\frac{(4ac-b^2)^{1/2}}{2a}$$

Παρατήρηση 1: Θα έπρεπε κανονικά να είχαμε δείξει ότι,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{(a+\mathrm{i}\beta)t} = (a+\mathrm{i}\beta)\, e^{(a+\mathrm{i}\beta)t}$$

Αυτό συμβαίνει αφού,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{(a+\mathrm{i}\beta)t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{at}[\text{συν}\beta t + \mathrm{i}\,\text{ημ}\beta t]$$

$$= e^{at}\left[(\alpha\,\text{συν}\beta t - \beta\,\text{ημ}\beta t) + \mathrm{i}(\alpha\,\text{συν}\beta t + \beta\,\text{ημ}\beta t)\right]$$

$$= (a+\mathrm{i}\beta)\, e^{(a+\mathrm{i}\beta)t}$$

Παρατήρηση 2: Με μία πρώτη ματιά, θα νόμιζε κανείς ότι η $e^{r_2 t}$ θα έδινε δύο επιπλέον λύσεις της (2.9). Αυτό όμως δεν είναι σωστό, αφού:

$$\begin{aligned} e^{r_2 t} &= e^{-(b/2a)t}e^{-i\beta t} \\ &= e^{-(b/2a)t}[\text{συν}(-\beta t) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(-\beta t)] = \\ &= e^{-bt/2a}[\text{συν}\beta t - \mathrm{i}\,\text{ημ}\beta t] \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{e^{r_2 t}\} &= e^{-bt/2a}\ \text{συν}\beta t = y_1(t) \\ \mathrm{Im}\{e^{r_2 t}\} &= -e^{-bt/2a}\ \text{ημ}\beta t = -y_2(t) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.3 Να βρεθούν δύο πραγματικές, γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $4\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 5y = 0$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση $4r^2+4r+5=0$ έχει τις μιγαδικές ρίζες $r_{1,2}=-(1/2)\pm\mathrm{i}$. Επομένως $e^{r_1 t} = e^{-t/2}\text{συν}t + \mathrm{i}e^{-t/2}\text{ημ}t$ είναι μία μιγαδική λύση της διαφορικής εξίσωσης και,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{e^{r_1 t}\} &= e^{-t/2}\ \text{συν}t \\ \mathrm{Im}\{e^{r_1 t}\} &= e^{-t/2}\ \text{ημ}t \end{aligned}$$

είναι δύο πραγματικές, γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Παράδειγμα 2.4 Να βρεθεί η λύση $y(t)$ του προβλήματος αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y = 0\,, \quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^{2+}2r+4$ έχει τις μιγαδικές ρίζες $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$.

Άρα, $\mathrm{Re}\{e^{r_1 t}\} = e^{-t}\text{συν}\sqrt{3}t$, $\mathrm{Im}\{e^{r_1 t}\} = e^{-t}\text{ημ}\sqrt{3}t$ είναι δύο πραγματικές λύσεις. Συνεπώς,

$$y(t)=e^{-t}[c_1\text{συν}\sqrt{3}t+c_2\text{ημ}\sqrt{3}t]$$

Οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

$$y(0)=c_1=1,\ y'(0)=-c_1+\sqrt{3}c_2=1 \Rightarrow c_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Τελικά,

$$y(t)=e^{-t}\left[\text{συν}\sqrt{3}t+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ημ}\sqrt{3}t\right]$$

Γ. Ίσες ρίζες (υποβιβασμός της τάξεως)

Αν $b^2=4\alpha c$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ίσες πραγματικές ρίζες $r_1=r_2=\mathrm{e}^{-b/2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή η μεθοδολογία μας δίνει μία μόνο λύση, $y_1(t)=e^{-bt/2\alpha}$.

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε μία δεύτερη λύση, ανεξάρτητη της y_1. Μια προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό είναι να προσπαθήσουμε μερικές υποθετικές λύσεις ακόμα. Μια δεύτερη και πιο έξυπνη προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε τη γνώση μας της $y_1(t)$. Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι ξέρουμε μία λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\mathcal{D}[y]=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+q(t)y=0 \tag{2.11}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λύση αυτή για να βρούμε μία δεύτερη ανεξάρτητη λύση; Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι ναι. Αν βρούμε μία λύση $y=y_1(t)$ της (2.11), μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα της εύρεσης όλων των λύσεων της (2.11) σε πρόβλημα λύσης μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως. Αυτό επιτυγχάνεται, ορίζοντας μία νέα εξαρτημένη μεταβλητή v μέσω της,

$$y(t)=y_1(t)v(t)$$

Τότε,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+y_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\ \ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=v\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+y_1\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[y]&=v\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+y_1\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\left[v\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+y_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)vy_1\\&=y_1\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\left[2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+p(t)y_1\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\left[\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+q(t)y_1\right]v\\&=y_1\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\left[2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+p(t)y_1\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

αφού η $y_1(t)$ είναι λύση της $\mathcal{D}[y]=0$. Άρα η $y(t)v(t)$ είναι λύση της (2.11) αν ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση,

$$y_1\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\left[2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+p(t)y_1\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2.12}$$

Όμως, παρατηρούμε ότι η (2.12) είναι πρώτης τάξεως ως προς $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Η λύση της είναι,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=c\exp\left[-\int\left[2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}+p(t)\right]\mathrm{d}t\right] \tag{2.13}$$

$$=\frac{c\exp\left(-\int p(t)\mathrm{d}t\right)}{y_1^2(t)} \tag{2.14}$$

Επειδή μας ενδιαφέρει μία οποιαδήποτε λύση, θέτουμε c=1. Ολοκληρώνοντας ως προς t, και θέτοντας την σταθερά της ολοκλήρωσης ίση με μηδέν, παίρνουμε,

$$v(t)=\int u(t)\mathrm{d}t \tag{2.15}$$

όπου,
$$u(t)=\frac{\exp\left(-\int p(t)\mathrm{d}t\right)}{y_1^2(t)} \tag{2.16}$$

Άρα η,

$$y_2(t)=v(t)y_1(t)=y_1(t)\int u(t)\mathrm{d}t \tag{2.17}$$

είναι μία δεύτερη λύση της (2.11). Η λύση αυτή είναι ανεξάρτητη της y_1, γιατί αν η $y_2(t)$ ήταν σταθερό πολλαπλάσιο της $y_1(t)$ τότε η $v(t)$ θα ήταν σταθερή συνάρτηση και η παράγωγός της θα ήταν ταυτόσημη με 0. Όμως από την (2.14),

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\exp\left(-\int p(t)\mathrm{d}t\right)}{y_1^2(t)}\neq 0$$

Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή σαν ***μέθοδος υποβιβασμού της τάξεως***, αφού η αντικατάσταση $y(t)=y_1(t)v(t)$ ανάγει το πρόβλημα της λύσης της εξίσωσης δευτέρας τάξεως σε πρόβλημα λύσης εξίσωσης πρώτης τάξεως.

Εφαρμογή στην περίπτωση ίσων ριζών. Στην περίπτωση των ίσων ριζών, βρήκαμε ότι η $y_1(t)=e^{-bt/2a}$ είναι μία λύση της εξίσωσης,

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=0 \tag{2.18}$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε μία δεύτερη λύση από τις εξισώσεις (2.17), προσέχοντας όμως ότι η μορφή της (2.11) έχει την μονάδα σαν συντελεστή του y'' και επομένως πρέπει να διαιρέσουμε την (2.18) με a για να πάρουμε την ισοδύναμη εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{c}{a}y=0$$

Τώρα αντικαθιστώντας την $p(t)=\dfrac{b}{a}$ στην (2.16) παίρνουμε,

$$u(t)=\frac{\exp\left(-\int\frac{b}{a}\,\mathrm{d}t\right)}{\left[e^{-bt/2a}\right]^2}=\frac{e^{-bt/a}}{e^{-bt/a}}=1$$

Άρα, $y_2(t)=y_1(t)\int \mathrm{d}t=ty_1(t)$ είναι μία δεύτερη λύση της (2.11). Οι συναρτήσεις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι προφανώς (;) γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $-\infty<t<\infty$. Επομένως η γενική λύση της (2.11) στην περίπτωση των ίσων ριζών είναι,

$$y(t)=c_1e^{-bt/2a}+c_2te^{-bt/2a}=[c_1+c_2t]e^{-bt/2a}$$

Παράδειγμα 2.5 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+4r+4=(r+2)^2$ έχει δύο ίσες ρίζες $r_1=r_2=-2$. Άρα, $y(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}$. Οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες,

$$\begin{aligned} y(0)&=c_1=1\\ y'(0)&=-2c_1+c_2=3\Rightarrow c_2=5 \end{aligned}$$

Άρα,

$$y(t)=(1+5t)e^{-2t}$$

Παράδειγμα 2.6 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής $(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-4$, στο διάστημα $-1<t<1$.

Λύση: Είναι εύκολο (;) να μαντέψουμε ότι $y_1(t)=t$ είναι μία λύση του προβλήματος. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως για να βρούμε μία δεύτερη λύση. Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $(1-t^2)\neq 0$, παίρνουμε την ισοδύναμη εξίσωση,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2t}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{2}{1-t^2}y=0 \tag{2.19}$$

Από την (2.16),

$$u(t)=\frac{\exp\left(-\int\frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t\right)}{y_1^2(t)}=\frac{e^{\ln(1-t^2)}}{t^2}=\frac{1-t^2}{t^2}$$

και,
$$y_2(t)=t\int\frac{1-t^2}{t^2}\mathrm{d}t=-t\left(\frac{1}{t}+t\right)=-(1+t^2)$$

είναι μία δεύτερη λύση του προβλήματος. Επομένως,

$$y(t)=c_1t-c_2(1+t^2)$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι λύσεις είναι συνεχείς στο σημείο $t=\pm1$, παρ' όλο που η (2.19) είναι ασυνεχής εκεί. Φαίνεται λοιπόν ότι είναι δυνατόν οι λύσεις κάποιας διαφορικής εξίσωσης να είναι συνεχείς σε σημεία που η διαφορική εξίσωση είναι ασυνεχής, παρ' όλο που αυτό είναι σπάνιο φαινόμενο.

Οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες,

$$y(0)=-c_2=3,\ y'(0)=c_1=-4$$

Επομένως,

$$y(t)=-4t+3(1+t^2)$$

2.3 Λύσεις γραμμικών ομογενών με δυναμοσειρές

Ερχόμαστε τώρα στην γενική ομογενή γραμμική εξίσωση δευτέρας τάξεως,

$$\mathcal{D}[y]=p(t)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+q(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+r(t)y=0 \tag{2.20}$$

Όπου η $p(t)$ δεν είναι μηδέν στο διάστημα $\alpha<t<\beta$. Αποδείχτηκε προηγουμένως ότι κάθε λύση $y(t)$ της (2.20) μπορεί να γραφτεί στην μορφή $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ όπου y_1, y_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2.20). Μέχρι τώρα, ασχοληθήκαμε με την περίπτωση όπου τα p, q και r είναι σταθερές. Η επόμενη απλούστερη περίπτωση είναι όταν τα p, q και r είναι πολυώνυμα του t. Στην περίπτωση αυτή η μορφή της διαφορικής εξίσωσης μας προτρέπει να δοκιμάσουμε μία πολυωνυμική λύση $y(t)$. Αν η $y(t)$ είναι πολυώνυμο του t, τότε οι τρεις συναρτήσεις $p(t)y''(t)$, $q(t)y'(t)$, $r(t)y$ είναι επίσης πολυώνυμα του t. Επομένως, μπορούμε κατ' αρχήν, να βρούμε μία πολυωνυμική συνάρτηση $y(t)$ εξισώνοντας τους συντελεστές του t στην παράσταση $\mathcal{D}[y]$ με μηδέν.

Παράδειγμα 2.7 Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y] = \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \tag{2.21}$$

Λύση: Θα προσπαθήσουμε να βρούμε δύο πολυωνυμικές λύσεις της (2.21). Βέβαια δεν είναι προφανές, ποιός πρέπει να είναι ο βαθμός των πολυωνυμικών αυτών λύσεων, ούτε αν ο βαθμός είναι πεπερασμένος. Έτσι θέτουμε,

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Υπολογίζοντας τις,

$$\frac{dy}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3at^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

και,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2a_2 + 6a_3 t + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

βλέπουμε ότι η $y(t)$ είναι λύση της (2.21), αν

$$\mathcal{D}[y] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n t^{n-2} - 2t\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \tag{2.22}$$

Γράφοντας τον πρώτο όρο σαν,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1) a_{n+2} t^n$$

(επειδή οι δύο πρώτοι όροι της σειράς μηδενίζονται για n=0, 1), μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.22),

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,(n+1)\,a_{n+2}t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Εξισώνοντας το άθροισμα των συντελεστών των ομοίων δυνάμεων του t με μηδέν, παίρνουμε,

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} - 2n\alpha_n - 2\alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2} \tag{2.23}$$

Η εξίσωση (2.23) είναι μία αναδρομική σχέση για τους συντελεστές α_0, α_1, α_2, ... Ο συντελεστής α_n ορίζει τον α_{n+2}. Επομένως, όλοι οι συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν άμα καθορίσουμε τους α_0, α_1. Οι α_0, α_1 εκλέγονται αυθαίρετα για την γενική λύση. Για να βρούμε δύο λύσεις της (2.21) αρκεί να επιλέξουμε δύο αυθαίρετα ζευγάρια συντελεστών α_0, α_1. Οι απλούστερες τιμές είναι,

$$\text{i)} \quad \alpha_0 = 1,\ \ \alpha_1 = 0 \qquad \text{ii)} \quad \alpha_0 = 0,\ \ \alpha_1 = 1$$

i) Στη περίπτωση αυτή όλοι οι περιττοί συντελεστές είναι μηδέν. Οι άρτιοι συντελεστές υπολογίζονται από τη (2.23),

$$a_2 = a_0 = 1,\quad a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{1}{2},\quad a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$$

κ.ο.κ. Προχωρώντας επαγωγικά,

$$a_{2n} = \frac{1}{2\cdot 3\cdots n} = \frac{1}{n!}$$

Άρα η,

$$y_1(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \ldots = e^{t^2}$$

είναι μία λύση της (2.21).

(ii) Στην περίπτωση αυτή, όλοι οι άρτιοι συντελεστές είναι μηδέν, ενώ οι περιττοί υπολογίζονται από τη (2.23) ως,

$$a_3 = \frac{2a_1}{3} = \frac{2}{3},\quad a_5 = \frac{2a_3}{5} = \frac{2}{5}\frac{2}{3},\quad a_7 = \frac{2a^5}{7} = \frac{2}{7}\frac{2}{5}\frac{2}{3}$$

Προχωρώντας επαγωγικά βρίσκουμε,

$$a_{2n+1} = \frac{2^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

Άρα η,

$$y_2(t) = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2^2 t^5}{3 \cdot 5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

είναι μία δεύτερη λύση της (2.21).

Παρατηρούμε ότι οι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι πολυώνυμα απείρου βαθμού, παρ'όλο που οι συντελεστές $p(t)=1$, $q(t)=-2t$ και $r(t)=-2$ είναι πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού. Τα πολυώνυμα αυτά καλούνται ***δυναμοσειρές***. Πριν προχωρήσουμε, θα θυμίσουμε μερικές σχετικές έννοιες τους.

1. Η άπειρη σειρά,

$$y(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \tag{2.24}$$

καλείται ***δυναμοσειρά με κέντρο το t_0***.

2. Όλες οι δυναμοσειρές έχουν ένα διάστημα ή ***ακτίνα σύγκλισης***. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μη αρνητικός αριθμός ρ τέτοιος ώστε η άπειρη σειρά (2.24) συγκλίνει για $|t-t_0|<\rho$ και αποκλίνει για $|t-t_0|>\rho$.

3. Η άπειρη σειρά (2.24) μπορεί να παραγωγισθεί και να ολοκληρωθεί κατά όρο, και η νέα σειρά έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

4. Η απλούστερη μέθοδος (αν έχει αποτέλεσμα) για να υπολογίσουμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς (2.24) είναι η δοκιμασία Cauchy. Ας υποθέσουμε ότι η απόλυτη τιμή του α_{n+1}/α_n τείνει προς κάποιο όριο λ όταν το n τείνει στο άπειρο. Τότε η δυναμοσειρά (2.24) συγκλίνει για $|t-t_0|<1/\lambda$ και αποκλίνει για $|t-t_0|>1/\lambda$.

5. Το γινόμενο δύο δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n$ είναι μία δυναμοσειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} e_n (t - t_0)^n$, όπου,

$$e_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

Το πηλίκο,

$$\frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots}$$

δύο δυναμοσειρών, είναι επίσης δυναμοσειρά αν $b_0 \neq 0$.

6. Πολλές από τις συναρτήσεις $f(t)$ που εμφανίζονται στις εφαρμογές μπορούν να αναπτυχθούν σαν δυναμοσειρές, δηλαδή μπορούμε να βρούμε συντελεστές α_0, α_1, α_2,..., τέτοιους ώστε,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \tag{2.25}$$

Οι συναρτήσεις αυτές καλούνται ***αναλυτικές*** στο $t=t_0$, και η σειρά (2.25) καλείται ***σειρά Taylor*** του $f(t)$ γύρω από το $t=t_0$. Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι αν η $f(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί έτσι, τότε αναγκαστικά,

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

Παράδειγμα 2.8 (α) Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της,

$$\mathcal{D}[y] = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3t}{1+t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{1+t^2} y = 0 \tag{2.26}$$

(β) Να βρεθεί η λύση $y(t)$ της (2.26) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

Λύση: Ο **λάθος** τρόπος για να λυθεί το πρόβλημα αυτό είναι να αναπτύξουμε τις συναρτήσεις $\frac{3t}{1+t^2}$, $\frac{1}{1+t^2}$ σε δυναμοσειρές γύρω από το $t=0$. Ο σωστός τρόπος είναι να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (2.26) με $(1+t^2)$ για να πάρουμε την ισοδύναμη εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y] = (1+t^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$$

Ο τρόπος αυτός είναι πολύ απλούστερος γιατί οι πράξεις είναι πολύ ευκολότερες όταν οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (2.26) είναι πολυώνυμα απ' ότι όταν είναι δυναμοσειρές. Θέτοντας,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

υπολογίζουμε την,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[y] &= (1+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n t^{n-2} + 3t\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)+3n+1] a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 a_n t^n\end{aligned}$$

Εξισώνοντας το άθροισμα των συντελεστών των ομοίων δυνάμεων του t με μηδέν έχουμε,

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} + (n+1)^2 \alpha_n = 0$$

Άρα,

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)^2 a_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{(n+1)a_n}{n+2} \tag{2.27}$$

Η εξίσωση (2.27) είναι μία αναδρομική σχέση για τους συντελεστές α_2, α_3, ... Για να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2.26) διαλέγουμε τις δύο απλούστερες περιπτώσεις:

(i) $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$.

Στη περίπτωση αυτή οι περιττοί συντελεστές είναι 0, ενώ οι άρτιοι υπολογίζονται από τη σχέση,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = -\frac{3a_2}{4} = +\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \quad a_6 = -\frac{5a_4}{6} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$$

κ.ο.κ. Προχωρώντας επαγωγικά,

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2^n} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}$$

Άρα,

$$y_1(t)=1-\frac{t^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\,n!}\,t^{2n} \qquad (2.28)$$

είναι μία λύση της (2.26). Ο λόγος του (n+1) όρου προς τον n είναι:

$$-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)t^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\times\frac{2^n\,n!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)t^{2n}}=\frac{-(2n+1)t^2}{2(n+1)}$$

και,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(2n+1)t^2}{2(n+1)}\right|=t^2$$

Άρα, από την δοκιμασία Cauchy, η άπειρη σειρά (2.28) συγκλίνει για $|t|<1$ και αποκλίνει για $|t|>1$.

(ii) $\alpha_0=0$, $\alpha_1=1$.

Στην περίπτωση αυτή όλοι οι άρτιοι συντελεστές είναι μηδέν και οι περιττοί συντελεστές υπολογίζονται από τις σχέσεις,

$$a_3=-\frac{2a_1}{3}=-\frac{2}{3},\quad a_5=-\frac{4a_3}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5},\quad a_7=-\frac{6a_5}{7}=-\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}$$

κ.ο.κ. Προχωρώντας επαγωγικά,

$$a_{2n+1}=(-1)^n\,\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}=\frac{(-1)^n\,2^n\,n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

Άρα η,

$$y_2(t)=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5+\ldots\;=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n\,n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\,t^{2n+1} \qquad (2.29)$$

είναι μία δεύτερη λύση της (2.26) και εύκολα επαληθεύεται ότι και η σειρά αυτή συγκλίνει για $|t|<1$. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, αφού οι σειρές Taylor γύρω από το t=0 των συναρτήσεων $3t/(1+t^2)$, $1/(1+t^2)$ συγκλίνουν για $|t|<1$.

(b) Η λύση $y_1(t)$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0)=1$, $y'(0)=0$ ενώ η $y_2(t)$ ικανοποεί τις $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Άρα,

$$y(t)=2y_1(t)+3y_2(t)$$

2.4 Η μη ομογενής εξίσωση

Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην μη ομογενή εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=g(t) \tag{2.30}$$

όπου οι συναρτήσεις $p(t)$, $q(t)$, είναι συνεχείς στο ανοιχτό διάστημα $\alpha<t<\beta$. Ένα σημαντικό στοιχείο για να αντιληφθούμε την φύση των λύσεων της (2.30) μας δίνει η γραμμική δ.ε πρώτης τάξεως,

$$\frac{dy}{dt}-2ty=-t \tag{2.31}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι,

$$y(t)=ce^{t^2}+\frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή είναι το άθροισμα δύο όρων: ο πρώτος όρος, ce^{t^2}, είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης,

$$\frac{dy}{dt}-2ty=0 \tag{2.32}$$

ενώ ο δεύτερος όρος, 1/2, είναι **μία** λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Με άλλα λόγια, κάθε λύση $y(t)$ της (2.31) είναι το άθροισμα μίας συγκεκριμένης λύσης, $\psi(t)=1/2$, και της λύσης ce^{t^2} της ομογενούς εξίσωσης. Παρόμοια κατάσταση επικρατεί και στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως, όπως δηλώνει και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5 Έστω $y_1(t)$, $y_2(t)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+q(t)=0 \tag{2.33}$$

και έστω $\psi(t)$ κάποια συγκεκριμένη λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (2.30). Τότε, κάθε λύση της (2.30) πρέπει να είναι της μορφής,

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\psi(t)$$

για κάποιες σταθερές c_1, c_2.

Απόδειξη: Προφανώς,

$$\mathcal{D}[y]=c_1\mathcal{D}[y_1]+c_2\mathcal{D}[y_2]+\mathcal{D}[\psi]=g(t)$$

Παρατηρούμε επίσης, ότι αν $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ είναι δύο λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης (2.30), τότε,

$$\mathcal{D}[\psi_1-\psi_2]=\mathcal{L}[\psi_1]-\mathcal{L}[\psi_2]=g(t)-g(t)=0$$

Άρα, η $\psi_1(t)-\psi_2(t)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης (2.33). Έστω, τώρα ότι $y(t)$ είναι κάποια λύση της (2.30). Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $\varphi(t)=y(t)-\psi(t)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης (2.30). Αλλά κάθε λύση της (2.20) είναι της μορφής $\varphi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$. Επομένως,

$$y(t)=\varphi(t)+\psi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\psi(t)$$

Παρατήρηση: Το Θεώρημα 2.5 είναι εξαιρετικά χρήσιμο γιατί ανάγει το πρόβλημα της εύρεσης όλων των λύσεων της (2.30) στο απλούστερο πρόβλημα της εύρεσης της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης (2.33) και μίας λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης (2.30).

Παράδειγμα 2.9 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+y=t$.

Λύση: Οι συναρτήσεις $y_1(t)$=συνt, $y_2(t)$=ημt είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Επιπλέον, $\psi(t)=t$ είναι μία συγκεκριμένη λύση. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5 κάθε λύση πρέπει να είναι της μορφής,

$$y(t)=c_1\text{συν}t+c_2\text{ημ}t+t$$

Παράδειγμα 2.10 Τρεις λύσεις κάποιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως είναι οι $\psi_1(t)=t$, $\psi_2(t)=t+e^t$, $\psi_3(t)=1+t+e^t$. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης αυτής.

Λύση: Οι συναρτήσεις $\psi_2(t)-\psi_1(t)=e^t$ και $\psi_3(t)-\psi_2(t)=1$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Επιπλέον οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως κάθε λύση είναι της μορφής,

$$y(t)=c_1e^t+c_2+t$$

2.5 Η μέθοδος της «συνετής εικασίας»

Η τεχνική της προηγούμενης ενότητας στηρίζεται στην εύρεση μίας, οποιασδήποτε λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης. Πώς όμως θα βρεθεί αυτή; Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε μία συστηματική μέθοδο για την εύρεση μίας συγκεκριμένης λύσης $\psi(t)$ της μη ομογενούς εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=g(t) \tag{2.34}$$

στις περιπτώσεις που η $g(t)$ έχει κάποια ειδική μορφή.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την διαφορική εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y]=a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=a_0+a_1t+...+a_nt^n \tag{2.35}$$

Ψάχνουμε για μία συνάρτηση $\psi(t)$ τέτοια ώστε οι τρεις συναρτήσεις $\alpha\psi''$, $\beta\psi'$ και $c\psi$ να έχουν άθροισμα ένα δεδομένο πολυώνυμο βαθμού n. Η προφανής εκλογή για την $\psi(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Θέτουμε λοιπόν,

$$\psi(t)=A_0+A_1t+\ \dots\ +A_nt^n \tag{2.36}$$

και υπολογίζουμε την παράσταση,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\psi]&=\alpha\psi''(t)+b\psi'(t)+c\psi\\ &=\alpha[2A_2+\dots+n(n-1)A_nt^{n-2}]+b[A_1+\dots+nA_nt^{n-1}]+c[A_0+A_1+\dots+A_nt^n]\\ &=cA_nt^n+(cA^{n-1}+nbA_n)t^{n-1}+\dots+(cA_0+bA_1+2\alpha A_2)\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοίων δυνάμεων του t, παίρνουμε:

$$cA_n \qquad =\alpha_n$$

$$cA_{n-1}+nbA_n=\alpha_{n-1}$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$cA_0+bA_1+2\alpha A_2=\alpha_0 \tag{2.37}$$

Η πρώτη εξίσωση καθορίζει τον συντελεστή,

$$A_n=a_n/c \quad \text{για} \quad c\neq 0,$$

και οι υπόλοιπες εξισώσεις μας δίνουν διαδοχικά τους συντελεστές A_{n-1}, ..., A_0.

Άρα η διαφορική εξίσωση (2.20) έχει μία συγκεκριμένη λύση της μορφής (2.36). Έχουμε προβλήματα όμως αν c=0 γιατί τότε η πρώτη εξίσωση της (2.37) δεν έχει λύση. Η δυσκολία αυτή είναι όμως αναμενόμενη, γιατί αν c=0, τότε η $\mathcal{D}[\psi]=a\psi''+b\psi'$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$, ενώ το δεξιό μέλος της (2.35) είναι βαθμού n. Για να εξασφαλίσουμε ότι η $a\psi''+b\psi'$ είναι βαθμού n, παίρνουμε την ψ βαθμού n+1, δηλαδή,

$$\psi(t)=t[A_0+A_1t+\dots+A_nt^n] \tag{2.38}$$

Έχουμε παραλείψει τον σταθερό όρο στην (2.38), αφού y=σταθερά είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης $a\psi''+b\psi'=0$ κι έτσι μπορεί να αφειρεθεί από την $\psi(t)$. Οι συντελεστές A_1, ..., A_n δίνονται μονοσήμαντα από την σχέση,

$$a\psi''+b\psi'=\alpha_0+\alpha_1t+\dots+\alpha_nt^n$$

αν $b\neq0$. Στην περίπτωση τώρα που $b=c=0$, η διαφορική εξίσωση (2.35) λύνεται εύκολα ολοκληρώνοντας δύο φορές και παίρνοντας,

$$\psi(t)=\frac{1}{a}\left[\frac{a_0t^2}{1\cdot 2}+\frac{a_1t^3}{2\cdot 3}+\dots+\frac{a_nt^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]$$

Σύνοψη: Η διαφορική εξίσωση (2.35) έχει μία λύση $\psi(t)$ της μορφής,

$$\psi(t)=\begin{cases} A_0+A_1t+\dots+A_nt^n & , \quad c\neq 0 \\ t(A_0+A_1t+\dots+A_nt^n) & , \quad c=0, b\neq 0 \\ t^2(A_0+A_1t+\dots+A_nt^n) & , \quad c=0, b=0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.11 Να βρεθεί μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$\mathcal{D}[y]=\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t^2$.

Λύση: Θέτουμε $\psi(t)=A_0+A_1t+A_2t^2$, και υπολογίζουμε την,

$$\mathcal{D}[\psi]=\psi''(t)+\psi'(t)+\psi(t)=2A_2+(A_1+2A_2t)+A_0+A_1t+A_2t^2=$$
$$(A_0+A_1+2A_2)+(A_1+2A_2)t+A_2t^2$$

Εξισώνοντας συντελεστές ομοίων δυνάμεων, έχουμε,

$$A_2=1,\quad A_1+2A_2=0 \text{ και } A_0+A_1+2A_2=0\Rightarrow A_2=0$$

Άρα, $\psi(t)=-2t+t^2$ είναι μία συγκεκριμένη λύση.

Ας θεωρήσουμε τώρα την διαφορική εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y]=a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=(a_0+a_1t+...+a_nt^n)e^{\lambda t} \tag{2.39}$$

Θα θέλαμε να απομακρύνουμε τον παράγοντα $e^{\lambda t}$ από το δεξιό μέλος της (2.39) έτσι ώστε να την ανάγουμε στην εξίσωση (2.35). Αυτό το πετυχαίνουμε θέτοντας $y(t)=e^{\lambda t}v(t)$. Τότε,

$$y'=e^{\lambda t}(v'+\lambda v),\ y''=e^{\lambda t}(v''+2\lambda v'+\lambda^2 v)$$

και,

$$\mathcal{D}[y]=e^{\lambda t}[\alpha v''+(2\alpha\lambda+b)v'+(a\lambda^2+b\lambda+c)v] \tag{2.40}$$

Επομένως η $y(t)=e^{\lambda t}v(t)$ είναι μία λύση της (2.39) αν και μόνον αν,

$$a\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+(2a\lambda+b)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+(a\lambda^2+b\lambda+c)v=a_0+a_1t+...+a_nt^n \tag{2.41}$$

Για να βρούμε μία συγκεκριμένη λύση της (2.41) πρέπει να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) $\alpha\lambda^2+b\lambda+c\neq 0$

(ii) $\alpha\lambda^2+b\lambda+c=0,\ 2\alpha\lambda+b\neq 0$

(iii) $\alpha\lambda^2+b\lambda+c=0,\ 2\alpha\lambda+b=0$

Η πρώτη περίπτωση σημαίνει ότι το λ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\alpha r^2+br+c=0$. Μ' άλλα λόγια η $e^{\lambda t}$ δεν είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης $\mathcal{D}[y]=0$. Η δεύτερη περίπτωση σημαίνει ότι το λ είναι μονή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Αυτό συνεπάγεται ότι η $e^{\lambda t}$ είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης αλλά όχι η $te^{\lambda t}$. Τέλος, η τρίτη περίπτωση σημαίνει ότο το λ είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης κι έτσι οι $e^{\lambda t}$ και $te^{\lambda t}$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Επομένως η διαφορική εξίσωση (2.41) έχει μία συγκεκριμένη λύση της μορφής,

(i) $\psi(t)=(A_0+\ldots+A_n t^n)e^{\lambda t}$

(ii) $\psi(t)=t(A_0+\ldots+A_n t^n)e^{\lambda t}$

(iii) $\psi(t)=t^2(A_0+\ldots+A_n t^n)e^{\lambda t}$

Παράδειγμα 2.12 Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης ,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=(1+t+\ldots+t^{27})e^{2t}.$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2-4r+4=0$ έχει ίσες ρίζες $r_1=r_2=2$. Άρα, $y_1(t)=e^{2t}$, $y_2(t)=te^{2t}$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Για να βρούμε μία συγκεκριμένη λύση, θέτουμε $y=e^{2t}v$. Τότε αναγκαστικά,

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}=1+t+\ldots+t^{27}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη δύο φορές, και θέτοντας τις σταθερές της ολοκλήρωσης ίσες με μηδέν, παίρνουμε,

$$v(t)=\frac{t^2}{1\cdot 2}+\frac{t^3}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{t^{29}}{28\cdot 29}$$

Επομένως η γενική λύση είναι,

$$y(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+e^{2t}\left[\frac{t^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{t^{29}}{28\cdot 29}\right]$$

Παράδειγμα 2.13 Να βρεθεί μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[\psi]=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=(1+t)e^{3t}$$

Λύση: Στην περίπτωση αυτή η e^{3t} δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής. Επομένως θέτουμε $\psi(t)=(A_0+A_1t)e^{3t}$ και βρίσκουμε,

$$\begin{gathered}\mathcal{D}[\psi]=\psi''-3\psi'+2\psi\\ =e^{3t}\,[(9A_0+6A_1+9A_1t)-3(3A_0+A_1+3A_1t)+2(A_0+A_1t)]\\ =e^{3t}[(2A_0+3A_1)+2A_1t]\end{gathered}$$

Απαλείφοντας τον κοινό συντελεστή e^{3t} από τα $\mathcal{L}[\psi]$, $(1+t)e^{3t}$, παίρνουμε,

$$2A_1t+2A_0+3A_1=1+t$$

Άρα,

$$2A_1=1,\ 2A_0+3A_1=1 \Rightarrow A_1=\frac{1}{2},\quad A_0=-\frac{1}{4}$$

και, $\psi(t)=\left(-\frac{1}{4}+\frac{t}{2}\right)e^{3t}$.

Τέλος θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y]=a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=(a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n)\times\begin{cases}\text{συν}wt\\ \text{ημ}wt\end{cases} \tag{2.42}$$

Μπορούμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα της εύρεσης μίας συγκεκριμένης λύσης $\psi(t)$ της (2.42) στο απλούστερο πρόβλημα της εύρεσης μίας συγκεκριμένης λύσης της (2.39) με την βοήθεια του παρακάτω απλού αλλά εξαιρετικά χρήσιμου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.6 Έστω $y(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$ μία μιγαδική λύση της εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+c=g(t)=g_1(t)+\mathrm{i}g_2(t) \tag{2.43}$$

όπου a, b, c πραγματικοί. Τότε,

$$\mathcal{D}[u]=g_1(t),\ \mathcal{D}[v]=g_2(t)$$

Η απόδειξη είναι προφανής (;).

Τώρα έστω $\varphi(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$ μία συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης,

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=(a_0+\ldots+a_nt^n)e^{\mathrm{i}wt} \tag{2.44}$$

Το πραγματικό μέρος του δεξιού μέλους της (2.44) είναι $(\alpha_0+\ \ldots\ +\alpha_nt^n)$συν$wt$, ενώ το φανταστικό μέρος $(\alpha_0+\ldots\ +\alpha_nt^n)$ημ$wt$. Επομένως η,

$$u(t)=\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}$$

είναι μία λύση της $\alpha y''+by'+cy=(\alpha_0+\ \ldots\ +\alpha_nt^n)$συν$wt$ ενώ η,

$$v(t)=\mathrm{Im}\{\varphi(t)\}$$

είναι μία λύση της $\alpha y''+by'+cy=(\alpha_0+\ \ldots\ +\alpha_nt^n)$ημ$wt$.

Παράδειγμα 2.14 Να βρεθεί μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4y=\text{ημ}2t \tag{2.45}$$

Λύση: Θα βρούμε την $\psi(t)$ σαν το φανταστικό τμήμα μίας μιγαδικής λύσης $\varphi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4y=e^{2\mathrm{i}t} \tag{2.46}$$

Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+4=0$ έχει μιγαδικές ρίζες $r=\pm2\mathrm{i}$. Επομένως η (2.46) έχει μία συγκεκριμένη λύση της μορφής $\varphi(t)=A_0te^{2\mathrm{i}t}$. Υπολογίζοντας τις $\varphi'(t)=A_0(1+2\mathrm{i}t)e^{2\mathrm{i}t}$, $\varphi''(t)=A_0(4\mathrm{i}-4t)e^{2\mathrm{i}t}$ βλέπουμε ότι,

$$\mathcal{D}[\varphi]=\varphi''(t)+4\varphi(t)=4\mathrm{i}A_0e^{2\mathrm{i}t}$$

Άρα $A_0=\dfrac{1}{4\mathrm{i}}=-\dfrac{\mathrm{i}}{4}$, και,

$$\phi(t)=-\frac{\mathrm{i}t}{4}e^{2\mathrm{i}t}=-\frac{\mathrm{i}t}{4}(\text{συν}2t+\mathrm{i}\text{ημ}t2t)$$

Επομένως,

$$\psi(t)=\mathrm{Im}\{\varphi(t)\}=-(t/4)\text{συν}2t$$

είναι μία συγκεκριμένη λύση της (2.45).

Παράδειγμα 2.15 Να βρεθεί μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4y=\text{συν}2t \tag{2.47}$$

Λύση: Από το Παράδειγμα 2.14 η,

$$\phi(t)=\frac{t}{4}\text{ημ}2t-\mathrm{i}\frac{t}{4}\text{συν}2t$$

είναι μία μιγαδική λύση της (2.46). Επομένως η,

$$\psi(t)=\mathrm{Re}\{\phi(t)\}=\frac{t}{4}\text{ημ}2t$$

είναι μία συγκεκριμένη λύση της (2.47).

Παράδειγμα 2.16 Να βρεθεί μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=te^t\text{συν}2t \tag{2.48}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι η $te^t\text{συν}t$ είναι το πραγματικό τμήμα της $te^{(1+i)t}$. Επομένως μπορούμε να βρούμε την $\psi(t)$ σαν το πραγματικό μέρος μίας μιγαδικής λύσης $\varphi(t)$ της εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=te^{(1+\mathrm{i})t} \tag{2.49}$$

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι το 1+i δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2+2r+1=0$. Επομένως η (2.49) έχει μία χαρακτηριστική λύση $\varphi(t)$ της μορφής $\varphi(t)=(A_0+A_1t)e^{(1+\mathrm{i})t}$. Υπολογίζοντας την $\mathcal{D}[\varphi]$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα,

$$(1+\mathrm{i})^2+2(1+\mathrm{i})+1=(2+\mathrm{i})^2$$

βλέπουμε ότι,

$$[(2+\mathrm{i})^2A_1t+(2+\mathrm{i})^2A_0+2(2+\mathrm{i})A_1]=t$$

Εξισώνοντας συντελεστές ομοίων δυνάμεων του t, βρίσκουμε,

$$(2+\mathrm{i})^2A_1=1,\ (2+\mathrm{i})A_0+2A_1=0$$

απ' όπου $A_1=\dfrac{1}{(2+\mathrm{i})^2}$, $A_0=\dfrac{-2}{(2+\mathrm{i})^3}$.

Άρα,

$$\phi(t)=\left[\frac{-2}{(2+\mathrm{i})^3}+\frac{t}{(2+\mathrm{i})^2}\right]e^{(1+\mathrm{i})t}$$

Μετά από λίγη (!) άλγεβρα,

$$\phi(t)=\frac{e^t}{125}\{[(15t-4)\text{συν}t+(20t-22)\text{ημ}t]+\mathrm{i}[(22-20t)\text{συν}t+(15-4)\text{ημ}t]\}$$

Επομένως,

$$\psi(t)=\mathrm{Re}\{\phi(t)\}=\frac{e^t}{125}[(15t-4)\text{συν}t+(20t-22)\text{ημ}t]$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος της συνετής εικασίας μπορεί επίσης να εφαρμοσθεί στην διαφορική εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y]=a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)e^{a_jt} \tag{2.50}$$

όπου τα $p_j(t)$, j=1, …, n είναι πολυώνυμα του t. Έστω $\psi_j(t)$ μία συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης ,

$$\mathcal{D}[y]=p_j(t)\,e^{a_jt},\ j=1,\ \ldots,\ n$$

τότε,

$$\psi(t)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j(t)$$

είναι μία λύση της (2.50), αφού,

$$\mathcal{D}[y]=\mathcal{D}\left[\sum_{j=1}^{n}\psi_j\right]=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{D}[\psi_j]=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)e^{a_j t}$$

Έτσι για να βρούμε μία συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''+y'+y=e^t+t\eta\mu t$, βρίσκουμε συγκεκριμένες λύσεις $\psi_1(t)$ και $\psi_2(t)$ των διαφορικών εξισώσεων $y''+y'+y=e^t$, $y''+y'+y=t\eta\mu t$ και τις προσθέτουμε.

2.6 Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων

Θα περιγράψουμε τώρα μία πολύ γενική μέθοδο για την εύρεση μίας συγκεκριμένης λύσης $\psi(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης,

$$\mathcal{D}[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=g(t) \tag{2.51}$$

όταν ξέρουμε την γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς,

$$\mathcal{D}[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0 \tag{2.52}$$

Έστω $y_1(t)$, $y_2(t)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2.52). Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της (2.51) στην μορφή,

$$\psi(t)=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t) \tag{2.53}$$

Εκ πρώτης όψεως αυτό ίσως φαίνεται λίγο ανόητο, αφού αντικαθιστούμε το πρόβλημα της εύρεσης μίας άγνωστης συνάρτησης $\psi(t)$ με το φαινομενικά δυσκολότερο πρόβλημα της εύρεσης δύο αγνώστων συναρτήσεων $u_1(t)$, $u_2(t)$. Θα φανεί όμως στη συνέχεια ότι αν προχωρήσουμε σωστά θα μπορέσουμε να βρούμε τις $u_1(t)$, $u_2(t)$ στις λύσεις δύο καλών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Αυτό το επιτυγχάνουμε ως εξής:

Κατ’ αρχή παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (2.51) είναι μία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι $u_1(t)$, $u_2(t)$. Εχουμε λοιπόν κάποια «ελευθερία» στην εκλογή τους. Ο στόχος μας είναι να θέσουμε μία ακόμη συνθήκη τέτοια που να κάνει την παράσταση $\mathcal{D}[u_1y_1+u_2y_2]$ όσο πιο απλή γίνεται. Υπολογίζοντας την,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_1y_1+u_2y_2]=[u_1y_1'+u_2y_2']+[u_1'y_1+u_2'y_2]$$

βλέπουμε ότι η $\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2}$ και επομένως και η $\mathcal{D}[\psi]$, δεν θα περιέχει παραγώγους δευτέρας τάξεως των u_1, u_2 αν,

$$y_1(t)\,u_1'(t)+y_2(t)\,u_2'(t)=0 \tag{2.54}$$

Θέτουμε λοιπόν την συνθήκη (2.54) ως την δεύτερη συνθήκη για τις u_1, u_2, και παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\psi]&=[u_1\,y_1'+u_2\,y_2']'+p(t)[u_1\,y_1'+u_2\,y_2']+q(t)[u_1y_1+u_2y_2]\\&=u_1'\,y_1'+u_2'\,y_2'+u_1[\,y_1''+p(t)\,y_1'+q(t)y_1]+u_2[\,y_2''+p(t)\,y_2'+q(t)y_2]=\\&=u_1'\,y_1'+u_2'\,y_2'\end{aligned}$$

αφού $\mathcal{D}[y_1]=\mathcal{D}[y_2]=0$. Επομένως, η (2.69) είναι λύση της (2.51) αν οι $u_1(t)$, $u_2(t)$ ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned}y_1(t)\,u_1'(t)+y_2(t)\,u_2'(t)&=0\\u_1'(t)\,y_1'(t)+u_2'(t)\,y_2'(t)&=g(t)\end{aligned}$$

Σε μορφή πινάκων,

$$\begin{bmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1'(t)\\ u_2'(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ g(t)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{aligned}u_1'(t)&=-\frac{g(t)y_2(t)}{w(y_1,y_2)}\\u_2'(t)&=\frac{g(t)y_1(t)}{w(y_1,\,y_2)}\end{aligned} \tag{2.55}$$

Τέλος οι $u_1(t)$, $u_2(t)$ βρίσκονται ολοκληρώνοντας τα δεξιά μέλη της (2.55).

Παρατήρηση: Η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.4) είναι η $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$. Θεωρώντας ότι τα c_1, c_2 μπορούν να μεταβάλλονται με τον χρόνο, παίρνουμε μία λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Γι' αυτό η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν μέθοδος ***μεταβολής των παραμέτρων***.

Παράδειγμα 2.17 Να βρεθεί μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=\varepsilon\varphi t \tag{2.56}$$

στο διάστημα $-\pi/2<t<\pi/2$, και να βρεθεί η λύση $y(t)$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Λύση: Οι συναρτήσεις $y_1(t)$=συνt , $y_2(t)$=ημt είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $y''+y=0$ και $w[y_1, y_2]$=συνtσυνt−(−ημt)ημt=1. Έτσι από την (2.55),

$$u_1'(t)=-\varepsilon\varphi t\ \eta\mu t,\ \ u_2'(t)=\varepsilon\varphi t\ \sigma\upsilon\nu t \tag{2.57}$$

Ολοκληρώνοντας τη πρώτη εξίσωση παίρνουμε,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \varepsilon\varphi t\cdot\eta\mu t\ \ \mathrm{d}t = -\int\frac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu t}\mathrm{d}t \\ &= \int\frac{\sigma\upsilon\nu^2 t-1}{\sigma\upsilon\nu t}\mathrm{d}t = \eta\mu t-\ln\left|\tau\varepsilon\mu t+\varepsilon\varphi t\right| \\ &= \eta\mu t-\ln(\tau\varepsilon\mu t+\varepsilon\varphi t)\,,\quad -\pi/2<t<\pi/2 \end{aligned}$$

ενώ ολοκληρώνοντας τη δεύτερη,

$$u_2(t)=\int\varepsilon\varphi t\cdot\sigma\upsilon\nu t\ \ \mathrm{d}t=\int\eta\mu t\mathrm{d}t=-\sigma\upsilon\nu t$$

Επομένως η,

$$\psi(t)=\sigma\upsilon\nu t[\eta\mu t-\ln(\tau\varepsilon\mu t+\varepsilon\varphi t)]+\eta\mu t(-\sigma\upsilon\nu t)=-\sigma\upsilon\nu t\cdot\ln[\tau\varepsilon\mu t+\varepsilon\varphi t]$$

είναι μία συγκεκριμένη λύση της (2.56) στο διάστημα $-\pi/2<t<\pi/2$.

Η γενική λύση της (2.56) δίνεται από τη σχέση,

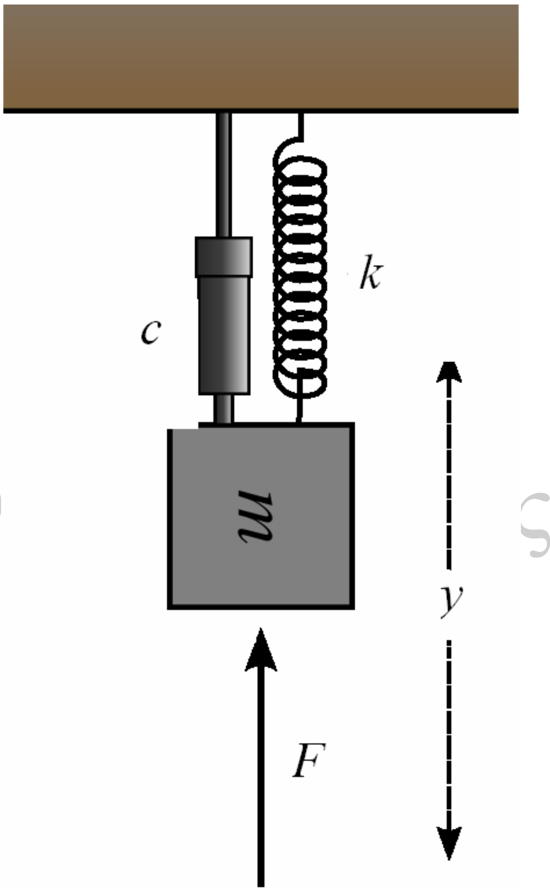
$$\psi(t)=c_1\sigma\upsilon\nu t+c_2\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t\cdot\ln(\tau\varepsilon\mu t+\varepsilon\varphi t)$$

Από τις αρχικές συνθήκες,

$$y(0) = c_1 = 1$$
$$y'(0) = c_2 - 1 = 1 \Rightarrow c_2 = 2$$

2.7 Εφαρμογές: μηχανικές ταλαντώσεις

Στην εφαρμογή αυτή θα θεωρήσουμε την κίνηση μιας μικρής μάζας m που είναι συνδεδεμένη στο άκρο ελαστικού ελατηρίου μήκους l το οποίο κρέμεται από ένα στερεό στήριγμα (Σχ. 2.1).



Σχήμα 2.1

Το ελαστικό ελατήριο έχει την ιδιότητα να ασκεί μία δύναμη επαναφοράς $k\Delta l$ όταν τεντώνεται ή συμπιέζεται κατά ένα μικρό μήκος Δl. Η σταθερά k καλείται σταθερά ελατηρίου, και είναι ένα μέτρο της σκληρότητας του ελατηρίου.

Επιπρόσθετα, η κίνηση του ελατηρίου και της μάζας μπορεί να δυσχεραίνεται από ένα αποσβεστήρα κραδασμών. Για παράδειγμα τα αμορτισέρ των αυτοκινήτων είναι ένα τέτοιο σύστημα.

Για να υπολογίσουμε την κίνηση της μάζας m, είναι βολικότερο να μετράμε την απόσταση από το σημείο ισορροπίας της μάζας. Όταν η μάζα ισορροπεί, το βάρος mg είναι ισοδύναμο με την δύναμη επαναφοράς. Επίσης θεωρούμε σαν θετική την φορά προς τα κάτω. Για να βρούμε την θέση $y(t)$ της μάζας στον χρόνο t, πρέπει να υπολογίσουμε την συνολική δύναμη που ασκείται στην μάζα. Η δύναμη αυτή είναι το άθροισμα τεσσάρων ξεχωριστών δυνάμεων W, R, D, F.

(i) Η δύναμη $W=mg$ είναι το βάρος της μάζας και είναι θετική.

(ii) Η δύναμη R είναι η δύναμη επαναφοράς και είναι ανάλογη προς την επιμήκυνση ή σύμπτηξη $\Delta l+y$ του ελατηρίου. Αν, $\Delta l+y > 0$ τότε $R < 0$ και αντίστροφα, άρα, $R=k(\Delta l+y)$.

(iii) Η δύναμη D είναι η δύναμη αντίστασης που ασκεί ο αποσβεστήρας. Η δύναμη αυτή είναι πάντα αντίθετη προς την διεύθυνση της κίνησης και συνήθως ανάλογη προς την ταχύτητα. Δηλαδή, $D=-c\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

(iv) Η δύναμη F είναι εξωτερική δύναμη και είναι συνάρτηση του χρόνου. Μπορεί να είναι θετικής ή αρνητικής φοράς.

Από τον δεύτερο νόμο της κίνησης του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= W+R+D+F \\ &= mg-k(\Delta l+y)-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t) \\ &= -ky-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t) \end{aligned}$$

αφού $mg=k\Delta l$. Επομένως, η θέση $y(t)$ της μάζας ικανοποιεί την γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως,

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F(t) \tag{2.58}$$

όπου m, c, k είναι μη αρνητικές σταθερές. Θα εξετάσουμε τέσσερις περιπτώσεις:

(α) Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Αυτή είναι η απλούστερη περίπτωση ελεύθερης κίνησης χωρίς απόσβεση. Στην περίπτωση αυτή η (2.58) γίνεται,

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+ky=0$$

ή,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \tag{2.59}$$

όπου $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Η γενική λύση της (2.59) είναι,

$$y(t) = c_1 \sigma\upsilon\nu\omega_0 t + c_2 \eta\mu\omega_0 t \tag{2.60}$$

Για να αναλύσουμε την λύση (2.60), είναι καλύτερα να την ξαναγράψουμε σαν συνάρτηση ενός συνημιτόνου. Αυτό μπορεί να γίνει με την βοήθεια του τύπου,

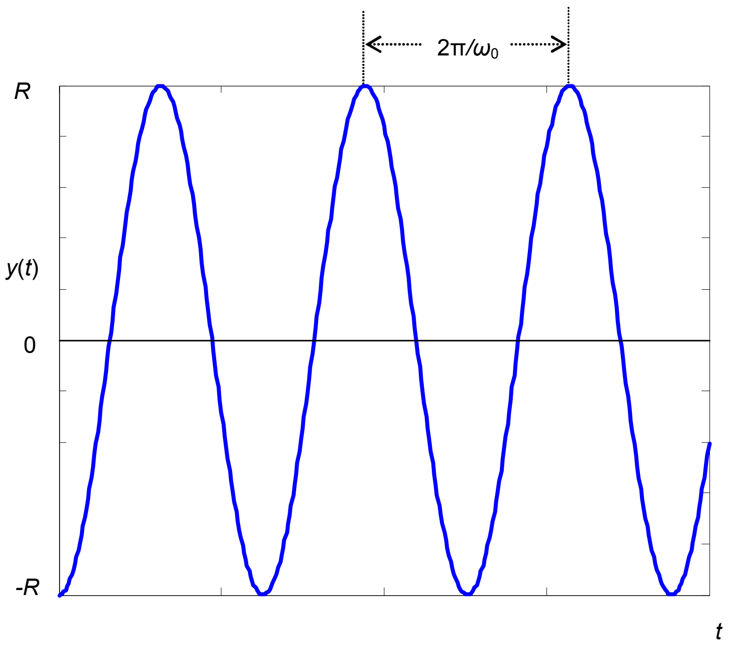
$$c_1 \sigma\upsilon\nu\omega_0 t + c_2 \eta\mu\omega_0 t = R\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t - \delta)$$

όπου, R=$(c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$, δ=εφ^{-1}(c_2/c_1).

Επομένως, η (2.60) γίνεται,

$$y(t) = R\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t - \delta) \tag{2.61}$$

Στο Σχ. 2.2, απεικονίζεται η (2.61). Παρατηρούμε ότι η $y(t)$ είναι πάντα μεταξύ $-R$ και R και ότι είναι περιοδική - επαναλαμβάνεται κάθε $2\pi/\omega_0$. Ο τύπος της κίνησης αυτής καλείται ***απλή αρμονική κίνηση***. Το R είναι το ***εύρος*** της κίνησης, δ η ***γωνία φάσης***, T_0=$2\pi/\omega_0$ η ***φυσική περίοδος*** και ω_0=$(k/m)^{1/2}$ η ***φυσική συχνότητα*** του συστήματος.



Σχήμα 2.2

(β) Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

Εάν συμπεριλάβουμε την επίδραση της απόσβεσης, η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η κίνηση της μάζας, είναι η,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=0 \qquad (2.62)$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της (2.62) είναι οι,

$$r_{1,2}=\frac{-c\pm(c^2-4km)^{1/2}}{2m}$$

και επομένως υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, αναλόγως με την τιμή της διακρίνουσας c^2-4km.

(i) $c^2-4km>0$. Στην περίπτωση αυτή οι r_1, r_2 είναι αρνητικές αφού c, m, $k>0$ και $c>(c^2-4km)^{1/2}$. Η λύση $y(t)$ είναι της μορφής,

$$y(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} \qquad (2.63)$$

Η περίπτωση αυτή καλείται ***υπεραποσβεσμένη***. Ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες είναι πιθανόν η μάζα να υπερβεί την θέση ισορροπίας, αλλά μόνο μία φορά, και στη συνέχεια επανέρχεται στη θέση ισορροπίας της. Επειδή σαν θέση ισορροπίας λαμβάνουμε την $y(t)$=0, από την (2.63),

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = 0 \\ &\Rightarrow c_1 e^{r_1 t} = -c_2 e^{r_2 t} \\ &\Rightarrow e^{(r_1 - r_2)t} = -\frac{c_2}{c_1} \\ &\Rightarrow (r_1 - r_2)t = \ln\left(-\frac{c_2}{c_1}\right) \end{aligned}$$

Άρα, αν $-c_2/c_1 \le 0$, η μάζα δεν διασχίζει την θέση ισορροπίας. Επίσης, αφού r_1, $r_2<0$, η $y(t)$ τείνει στο μηδέν όταν το t τείνει στο άπειρο.

(ii) $c_2 - 4km$=0. Στην περίπτωση αυτή, η $y(t)$ είναι της μορφής,

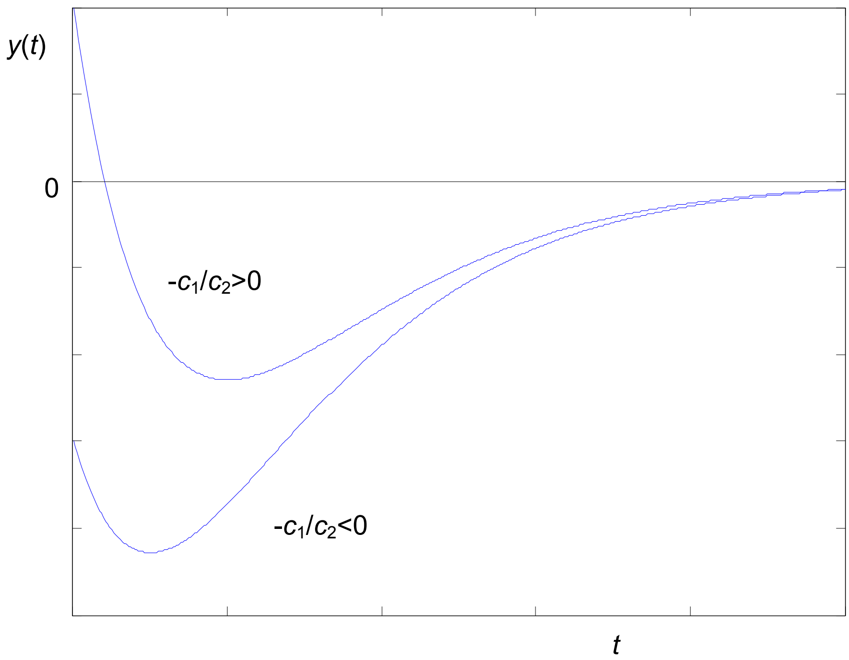
$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{(-c/2m)t} \tag{2.64}$$

Η κατάσταση αυτή καλείται ***κρίσιμα αποσβεσμένη***. Όπως και προηγούμενα, το σώμα επανέρχεται στην θέση ισορροπίας αφού την διασχίσει το πολύ μία φορά.

Πράγματι,

$$y(t)=0=(c_1+c_2 t)e^{(-c/2m)t} \Rightarrow c_1+c_2 t=0 \Rightarrow t=-c_1/c_2$$

που πρέπει να είναι θετικός αριθμός για να ισχύει. Και στις δύο περιπτώσεις, η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχ. 2.3.



Σχήμα 2.3

(iii) $c_2 - 4k < 0$. Στην περίπτωση αυτή η $y(t)$ είναι,

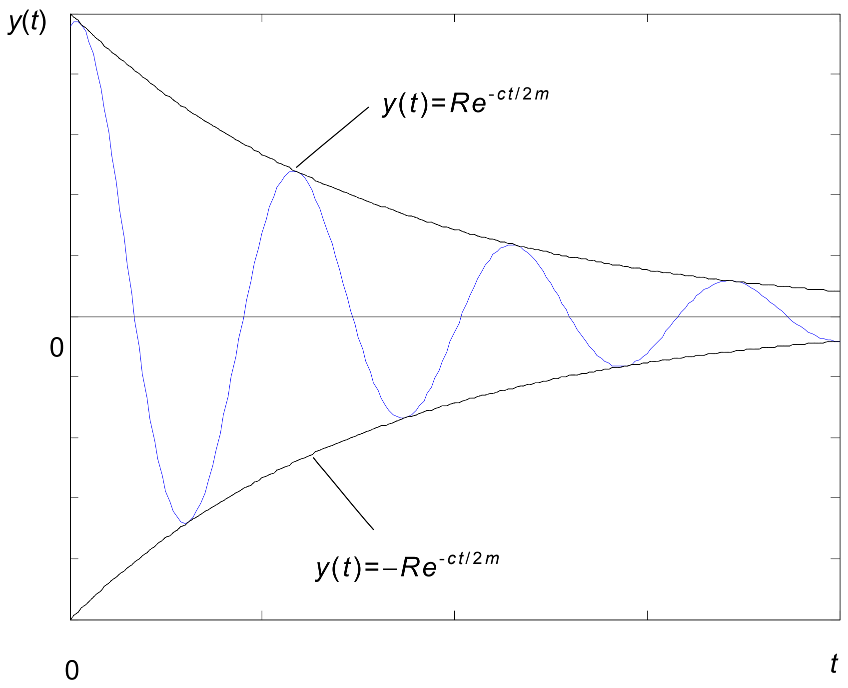
$$y(t)=e^{-ct/2m}[c_1\text{συν}\mu t+c_2\text{ημ}\mu t] \tag{2.65}$$

όπου $\mu = \dfrac{(4km - c^2)^{1/2}}{2m}$.

Γράφοντας την (2.65) σαν συνάρτηση ενός συνημιτόνου,

$$y(t)=Re^{-ct/2m}\text{συν}(\mu t-\delta)$$

Η περίπτωση αυτή καλείται ***υποαποσβεσμένη κίνηση*** και αντιπροσωπεύει μία αποσβεσμένη ταλάντωση, είναι δηλαδή μία συνημιτονοειδής καμπύλη με μειούμενο εύρος, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.4. Παρατηρούμε ότι η κίνηση της μάζας σταματάει τελικά, αν υπάρχει απόσβεση στο σύστημα. Με άλλα λόγια οποιαδήποτε αρχική διαταραχή, σταθεροποιείται τελικά από τον συντελεστή απόσβεσης. Αυτή είναι και η αιτία που παρόμοια συστήματα έχουν μεγάλη πρακτική εφαρμογή.



Σχήμα 2.4

(γ) Ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης

Αν τώρα εισάγουμε κάποια εξωτερική δύναμη $F(t)$=F_0συνωt, τότε η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση είναι η,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F_0\text{συν}\omega t \tag{2.66}$$

Με την μέθοδο της λογικής εικασίας μία συγκεκριμένη λύση βρίσκεται σαν το πραγματικό μέρος μίας λύσης της,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F_0e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.67}$$

Υποθέτοντας ότι $\psi(t)=(A+\mathrm{i}B)e^{\mathrm{i}\omega t}$, βρίσκουμε, αντικαθιστώνας στην (2.67),

$$-m(A+\mathrm{i}B)\omega^2+c(A+\mathrm{i}B)\mathrm{i}\omega+k(A+\mathrm{i}B)=F_0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -mAw^2 - cBw + kA = F_0 \\ -mBw^2 + cAw + kB = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} B &= -\frac{F_0 cw}{(k-mw^2)^2 + (cw)^2} \\ A &= \frac{F_0(k-mw^2)}{(k-mw^2)^2+(cw)^2} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\psi(t) = (A+\mathrm{i}B)(\text{συν}\omega t + \mathrm{i}\eta\mu\omega t) = A\text{συν}\omega t - B\eta\mu\omega t + \mathrm{i}(B\text{συν}\omega t + A\eta\mu\omega t)$$

και,
$$\mathrm{Re}\{\psi(t)\} = A\text{συν}\omega t - B\eta\mu\omega t \tag{2.68}$$

$$= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}[(k-m\omega^2)\text{συν}\omega t + c\omega\eta\mu\omega t]$$

$$= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}[(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}\text{συν}(\omega t - \delta)$$

$$= \frac{F_0}{\left[(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{1/2}}\text{συν}(\omega t - \delta) \tag{2.69}$$

όπου εφ$\delta = c\omega/(k-m\omega^2)$. Άρα κάθε λύση $y(t)$ της (2.67) είναι της μορφής

$$y(t) = \varphi(t) + \psi(t) = \phi(t) + R'\text{συν}(\omega t - \delta)$$

όπου $\varphi(t)$ είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Όπως όμως έχουμε ήδη δει, κάθε λύση $\varphi(t)$ της (2.62) τείνει στο μηδέν. Επομένως για μεγάλα t, η εξίσωση $y(t)=\psi(t)$ περιγράφει με ακρίβεια τη θέση της μάζας m. Για τον λόγο αυτό, η $\psi(t)$ καλείται ***σταθερή κατάσταση*** της λύσης, ενώ η $\varphi(t)$ ***μεταβατική***.

Είναι φανερό από την (2.69) ότι η σταθερή κατάσταση είναι μία συνημιτονοειδής καμπύλη ανάλογη της (2.61) με εύρος,

$$R' = \frac{F_0}{[(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} \tag{2.70}$$

και γωνία φάσεως,

$$\delta = \text{εφ}^{-1}\left[\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right]$$

Από την (2.70) φαίνεται ότι αυξάνοντας τον συντελεστή απόσβεσης μειώνουμε το εύρος της ταλάντωσης της σταθερής κατάστασης και αντίστροφα. Συνοψίζοντας, η απόκριση του συστήματος είναι και αυτή αρμονική με την ίδια συχνότητα της επιδρούσας δυνάμεως. Υπάρχει, όμως μία διαφορά φάσεως που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος και την συχνότητα της επιδρούσας δυνάμεως.

(δ) Ελεύθερη ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης

Αν αφαιρέσουμε την απόσβεση από το σύστημα, η διαφορική εξίσωση που διέπει την βεβιασμένη κίνηση της μάζας είναι η,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\,\text{συν}\omega t\,,\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{2.71}$$

Η περίπτωση $\omega \neq \omega_0$ δεν έχει ενδιαφέρον. Κάθε λύση της (2.71) είναι της μορφής,

$$y(t) = c_1 \text{συν}\omega_0 t + c_2 \text{ημ}\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\text{συν}\omega t$$

και προκύπτει από την (2.70) αν θέσουμε $c=0$. Η λύση αυτή είναι άθροισμα δύο περιοδικών συναρτήσεων με διαφορετικές περιόδους. Η ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν $\omega=\omega_0$, δηλαδή όταν η συχνότητα ω της εξωτερικής επίδρασης είναι ίση με την φυσική συχνότητα του συστήματος. Η κατάσταση αυτή καλείται ***περίπτωση συντονισμού***, και η διαφορική εξίσωση της είναι η,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\,\text{συν}\omega_0 t \tag{2.72}$$

Όπως και προηγούμενα, θα βρούμε μία συγκεκριμένη λύση της (2.72) σαν το πραγματικό μέρος μίας μιγαδικής λύσης $\psi(t)$ της εξίσωσης,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} e^{\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{2.73}$$

Επειδή η $e^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δοκιμάζουμε την,

$$\phi(t) = Ate^{\mathrm{i}\omega_0 t} \Rightarrow \phi''(t) + \omega_0^2\phi = 2\mathrm{i}\omega_0 Ae^{\mathrm{i}\omega_0 t}$$

Επομένως,

$$2\mathrm{i}\omega_0 A = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = -\frac{\mathrm{i}F_0}{2m\omega_0}$$

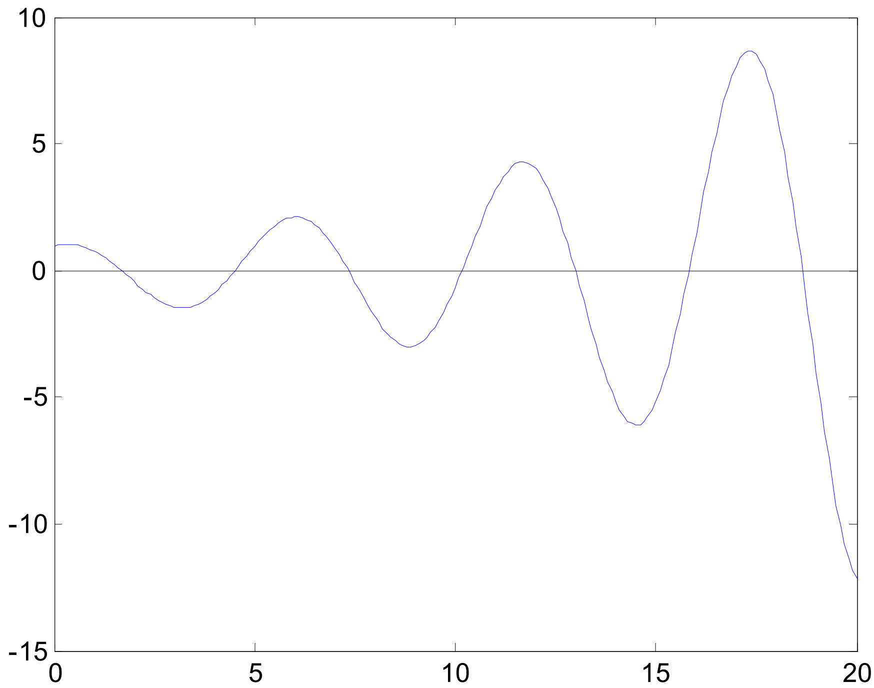
$$\psi(t) = \mathrm{Re}\{(\phi(t)\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{\mathrm{i}F_0 t}{2m\omega_0}(\text{συν}\omega_0 t + \mathrm{i}\text{ημ}\omega_0 t\right\}$$

$$= \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\text{ημ}\omega_0 t$$

Άρα, η γενική λύση της (2.73), είναι,

$$y(t) = c_1\text{συνω}_0 t + c_2\text{ημ}\omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\text{ημ}\omega_0 t \tag{2.74}$$

Τώρα, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της (2.74) είναι περιοδική συνάρτηση. Ο τρίτος όρος όμως, παριστά μία ταλάντωση με αυξανόμενο εύρος (Σχ. 2.5). Άρα αν η δύναμη που επενεργεί στο σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό με αυτό, προκαλεί ταλαντώσεις χωρίς όριο. Το φαινόμενο αυτό εξηγεί την κατάρρευση γεφυρών, όπως αυτής της Tacoma, και πολλές άλλες μηχανικές καταστροφές.



Σχήμα 2.5 Γράφημα της $At\eta\mu\omega_0 t$

2.8 Ασκήσεις

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής $\dfrac{d^2y}{dt^2}+t^2\dfrac{dy}{dt}+2ty=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

2. Τρεις λύσεις μίας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως είναι οι $\psi_1(t)=1+e^{t^2}$, $\psi_2(t)=1+te^{t^2}$, $\psi_3=(t)=(t+1)e^{t^2}+1$. Να βρεθεί η γενική λύση.

3. Έστω σταθερές a, b, $c>0$. Δείξτε ότι η διαφορά δύο οποιωνδήποτε λύσεων της $ay''+by'+cy=g(t)$ τείνει στο μηδέν καθώς το t τείνει στο άπειρο.

4. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

α. $y''+3y=t^3-1$

β. $y''+y'+y=1+t+t^2$

5. Έστω $y(t)$ η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $\dfrac{d^2y}{dt^2}+5\dfrac{dy}{dt}+6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=V$. Για ποια τιμή του V η $y(t)$ παραμένει μη αρνητική για κάθε t ;

6. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικής τιμής:

α. $3\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=0,\ y(2)=1,\ y'(2)=-1.$

β. $9\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-12\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=0,\ y(\pi)=0,\ \ y'(\pi)=2.$

7. Με την μέθοδο υποβιβασμού της τάξεως να λυθούν οι:

α. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4(t^2-2)y=0,\ y_1(t)=e^{t^2}.$

β. $(2t+1)\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-4(t+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=0,\ y_1(t)=t+1$

8. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικής τιμής:

α. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0,\ \ y(2)=1,\ y'(2)=-1$

β. $(1-t)\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(1-t)y=0,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=2$

γ. $y''-3y'+2y=(t+1)^{1/2}\ ,\ y(0)=y'(0)=0$

9. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y''+y=\text{τεμ}\,t$ στο διάστημα $-\pi/2<t<\pi/2$.

3 Διαφορικές εξισώσεις ανωτέρων τάξεων

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα πούμε μερικά πράγματα για τις διαφορικές εξισώσεις ανωτέρων τάξεων. Η θεωρία είναι ανάλογη με αυτή των εξισώσεων δευτέρας τάξεως.

Ορισμός 3.1 Η εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y]=a_n(t)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_0(t)=0,\quad a_n(t)\neq 0 \tag{3.1}$$

καλείται ***γενική ομογενής διαφορική εξίσωση n-οστής τάξεως***. Η διαφορική εξίσωση (3.1) μαζί με τις αρχικές συνθήκες,

$$y(t_0)=y_0\,,\quad y'(t_0)=y_0^1\,,\ldots,\, y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \tag{3.2}$$

καλείται ***πρόβλημα αρχικής τιμής***.

Γενικεύοντας λοιπόν την προηγούμενη θεωρία, προκύπτουν τα παρακάτω:

Θεώρημα 3.1 Έστω $y_1(t)$, $y_2(t)$,..., $y_n(t)$ n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.1). Τότε κάθε λύση της (3.1) είναι της μορφής,

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\ \ldots\ +c_ny_n(t) \tag{3.3}$$

(Γενίκευση του Θεωρήματος 2.2).

Για να βρούμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.1) όταν οι συντελεστές $a_j(t)$, j=1, …, n είναι σταθερές, υπολογίζουμε την,

$$\mathcal{D}[e^{rt}]=(a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\ \ldots\ +a_0)e^{rt} \tag{3.4}$$

Αυτό σημαίνει ότι η e^{rt} είναι μία λύση της (3.1) αν και μόνον αν το r είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης,

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\ldots\ +a_0=0 \tag{3.5}$$

Επομένως αν η (3.5) έχει τις διακεκριμένες ρίζες r_1, ..., r_n τότε η γενική λύση της (3.1) είναι,

$$y(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+\ldots+c_ne^{r_nt}$$

Αν $r_j=a_j+\mathrm{i}b_j$ είναι μία μιγαδική λύση της (3.5), τότε,

$$u(t)=\mathrm{Re}\{e\}^{r_jt}=e^{a_jt}\text{συν}b_jt\,,\ \ v(t)=\mathrm{Im}\{e\}^{r_jt}=e^{a_jt}\text{ημ}b_jt$$

είναι δύο πραγματικές λύσεις της (3.1). Τέλος, αν η r_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας k, δηλαδή,

$$a_nr^n+\ldots+a_0=(r-r_1)^kq(r)$$

όπου $q(r)\neq 0$, τότε e^{r_1t}, $te^{r_1t},\ldots,t^{k-1}e^{r_1t}$ είναι k γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.1). Αποδεικνύουμε τον τελευταίο αυτό ισχυρισμό ως εξής:

Παρατηρούμε από την (3.4) ότι,

$$\mathcal{D}[e^{rt}]=(r-r_1)^kq(r)e^{rt}$$

αν η r_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας k. Επομένως,

$$\mathcal{D}[t^je^{r_1t}]=\mathcal{D}\left[\frac{\partial^j}{\partial r^j}e^{rt}\bigg|_{r=r_1}\right]=\frac{\partial^j}{\partial r^j}\mathcal{D}[e^{rt}]\bigg|_{r=r_1}=\frac{\partial^j}{\partial r^j}(r-r_1)^kq(r)e^{rt}\bigg|_{r=r_1}$$
$$=0,\ \ \text{for } 1\leq j<k$$

Άρα $y(t)=t^je^{r_1t}$, $j=1,\ \ldots,\ k-1$ είναι λύσεις της (3.1). Για να αποδείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες θεωρούμε την συνάρτηση,

$$z(t)=\lambda_1e^{r_1r}+\lambda_2te^{r_1t}+\ldots+\lambda_nt^{n-1}e^{r_1t}=(\lambda_1+\lambda_2t+\ldots+\lambda_nt^{n-1})e^{r_1t}$$

Για να υπάρχει εξάρτηση θα πρέπει $z(t)=0$. Επειδή $e^{r_1t}\neq 0$, η παράσταση μέσα στην παρένθεση πρέπει να είναι ταυτόσημη με μηδέν, πράγμα αδύνατον αν $\lambda_i\neq 0$, $i=1,\ \ldots,\ n$.

Παράδειγμα 3.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης,

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}y^4}+y=0 \tag{3.6}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^4+1=0$. Βρίσκουμε τις ρίζες, από το γεγονός ότι

$$-1=e^{\mathrm{i}\pi}=e^{3\mathrm{i}\pi}=e^{5\mathrm{i}\pi}=e^{7\mathrm{i}\pi}$$

Άρα τα,

$$\begin{aligned}
r_1 &= e^{\mathrm{i}\pi/4} = \text{συν}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\text{ημ}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\\
r_2 &= e^{3\pi\mathrm{i}/4} = \text{συν}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\text{ηη}\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})\\
r_3 &= e^{3\pi\mathrm{i}/4} = \text{συν}\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\text{ημ}\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\\
r_4 &= e^{7\pi\mathrm{i}/4} = \text{συν}\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\text{ημ}\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})
\end{aligned}$$

είναι 4 λύσεις της εξίσωσης r_4+1=0. Οι ρίζες r_3, r_4 είναι οι συζυγείς της r_2, r_1 αντίστοιχα. Επομένως,

$$e^{r_1 t} = e^{t/\sqrt{2}}\left[\text{συν}\frac{t}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\ \text{ημ}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$$

και

$$e^{r_2 t} = e^{-t/\sqrt{2}}\left[\text{συν}\frac{t}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\ \text{ημ}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$$

είναι δύο μιγαδικές λύσεις της (3.6), πράγμα που σημαίνει ότι οι,

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{t/\sqrt{2}}\ \text{συν}\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad y_2(t)=e^{t/\sqrt{2}}\ \text{ημ}\frac{t}{\sqrt{2}}\\
y_3(t) &= e^{-t/\sqrt{2}}\ \text{συν}\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad y_4(t)=e^{-t/\sqrt{2}}\text{ημ}\frac{t}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

είναι 4 πραγματικές, γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.6). Επομένως, η γενική λύση της (3.6) είναι η,

$$y(t)=e^{t/\sqrt{2}}\left[a_1\text{συν}\frac{t}{\sqrt{2}}+b_1\text{ημ}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]+e^{-t/\sqrt{2}}\left[a_2\text{συν}\frac{t}{\sqrt{2}}+b_2\text{ημ}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$$

Παράδειγμα 3.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης,

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}t^4}-3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}+3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (3.7)$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση της (3.7) είναι η,

$$r^4-3r^3+3r^2-r=r(r-1)^3=0$$

Οι ρίζες της είναι $r_1=0$, $r_2=1$ (τριπλή). Επομένως η γενική λύση είναι,

$$y(t)=c_1+(c_2+c_3t+c_4t^2)e^t$$

Η θεωρία για την μη ομογενή διαφορική εξίσωση,

$$\mathcal{D}[y]=a_n(t)\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+\ldots+a_0(t)=f(t),\quad a_n(t)\neq 0 \qquad (3.8)$$

είναι επίσης ανάλογη με την θεωρία της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως. Τα θεωρήματα που ακολουθούν είναι ευθείες γενικεύσεις των αντίστοιχων θεωρημάτων για τις εξισώσεις δευτέρας τάξεως.

Θεώρημα 3.2 Η διαφορά οποιωνδήποτε δύο λύσεων της μη ομογενούς εξίσωσης (3.8) είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης (3.1).

Θεώρημα 3.3 Έστω $\psi(t)$ μία συγκεκριμένη λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (3.8) και έστω $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$, n ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (3.1). Τότε κάθε λύση $y(t)$ της (3.8) είναι της μορφής,

$$y(t)=\psi(t)+c_1y_1(t)+\ \ldots\ +c_ny_n(t)$$

για κάποιες σταθερές c_1, ..., c_n.

Η μέθοδος της συνετής εικασίας έχει εφαρμογή και στην διαφορική εξίσωση n τάξεως,

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_0 y = [b_0 + b_1 t + .. + b_k t^k]e^{\lambda t} \tag{3.9}$$

Επαληθεύεται εύκολα ότι η διαφορική εξίσωση (3.9) έχει μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της μορφής,

$$\psi(t)=[c_0+c_1 t+ \ldots +c_k t^k]e^{\lambda t}$$

αν η $e^{\lambda t}$ δεν είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης, και,

$$\psi(t)=t^j[c_0+c_1+ \ldots +c_k t^k]e^{\lambda t}$$

αν η $t^{j-1}e^{\lambda t}$ είναι μεν λύση της ομογενούς εξίσωσης, αλλά η $t^j e^{\lambda t}$ δεν είναι.

Παράδειγμα 3.3 Να βρεθεί μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης,

$$L[y] = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = e^t \tag{3.10}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^3+3r^2+3r+1=(r+1)^3$ έχει τριπλή ρίζα την $r=-1$. Επομένως η e^t δεν είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης και η (3.10) έχει μία συγκεκριμένη λύση της μορφής $\psi(t)=Ae^t$. Υπολογίζοντας την $\mathcal{D}[\psi]=8Ae^t=e^t$, βλέπουμε ότι $A=1/8$. Άρα,

$$\psi(t) = \frac{1}{8}e^t$$

είναι μία συγκεκριμένη λύση της (3.10).

3.2 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως πολλών μεταβλητών, δηλαδή εξισώσεις της μορφής,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(t, x_1, ..., x_n) \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= f_2(t, x_1, ..., x_n) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(t, x_1, ..., x_n)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ή σε διανυσματική μορφή,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{3.12}$$

όπου $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}$ είναι διαστάσεων $(n\times 1)$.

Λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.12) είναι κάποια διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{x}(t)$ που να ικανοποιεί την (3.12). Για παράδειγμα η συνάρτηση,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

είναι μία λύση του συστήματος,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

αφού,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

Εκτός της εξίσωσης (3.12) θα έχουμε συχνά αρχικές συνθήκες της μορφής,

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3.13}$$

Για παράδειγμα η,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 + e^{2t/2} \end{bmatrix}$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

αφού,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} e^t \\ 1+e^{2t/2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

και,

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} e^0 \\ 1+e^0/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση (3.12) συνήθως αναφέρεται σαν ***σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως***. Εξισώσεις της μορφής αυτής ανακύπτουν αρκετά συχνά σε προβλήματα βιολογίας και φυσικής και συνήθως περιγράφουν πολύπλοκα συστήματα αφού η μεταβολή της μεταβλητής x_j εξαρτάται από την τιμή όλων των υπολοίπων μεταβλητών. Τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως ανακύπτουν επίσης και από διαφορικές εξισώσεις ανωτέρων τάξεων μίας μεταβλητής $y(t)$. Κάθε διαφορική εξίσωση n τάξεως μίας μεταβλητής $y(t)$ μπορεί να μετατραπεί σε σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με μεταβλητές τις,

$$\begin{aligned} x_1(t)&=y(t)\\ x_2(t)&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ &\cdots\cdots\\ x_n(t)&=\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{aligned}$$

Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν πώς γίνεται αυτό.

Παράδειγμα 3.4 Μετατρέψτε την διαφορική εξίσωση,

$$a_n(t)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+a_0(t)y=0$$

σ' ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Λύση: Έστω $x_1(t) = y$, $x_2(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, ..., x_n(t) = \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}$. Τότε,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ -\dfrac{a_{n-1}(t)x_n + a_{n-2}(t)x_{n-1} + \cdots + a_0(t)x_1}{a_n(t)} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3.5 Μετατρέψτε το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 3y = e^t \ , \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$$

σε πρόβλημα αρχικής τιμής για τις μεταβλητές y, y', y''.

Λύση: Θέτουμε,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} y \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ e^t - x_2^2 - 3x_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αν οι συναρτήσεις $f_i(t, \boldsymbol{x})$ της (3.12) είναι γραμμικές ως προς τις εξαρτημένες μεταβλητές x_i, i=1, ..., n, τότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων καλείται ***γραμμικό***. Το πιο γενικό γραμμικό σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως έχει την μορφή,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{g}(t) \tag{3.14}$$

όπου,

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t)\ldots a_{1n}(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)\ldots a_{nn}(t)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t)\cdots b_{1m}(t) \\ \vdots \\ b_{n1}(t)\cdots b_{nm}(t)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}(t)=\begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t)\end{bmatrix}$$

Αν η διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{g}(t)$ είναι ταυτόσημη με το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή αν, $\boldsymbol{g}(t)\equiv\boldsymbol{0}$, τότε η (3.14) καλείται ***ομογενής***, αλλοιώς καλείται ***μη ομογενής***. Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχή να λύσουμε το ομογενές σύστημα ακολουθώντας την λογική που αναπτύξαμε για την λύση των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ay$. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.4 (Ύπαρξης - μοναδικότητας). Υπάρχει μία και μόνο μία λύση στο πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,,\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3.15}$$

που ισχύει στο διάστημα $-\infty<t<\infty$.

Το Θεώρημα 3.4 είναι εξαιρετικά σημαντικό και έχει πολλαπλή χρησιμότητα. Συγκεκριμένα, αν $\boldsymbol{x}(t)$ είναι κάποια μη τετριμμένη λύση τότε $\boldsymbol{x}(t)\neq\boldsymbol{0}$ για κάθε t. Γιατί αν $\boldsymbol{x}(t^*)=\boldsymbol{0}$ για κάποιο t^* τότε $\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ αφού η $\boldsymbol{x}(t)$ και το $\boldsymbol{0}$ ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση και έχουν την ίδια τιμή στο $t=t^*$.

Θεώρημα 3.5 Η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης (3.15) είναι n.

Απόδειξη: Θα βρούμε μία βάση του $\mathcal{V}$ με n στοιχεία. Για το σκοπό αυτό, έστω $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$, $j=1,\ldots,n$ η λύση στο πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,,\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{e}_j=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\-\text{γραμμή } j\\\\\\\end{array} \tag{3.16}$$

δηλαδή $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}_j(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}_j(t)\,,\quad \boldsymbol{\varphi}_j(0)=\boldsymbol{e}_j$.

Από το Θεώρημα 3.4 η $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$ ορίζεται για κάθε t και είναι μοναδική. Για να δούμε αν τα $\boldsymbol{\varphi}_j$ είναι ανεξάρτητα ή όχι διανύσματα του $\mathcal{V}$, θεωρούμε την εξίσωση,

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t)+\ \ldots\ +c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)=\mathbf{0} \tag{3.17}$$

Βρίσκοντας την τιμή και των δύο μελών της (3.17) όταν t=0, παίρνουμε,

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(0)+\ldots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

Ή
$$c_1\boldsymbol{e}_1+\ \ldots\ +c_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0} \tag{3.18}$$

Επειδή όμως τα $\boldsymbol{e}_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, προκύπτει ότι c_j=0, j=1, …, n. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και τα $\boldsymbol{\varphi}_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathcal{V}$, αφού αρκεί τα $\boldsymbol{\varphi}_j$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα για μία τιμή του t. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τα $\boldsymbol{\varphi}_j$ αποτελούν βάση του $\mathcal{V}$. Πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ (κάθε λύση της (3.15)) μπορεί να γραφτεί σαν κάποιος γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{\varphi}_j$, j=1, …, n.

Έστω $\boldsymbol{x}$ στοιχείο του $\mathcal{V}$ και έστω $\boldsymbol{x}(0)$=$\boldsymbol{c}$. Κατασκευάζουμε την συνάρτηση,

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+\ \ldots\ +c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

όπου c_j, j=1, …, n οι συνιστώσες του $\boldsymbol{c}$. Ξέρουμε ότι η $\boldsymbol{\varphi}(t)$ ικανοποιεί την (3.15) αφού είναι γραμμικός συνδυασμός λύσεων. Επιπλέον,

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=c_1\boldsymbol{\varphi}_1(0)+\ldots\ +c_n\boldsymbol{\varphi}_n(0)=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\ldots+c_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}(0)$$

Άρα η $\boldsymbol{x}(t)$ και $\boldsymbol{\varphi}(t)$ ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση και έχουν την ίδια τιμή όταν t=0. Επομένως από το Θεώρημα 3.4 πρέπει να είναι ταυτόσημες, δηλαδή,

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{\varphi}(t)=c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+\ \ldots\ +c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

ή ισοδύναμα, οι $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$, ..., $\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ είναι βάση του $\mathcal{V}$.

Το Θεώρημα 3.5 μας λέει ότι για να λύσουμε την 3.15 αρκεί να βρούμε οποιεσδήποτε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της. Το θεώρημα που ακολουθεί μας δίνει ένα τρόπο ελέγχου της γραμμικής ανεξαρτησίας n λύσεων $\boldsymbol{x}_j(t)$, $j=1, \ldots, n$. Πιο συγκεκριμένα ανάγει το πρόβλημα αυτό στο απλούστερο πρόβλημα του ελέγχου της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων $\boldsymbol{x}_j(t_0)$, $j=1, \ldots, n$ για κάποιο κατάλληλο t_0.

Θεώρημα 3.6 (Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία). Έστω $\boldsymbol{x}_j$, $j=1, \ldots, k$, k λύσεις της $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Επιλέγουμε ένα κατάλληλο t_0. Τότε τα $\boldsymbol{x}_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, αν και μόνον αν τα $\boldsymbol{x}_j(t_0)$, $j=1, \ldots, k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι τα $\boldsymbol{x}_j$ είναι γραμμικά εξαρτημένες λύσεις. Τότε υπάρχουν σταθερές c_j, $j=1, \ldots, k$, όχι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε,

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\ldots+c_k\boldsymbol{x}_k(t_0)=\mathbf{0}$$

Άρα τα $\boldsymbol{x}_j(t_0)$, $j=1, \ldots, k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι οι τιμές των $\boldsymbol{x}_j(t)$, $j=1, \ldots, k$, σε κάποιο χρόνο t_0 είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχουν σταθερές c_j, $j=1, \ldots, k$ όχι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε,

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\ldots+c_k\boldsymbol{x}_k(t_0)=\mathbf{0}$$

Με τις συγκεκριμένες αυτές σταθερές κατασκευάζουμε την διανυσματική συνάρτηση,

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\ldots+c_k\boldsymbol{x}_k(t)$$

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την (3.15) αφού είναι γραμμικός συνδυασμός λύσεων. Επιπλέον $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\mathbf{0}$. Άρα, από το Θεώρημα 3.5, $\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathbf{0}$. Αυτό σημαίνει ότι οι $\boldsymbol{x}_j(t)$, $j=1, \ldots, k$, είναι γραμμικά εξαρτημένες λύσεις.

Έχοντας εφοδιασθεί με τα παραπάνω θεωρήματα είμαστε σε θέση τώρα να βρούμε την γενική λύση της (3.15), σαν γραμμικό συνδυασμό κάποιων n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της. Το πρόβλημα αυτό μπορούμε να το προσεγγίσουμε διαφορετικά, καταλήγοντας όμως πάλι στην ανάγκη εύρεσης κάποιων n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων.

Ανάλογα με την λύση $y(t)=ce^{at}$ της (1.9) ας υποθέσουμε ότι η (3.15) έχει λύση της μορφής $\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}$, όπου,

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}_{n\times n} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{\boldsymbol{A}^n t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{A}t)^n}{n!} \tag{3.19}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η άπειρη σειρά (3.19) συγκλίνει για κάθε t και επομένως μπορεί να παραγωγισθεί ανά όρο:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 t + \ldots + \frac{\boldsymbol{A}^{n+1}}{n!} t^n + \ldots \\ &= \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{I}_{n\times n} + \boldsymbol{A}t + \ldots \frac{\boldsymbol{A}^n t^n}{n!} + \ldots\right] = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t} \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η $e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}$ είναι λύση της,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{3.20}$$

αφού $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}$.

3.3 Θεμελιώδεις πίνακες λύσεων και ο $e^{\boldsymbol{A}t}$

Αν $\boldsymbol{x}_1(t)$, ..., $\boldsymbol{x}_n(t)$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.20) τότε κάθε λύση μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\boldsymbol{x}(t)$=$\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c}$ όπου,

$$\boldsymbol{X}(t) = [\boldsymbol{x}_1(t) \quad \ldots \quad \boldsymbol{x}_n(t)]$$

Ορισμός 3.2 Ένας πίνακας $\boldsymbol{X}(t)$ καλείται ***θεμελιώδης πίνακας λύσεων*** της (3.20) αν οι στήλες του είναι ένα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της (3.20).

Θα δείξουμε τώρα πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $e^{\boldsymbol{A}t}$ κατευθείαν από οποιονδήποτε πίνακα λύσεων της (3.20). Αυτό είναι πολύ εντυπωσιακό γιατί δεν φαίνεται δυνατό να βρούμε το άθροισμα της άπειρης σειράς (3.19) ακριβώς για αυθαίρετους $\boldsymbol{A}$. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.7 Έστω $\boldsymbol{X}(t)$ ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Τότε, $e^{\boldsymbol{A}t}$=$\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(0)$.

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα 3.7 σε τρία βήματα. Πρώτα, θα βρούμε μία απλή μέθοδο για να εξακριβώνουμε αν ένας πίνακας συναρτήσεων είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (3.20). Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο αυτή για να δείξουμε ότι ο $e^{\boldsymbol{A}t}$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (3.20), και τέλος θα διατυπώσουμε την σχέση ανάμεσα σε δύο θεμελιώδεις πίνακες λύσεων της (3.20).

Λήμμα 3.1 Ένας πίνακας $\boldsymbol{X}(t)$ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (3.20) αν και μόνον αν $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$ και $\det \boldsymbol{X}(0)\neq 0$.

Απόδειξη: Έστω $\boldsymbol{x}_1(t)$, ..., $\boldsymbol{x}_n(t)$ οι n στήλες του $\boldsymbol{X}(t)$. Παρατηρούμε ότι,

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=[\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\cdots\dot{\boldsymbol{x}}_n(t)]$$

και $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)=[\boldsymbol{A}x_1(t)\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n(t)]$. Επομένως οι n διανυσματικές εξισώσεις $\dot{\boldsymbol{x}}_j(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j(t)$, j=1, …, n είναι ισοδύναμες με την εξίσωση πινάκων $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$.

Ακόμη, n λύσεις της (3.20) είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνον αν τα $\boldsymbol{x}_1(0)$, $\boldsymbol{x}_2(0)$, ..., $\boldsymbol{x}_n(0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ ή ισοδύναμα αν και μόνον αν $\det\mathbf{X}(0)\neq 0$. Άρα ο $\mathbf{X}(t)$ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων αν και μόνον αν $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$ και $\det\boldsymbol{X}(0)\neq 0$.

Λήμμα 3.2 Ο πίνακας e^{At} είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (3.20).

Απόδειξη: Δείξαμε προηγουμένως ότι,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}\,e^{\boldsymbol{A}t}$$

Επίσης $\det[e^{A0}]=\det[\mathbf{I}]=1\neq 0$. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1 ο e^{At} είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (3.20).

Λήμμα 3.3 Έστω $\boldsymbol{X}(t)$ και $\boldsymbol{Y}(t)$ δύο θεμελιώδεις πίνακες λύσεων της (3.20). Τότε υπάρχει σταθερός πίνακας $\boldsymbol{C}$, τέτοιος ώστε $\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}$.

Απόδειξη: Εξ ορισμού οι στήλες $\boldsymbol{x}_1(t)$, ..., $\boldsymbol{x}_n(t)$ του $\boldsymbol{X}(t)$ και $\boldsymbol{y}_1(t)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(t)$ του $\boldsymbol{Y}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.20). Ειδικότερα κάθε στήλη του $\boldsymbol{Y}(t)$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών του $\boldsymbol{X}(t)$: δηλαδή υπάρχουν σταθερές c_{j1}, ..., c_{jn}, j=1, …, n, όχι όλες μηδέν τέτοιες ώστε:

$$\boldsymbol{y}_j(t)=c_{j1}\boldsymbol{x}_1(t)+c_{j2}\boldsymbol{x}_2(t)+\ldots+c_{jn}\boldsymbol{x}_n(t),\ j=1,\ \ldots,\ n$$

Έστω,

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Τότε προφανώς $\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}$.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.7.

Έστω $\boldsymbol{X}(t)$ ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (3.20). Από τα Λήμματα 3.2, 3.3, προκύπτει ότι υπάρχει πίνακας $\boldsymbol{C}$, τέτοιος ώστε, $e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}$. Θέτοντας t=0,

$$\mathbf{I}=\boldsymbol{X}(0)\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{C}=\boldsymbol{X}^{-1}(0)$$

Απομένει να βρούμε μία μέθοδο υπολογισμού n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της (3.20). Η Γραμμική Άλγεβρα μας βοηθάει και σ' αυτό το σημείο. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι,

$$e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}=e^{(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})t}e^{\lambda\mathbf{I}t}\boldsymbol{v}$$

για κάθε σταθερά λ, αφού $(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})(\lambda\mathbf{I})=(\lambda\mathbf{I})(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} e^{\lambda\mathbf{I}t}\boldsymbol{v} &= \left[\mathbf{I}+\lambda\mathbf{I}t+\frac{\lambda^2\mathbf{I}^2t^2}{2!}+\cdots\right]\boldsymbol{v} \\ &= \left[1+\lambda t+\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\cdots\right]\boldsymbol{v}=e^{\lambda t}\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Επομένως, $e^{\boldsymbol{A}t}=e^{\lambda t}e^{(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})t}\boldsymbol{v}$.

Τώρα, αν το διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ ικανοποιεί την σχέση,

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^m\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \tag{3.21}$$

δηλαδή το $\boldsymbol{v}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξεως m του πίνακα $\boldsymbol{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε η άπειρη σειρά $e^{(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})t}\boldsymbol{v}$ έχει μόνον m όρους, αφού,

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})^{m+l}\ \boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})^l(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})^m\ \boldsymbol{v}=0$$

για κάθε ακέραιο l>0.

Το ακόλουθο λήμμα από τη γραμμική άλγεβρα μας εξασφαλίζει ότι για κάθε πίνακα $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ μπορούμε να βρούμε n γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που να ικανοποιούν τη σχέση (3.21).

Λήμμα 3.4 Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ του πίνακα $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ έχει k διακεκριμένες ρίζες λ_1, ..., λ_k με πολλαπλότητα n_1, .., n_k αντίστοιχα ($k\leq n$, $\sum n_i=n$). (Δηλαδή $p(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{n_1}\ldots(\lambda_k-\lambda)^{n_k}$). Τότε υπάρχουν ακέραιοι, $d_j\leq n_j$ τέτοιοι ώστε η εξίσωση $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\mathbf{I})^{d_j}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ να έχει τουλάχιστον n_j γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Άρα για κάθε ιδιοτιμή λ_j του $\boldsymbol{A}$ μπορούμε να βρούμε n_j γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.20). Αυτές θα έχουν την μορφή,

$$\boldsymbol{X}(t)=e^{\lambda_j t}\left[\boldsymbol{v}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j\mathbf{I})\boldsymbol{v}+\cdots+\frac{t^{d_j-1}}{(d_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\mathbf{I})^{d_j-1}\,\boldsymbol{v}\right]$$

Επιπλέον το σύνολο των $n_1+\ \ldots\ +n_k=n$ λύσεων που βρίσκουμε έτσι είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού $\boldsymbol{X}_k(0)=\boldsymbol{v}_k$ και τα $\boldsymbol{v}_k$ είναι κατασκευασμένα ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 3.6 Να βρεθεί ο e^{At} αν,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&2\\0&0&5\end{bmatrix}$$

Λύση: Κατ' αρχή βρίσκουμε 3 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&2\\0&0&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \tag{3.22}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $p(\lambda)=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})=(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$. Επομένως ο $\boldsymbol{A}$ έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda=1$, $\lambda=3$, $\lambda=5$.

(i) $\lambda=1$. Το διάνυσμα,

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{A}$, αφού $(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. Άρα $\boldsymbol{x}_1(t)=e^{1t}\boldsymbol{v}$ είναι μία λύση της (3.22).

(ii) $\lambda=3$. Από την $(\boldsymbol{A}-3\mathbf{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ βρίσκουμε ότι,

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

είναι ένα διάνυσμα του $\boldsymbol{A}$ για την λ=3. Άρα,

$$\boldsymbol{x}_2(t) = e^{3t}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

είναι μία δεύτερη λύση της (3.22).

(iii) λ=5. Από την $(\boldsymbol{A}-5\mathbf{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ βρίσκουμε ότι $\boldsymbol{v}=[1 \;\; 2 \;\; 2]^{\mathrm{T}}$. Επομένως,

$$\boldsymbol{x}_3(t)=e^{5t}[1 \;\; 2 \;\; 2]^{\mathrm{T}}$$

είναι μία τρίτη λύση της (3.22).

Οι τρεις αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα ο,

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων. Επίσης,

$$\boldsymbol{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & -\tfrac{1}{2}e^{t} + \tfrac{1}{2}e^{3t} & -\tfrac{1}{2}e^{3t} + \tfrac{1}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{3t} & -e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$$

3.4 Μη ομογενή συστήματα

Α. Μεταβολή παραμέτρων

Ας θεωρήσουμε τώρα την μη ομογενή εξίσωση,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{g}(t) \tag{3.23}$$

Στη περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την γνώση μας των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{3.20}$$

για να βρούμε την λύση του προβλήματος αρχικής τιμής,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{g}(t)\,, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.24}$$

Έστω $\boldsymbol{x}_1(t)$, ..., $\boldsymbol{x}_n(t)$ οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (3.20). Επειδή η γενική λύση της (3.20) είναι η $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+ \ldots +c_n\boldsymbol{x}_n(t)$, είναι φυσικό να ψάχνουμε μία λύση της (3.23) της μορφής,

$$\boldsymbol{x}(t)=u_1(t)\boldsymbol{x}_1(t)+u_2(t)\boldsymbol{x}_2(t)+ \ldots +u_n(t)\boldsymbol{x}_n(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{3.25}$$

όπου,

$$\begin{gathered}\boldsymbol{X}(t)=[\boldsymbol{x}_1(t) \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{x}_n(t)] \\ \boldsymbol{u}(t)=[u_1(t) \;\; \ldots \;\; u_n(t)]^{\mathrm{T}}\end{gathered}$$

Αντικαθιστώντας την (3.25) στην (3.23), έχουμε,

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{X}(t)\,\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{g}(t) \tag{3.26}$$

Ο πίνακας $\boldsymbol{X}(t)$ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (3.20). Επομένως $\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$. Άρα η (3.26) γίνεται,

$$\boldsymbol{X}(t)\,\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{g}(t) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{X}^{-1}(t)\,\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{g}(t) \tag{3.27}$$

αφού η $\boldsymbol{X}(t)$ έχει βαθμό n λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των λύσεων-στηλών της. Ολοκληρώνοντας την (3.27) από το t_0 έως το t:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \dot{\boldsymbol{u}}(r)\,dr = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}^{-1}(s)\,\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{g}(s)\,ds &\Rightarrow \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}^{-1}(s)\,\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{g}(s)\,ds \\ &= \boldsymbol{X}^{-1}(t_1)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}^{-1}(s)\,\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{g}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{X}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{g}(s)\mathrm{d}s \qquad (3.28)$$

Αν ο $\boldsymbol{X}(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων e^{At}, η (3.28) απλουστεύεται (διαφορετικά τα πράγματα περιπλέκονται), αφού $\boldsymbol{X}^{-1}(t)=e^{-At}$. Άρα,

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\,e^{-At_0}\boldsymbol{x}(t_0)+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-As}\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{g}(s)\mathrm{d}s=$$

$$=e^{A(t-t_0)}\,\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\,\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{g}(s)\mathrm{d}s \qquad (3.29)$$

Παράδειγμα 3.7 Να λυθεί το πρόβλημα της αρχικής τιμής,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\e^{t}\text{συν}2t\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Λύση: Κατ' αρχή βρίσκουμε τον e^{At} με,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του $\boldsymbol{A}$ είναι η $p(\lambda)=(1-\lambda)(\lambda-2\lambda+5)$ άρα οι ιδιοτιμές του $\boldsymbol{A}$ είναι οι $\lambda=1$ και $\lambda_{2,3}=1\pm2\mathrm{i}$. Οι διακεκριμένες ιδιοτιμές θα δώσουν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Για να τα βρούμε λύνουμε τις,

(i) $(\boldsymbol{A}-\mathbf{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$

(ii) $(\boldsymbol{A}\pm(1+2\mathrm{i})\mathbf{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$

Από την (i),

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&-2\\3&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow 2u_1-2u_3=0\Rightarrow u_1=u_3$$

$$3u_1+2u_2=0\Rightarrow u_2=-3/2u_1$$

Επομένως,

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=1 και,

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}$$

είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Από την (ii),

$$\begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως το,

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{A}$ που αντιστοιχεί στην μιγαδική ιδιοτιμή λ=1+2i. Άρα η,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} e^{(1+2\mathrm{i})t}$$

είναι μία μιγαδική λύση της $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$. Τώρα,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} e^{(1+2\mathrm{i})t} = e^{t}(\text{συν}2t + \mathrm{i}\text{ημ}2t)\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= e^{t}\left\{\text{συν}2t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{ημ}2t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} + \mathrm{i}e^{t}\left\{\text{ημ}2t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{συν}2t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Επομένως οι,

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t}\text{συν}2t \\ e^{t}\text{ημ}2t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t}\text{ημ}2t \\ -e^{t}\text{συν}2t \end{bmatrix}$$

είναι δύο πραγματικές λύσεις της $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$. Οι τρεις λύσεις είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητες, αφού οι τιμές τους για $t = 0$ είναι γραμμικά ανεξάτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Άρα ο,

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{t} & 0 & 0 \\ -3e^{t} & e^{t}\text{συν}2t & e^{t}\text{ημ}2t \\ 2e^{t} & e^{t}\text{ημ}2t & -e^{t}\text{συν}2t \end{bmatrix}$$

είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$. Υπολογίζοντας τον,

$$\boldsymbol{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{t} & 0 & 0 \\ -3e^{t} & e^{t}\text{συν}2t & e^{t}\text{ημ}2t \\ 2e^{t} & e^{t}\text{ημ}2t & -e^{t}\text{συν}2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\text{συν}2t+\text{ημ}2t & \text{συν}2t & -\text{ημ}2t \\ 1+\frac{3}{2}\text{ημ}2t-\text{συν}2t & \text{ημ}2t & \text{συν}2t \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At}\int_0^t e^{-s}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\text{συν}2s-\text{ημ}2s & \text{συν}2s & \text{ημ}2s \\ 1-\frac{3}{2}\text{ημ}2s-\text{συν}2s & -\text{ημ}2s & \text{συν}2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{s}\text{συν}2s \end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \text{συν}2t-\text{ημ}2t \\ \text{συν}2t+\text{ημ}2t \end{bmatrix} + e^{At}\int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ \text{ημ}2s\cdot\text{συν}2s \\ \text{συν}^2 2s \end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \text{συν}2t-\text{ημ}2t \\ \text{συν}2t+\text{ημ}2t \end{bmatrix} + e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ (1-\text{συν}4t)/8 \\ t/2+(\text{ημ}4t)/8 \end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \text{συν}2t-\text{ημ}2t \\ \text{συν}2t+\text{ημ}2t \end{bmatrix} + e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{t\text{ημ}2t}{2}+\frac{\text{συν}2t-\text{συν}4t\cdot\text{συν}2t-\text{ημ}4t\cdot\text{ημ}2t}{8} \\ -\frac{t\text{συν}2t}{2}+\frac{\text{ημ}4t\cdot\text{συν}2t-\text{ημ}2t\cdot\text{συν}4t+\text{ημ}2t}{8} \end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \text{συν}2t-\left(1+\frac{1}{2}t\right)\text{ημ}2t \\ \left(1+\frac{1}{2}t\right)\text{συν}2t+\frac{5}{4}\text{ημ}2t \end{bmatrix}$$

Β. Μέθοδος της συνετής εικασίας

Όπως δείχνει το Παράδειγμα 3.7, η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων είναι συχνά κοπιαστική και ανιαρή. Ένας τρόπος να αποφύγουμε πολλές από τις πράξεις της μεθόδου αυτής, είναι να «μαντέψουμε» μία συγκεκριμένη λύση $\psi(t)$ της μη ομογενούς εξίσωσης και στη συνέχεια να παρατηρήσουμε ότι κάθε λύση της μη ομογενούς εξίσωσης πρέπει να είναι της μορφής,

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)$$

όπου $\boldsymbol{\varphi}(t)$ είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης.

Παράδειγμα 3.8 Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}e^{ct}, \quad c\neq 1 \tag{3.30}$$

Λύση: Θα δοκιμάσουμε την συνάρτηση $\boldsymbol{b}e^{ct}$ σαν συγκεκριμένη λύση της (3.30). Αντικαθιστώντας,

$$c\boldsymbol{b}e^{ct}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}e^{ct}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}e^{ct}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι,

$$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{A}-c\mathbf{I})^{-1}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{-1}{(1-c)}\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{2(c-4)}{4+(1-c)^2}\\ \dfrac{1+3c}{4+(1-c)^2}\end{bmatrix}$$

Επομένως κάθε λύση $\boldsymbol{x}$(t) της (3.30) είναι της μορφής,

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{b}e^{ct}$$

όπου, από το Παράδειγμα 3.7,

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{t}\left\{c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\ \text{συν}2t\\ \text{ημ}2t\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\ -\text{ημ}2t\\ \text{συν}2t\end{bmatrix}\right\}$$

Παρατήρηση: Έχουμε πρόβλημα όταν c=1, γιατί η μονάδα είναι ιδιοτιμή του $\boldsymbol{A}$. Γενικότερα, η διαφορική εξίσωση $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}e^{ct}$ μπορεί να μην έχει λύση της μορφής $\boldsymbol{b}e^{ct}$ αν το c είναι ιδιοτιμή του $\boldsymbol{A}$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να δοκιμάσουμε μία συγκεκριμένη λύση της μορφής.

$$\boldsymbol{\psi}(t)=e^{ct}\ [\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1\ +\ \ldots\ +\boldsymbol{b}_{k-1}t^{k-1}]$$

για κάποιον κατάλληλο ακέραιο k.

4 Μετασχηματισμός Laplace

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε μία πολύ διαφορετική μέθοδο για την λύση προβλημάτων αρχικής τιμής, όπως για παράδειγμα του,

$$a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(t);\ \ y(0)=y_0,\ y'(0)=y'_0 \tag{4.1}$$

Η μέθοδος αυτή, που καλείται ***μετασχηματισμός Laplace***, είναι εξαιρετικά χρήσιμη σε δύο περιπτώσεις που ανακύπτουν αρκετά συχνά στις εφαρμογές. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν η $f(t)$ είναι ασυνεχής συνάρτηση και η δεύτερη όταν η $f(t)$ είναι σχεδόν παντού μηδέν εκτός κάποιου μικρού χρονικού διαστήματος που είναι πολύ μεγάλη (δηλαδή κρουστική συνάρτηση). Στην μέθοδο αυτή που θα αναπτύξουμε παρακάτω, η άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ θα αντικατασταθεί με μία νέα συνάρτηση $Y(s)$, το μετασχηματισμό Laplace της $y(t)$, ενώ η $y'(t)$ θα αντικατασταθεί με την $sY(s)-y(0)$. Έτσι η πράξη της παραγώγισης ως προς t θα αντικατασταθεί βασικά με την πράξη του πολλαπλασιασμού με το s. Με τον τρόπο αυτό θα αντικαταστήσουμε το πρόβλημα αρχικής τιμής (4.1) με μία αλγεβρική εξίσωση που μπορούμε να λύσουμε αναλυτικά ως προς $Y(s)$. Όταν βρούμε την $Y(s)$ μπορούμε να συμβουλευθούμε τους πίνακες των ***αντιστρόφων μετασχηματισμών Laplace*** για να επανακτήσουμε την $y(t)$.

4.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Αρχίζουμε με τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace.

Ορισμός 4.1 Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που ορίζεται για $0<t<\infty$. Ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$, που συμβολίζεται με $F(s)$ ή $\mathcal{L}\{f(t)\}$ δίνεται από τον τύπο:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

όπου,

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t = \underset{A\to\infty}{\text{ορ}}\int_0^A e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

Παράδειγμα 4.1 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)=1$.

Λύση: Από την (4.2),

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\underset{A\to\infty}{\text{ορ}}\int_0^A (e^{-st}\cdot 1)\mathrm{d}t = \underset{A\to\infty}{\text{ορ}}\frac{1-e^{-sA}}{s}=\begin{cases}1/s, & s>0\\ \infty, & s\le 0\end{cases}$$

Παράδειγμα 4.2 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)=e^{at}$.

Λύση: Από την (4.2),

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\underset{A\to\infty}{\text{ορ}}\int_0^A e^{-st}e^{at}\mathrm{d}t = \underset{A\to\infty}{\text{ορ}}\frac{e^{(a-s)A}-1}{a-s}=\begin{cases}\dfrac{1}{s-a}, & s>a\\ \infty, & s\le a\end{cases}$$

Παράδειγμα 4.3 Να υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων συνωt, ημωt.

Λύση: Από την (4.2),

$$\mathcal{L}\{\text{συν}\omega t\}=\int_0^\infty e^{-st}\text{συν}\omega t\,\mathrm{d}t \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{\text{ημ}\omega t\}=\int_0^\infty e^{-st}\text{ημ}\omega t\,\mathrm{d}t$$

Παρατηρώντας ότι,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{συν}\omega t\}+\mathrm{i}\mathcal{L}\{\text{ημ}\omega t\}&=\int_0^\infty e^{-st}e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \underset{A\to\infty}{\text{ορ}}\int_0^A e^{(\mathrm{i}\omega-s)}\mathrm{d}t\\ &= \underset{A\to\infty}{\text{ορ}}\frac{e^{(\mathrm{i}\omega-s)A}-1}{\mathrm{i}\omega-s}\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{s-\mathrm{i}\omega}=\dfrac{s+\mathrm{i}\omega}{s^2+\omega^2}, & s>0\\ \text{δεν ορίζεται}, & s\le 0\end{cases}\end{aligned}$$

και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη, παίρνουμε,

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{συν}\,\omega t\} &= \frac{s}{s^2+\omega^2}\\ \mathcal{L}\{\text{ημ}\,\omega t\} &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}\right\}\text{για}\quad s>0$$

Η εξίσωση (4.2) σχετίζει κάθε συνάρτηση $f(t)$ με μία νέα συνάρτηση $F(s)$. Όπως υπονοεί και ο συμβολισμός $\mathcal{L}\{f(t)\}$, ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας τελεστής συναρτήσεων. Επιπλέον είναι ένας γραμμικός τελεστής αφού,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]\mathrm{d}t\\ &= c_1\int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\mathrm{d}t + c_2\int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\mathrm{d}t\\ &= c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ η $f(t)$ ορίζεται στο διάστημα $[0,\infty)$, ο μετασχηματισμός Laplace συνήθως ορίζεται σε διαφορετικό διάστημα. Για παράδειγμα ο μετασχηματισμός Laplace της e^{2t} ορίζεται για $2<s<\infty$, ενώ της e^{8t} για $8<s<\infty$. Αυτό συμβαίνει γιατί το ολοκλήρωμα της (4.2), έχει τιμή γενικά, για αρκετά μεγάλα s.

Μια σοβαρή δυσκολία με τον Ορισμό 4.1 είναι ότι το ολοκλήρωμα μπορεί να μην ορίζεται για καμμιά τιμή του s. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα αν $f(t)=e^{t^2}$. Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace τουλάχιστον σε κάποιο διάστημα $s>s_0$ θέτουμε τους παρακάτω περιορισμούς στην $f(t)$:

(1) Η $f(t)$ πρέπει να είναι τμηματικά συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι η $f(t)$ έχει το πολύ έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε οποιαδήποτε διάστημα $0\le t\le A$, και τα όρια από τα δεξιά και αριστερά υπάρχουν σε κάθε σημείο ασυνέχειας. Με άλλα λόγια η $f(t)$ έχει μόνον έναν πεπερασμένο αριθμόν «ασυνεχειών άλματος» σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα. Η γραφική παράσταση μιας τυπικής τμηματικά συνεχούς συνάρτησης δίνεται στο Σχ. 4.1.

Σχήμα 4.1

(2) Η $f(t)$ πρέπει να είναι εκθετικής τάξης, δηλαδή, να υπάρχουν σταθερές M, c τέτοιες ώστε,

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \qquad 0 \leq t < \infty$$

Λήμμα 4.1 Αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ υπάρχει για όλα τα s που είναι «αρκετά μεγάλα». Ειδικότερα, αν $|f(t)| \leq Me^{ct}$, τότε η $F(s)$ υπάρχει για $s>c$.

Απόδειξη: Αφού η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής το ολοκλήρωμα,

$$\int_0^A e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

υπάρχει για κάθε A. Για να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο για αρκετά μεγάλα s, παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} \int_0^A \left|e^{-st} f(t)\right|\mathrm{d}t &\leq M \int_0^A e^{(c\text{-}s)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{M}{c\text{-}s}\ [e^{(c\text{-}s)A} - 1] \leq \frac{M}{s-c}, \ \ \text{για } s > c \end{aligned}$$

Η πραγματική χρησιμότητα του μετασχηματιστή Laplace στην λύση των διαφορικών εξισώσεων έγκειται στο γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $f'(t)$ έχει στενή σχέση με τον μετασχηματισμό Laplace $f(t)$. Αυτό είναι και το περιεχόμενο του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 4.2 Έστω $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$. Τότε,

$$\mathcal{L}\{ f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\} = sF(s) - f(0)$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathop{\text{ορ}}_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \mathop{\text{ορ}}_{A\to\infty} \left. e^{-st} f(t)\right|_0^A + s \mathop{\text{ορ}}_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= -f(0) + sF(s)$$

(ολοκληρώνοντας κατά μέρη).

Το επόμενο βήμα είναι να συσχετίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $f''(t)$ με αυτόν της $f(t)$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 4.3 Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Τότε, $\mathcal{L}\{ f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2 δύο φορές, έχουμε την απόδειξη.

Όπως η συνάρτηση $F(s)$ μπορεί να εκφρασθεί αναλυτικά ως προς $f(t)$ από τον τύπο,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

το ίδιο και η $f(t)$ μπορεί να εκφρασθεί αναλυτικά ως προς $F(s)$, από κάποια σχέση που συμβολίζουμε με,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Η αντιστροφή όμως της $F(s)$ απαιτεί ολοκλήρωση ως προς μία μιγαδική μεταβλητή και ξεφεύγει έτσι του σκοπού αυτού του συγγράμματος. Στην συνέχεια θα συνάγουμε ορισμένες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που θα μας επιτρέψουν να υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace και τον αντίστροφο του χωρίς την εκτέλεση δύσκολων ολοκληρώσεων.

Ιδιότητα 4.4 Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε,

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$$

Απόδειξη: Παραγωγίζοντας ως προς s και τα δύο μέλη του ορισμού της $F(s)$, έχουμε,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty -te^{-st}f(t)\mathrm{d}t=\mathcal{L}\{-tf(t)\}$$

Η Ιδιότητα 4.4 μας λέει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $-tf(t)$ είναι η παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace της $f(t)$. Έτσι, αν ξέρουμε τον μετασχηματισμό Laplace $F(s)$ της $f(t)$ δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα κουραστικό ολοκλήρωμα αλλά απλώς να παραγωγίσουμε την $F(s)$ και να πολλαπλασιάσουμε με -1.

Παράδειγμα 4.4 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της te^t.

Λύση: Ο μετασχηματισμός Laplace της e^t είναι $1/(s-1)$. Άρα, από την Ιδιότητα 4.4,

$$\mathcal{L}\{te^t\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=\frac{1}{(s-1)^2}$$

Παράδειγμα 4.5 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της t^{13}.

Λύση: Χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα 4.4 δεκατρείς φορές, παίρνουμε,

$$\mathcal{L}\{t^{13}\}=(-1)^{13}\frac{\mathrm{d}^{13}}{\mathrm{d}s^{13}}\mathcal{L}\{1\}=(-1)^{13}\frac{\mathrm{d}^{13}}{\mathrm{d}s^{13}}\left\{\frac{1}{s}\right\}=\frac{(13)!}{s^{14}}$$

Η μεγάλη χρησιμότητα της Ιδιότητας 4.4 φαίνεται στην αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace, όπως δείχνουν και τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.6 Ποιά συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace την $-\dfrac{1}{(s-2)^2}$;

Λύση: Παρατηρούμε ότι,

$$-\frac{1}{(s-2)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\}\ \text{και}\ \frac{1}{s-2}=\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

Επομένως από την Ιδιότητα 4.4,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-2)^2}\right\}=-te^{2t}$$

Παράδειγμα 4.7 Ποιά συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace την $-4s/(s^2+4)^2$;

Λύση: Παρατηρούμε ότι,

$$-\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \text{ και } \frac{2}{s^2+4}=\mathcal{L}\{\eta\mu 2t\}$$

Επομένως,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\}=-t\eta\mu 2t$$

Παράδειγμα 4.8 Ποιά συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace την $1/(s-4)^3$;

Λύση: Παρατηρούμε ότι,

$$\frac{1}{(s-4)^3}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s-4}\right\}$$

Εφαρμόζοντας την Ιδιότητα 4.4 δύο φορές,

$$\frac{1}{(s-4)^3}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2e^{4t}\right\}$$

Ιδιότητα 4.5 Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, τότε $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$.

Απόδειξη: Εξ ορισμού,

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{(a-s)t}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\mathrm{d}t=F(s-a)$$

Παράδειγμα 4.9 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της $e^{3t}\eta\mu t$.

Λύση: Ο μετασχηματισμός Laplace της ημt είναι $1/(s^2+1)$. Επομένως για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace, αρκεί να θέσουμε όπου s το $(s-3)$:

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\eta\mu t\}=\frac{1}{(s-3)^2+1}$$

Παράδειγμα 4.10 Ποιά συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace την,

$$C(s) = \frac{s-7}{25+(s-7)^2}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι, $F(s) = \dfrac{s}{s^2+5^2} = \mathcal{L}\{\text{συν}5t\}$ και ότι η $C(s)$ προκύπτει από την $F(s)$ αν αντικαταστήσουμε το s με $s-7$. Άρα,

$$\frac{s-7}{25+(s-7)^2} = \mathcal{L}\{e^{7t}\text{συν}5t\}$$

Παράδειγμα 4.11 Ποιά συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace την $1/(s^2-4s-9)$;

Λύση: Συμπληρώνοντας το τετράγωνο στον παρονομαστή παίρνουμε,

$$\frac{1}{s^2-4s-9} = \frac{1}{(s-2)^2+5}$$

Τώρα, $\dfrac{1}{s^2+5} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\text{ημ}\sqrt{5}t\right\}$. Επομένως από την Ιδιότητα 4.5,

$$\frac{1}{s^2-4s+9} = \frac{1}{(s-2)^2+5} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}e^{2t}\text{ημ}(\sqrt{5})t\right\}$$

Παράδειγμα 4.12 Ποιά συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace την $s/(s^2-4s+9)$;

Λύση: Παρατηρούμε ότι,

$$\frac{s}{s^2-4s+9} = \frac{s-2}{(s-2)^2+5} + \frac{2}{(s-2)^2+5}$$

Η συνάρτηση $s/(s^2+5)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $\text{συν}(\sqrt{5})t$. Άρα,

$$\frac{s-2}{(s-2)^2+5} = \mathcal{L}\left\{e^{2t}\sigma\upsilon\nu(\sqrt{5})t\right\} \text{ και } \frac{s}{s^2-4s+9} = \mathcal{L}\left\{e^{2t}\text{συν}(\sqrt{5})t + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{2t}\text{ημ}(\sqrt{5})t\right\}$$

Πιο πριν δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας γραμμικός τελεστής, δηλαδή,

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\}=c_1 L\{f_1(t)\}+c_2 L\{f_2(t)\}$$

Η ιδιότητα αυτή μας είναι πολύ χρήσιμη στις περιπτώσεις που θέλουμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace συναρτήσεων που είναι γραμμικοί συνδυασμοί άλλων συναρτήσεων που οι μετασχηματισμοί τους είναι ήδη γνωστοί. Δύο τέτοιες συναρτήσεις που εμφανίζονται πολύ συχνά στην σπουδή των διαφορικών εξισώσεων είναι το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο, που ορίζονται από τους τύπους,

$$\text{συνh}at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}, \ \text{ημh}at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{συνh}at\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right]=\frac{s}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

και,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{ημh}at\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{a}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

4.3 Λύση προβλημάτων αρχικής τιμής με μετασχηματισμούς Laplace

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ανάγουμε την εύρεση της λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής (4.1) στην εύρεση της λύσης μίας αλγεβρικής εξίσωσης. Έστω $Y(s)$ και $F(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των $y(t)$, $f(t)$ αντίστοιχα. Μετασχηματίζοντας και τα δύο μέλη της (4.1) παίρνουμε

$$\mathcal{L}\{ay''(t)+by'(t)+cy(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

ή,

$$a\mathcal{L}\{y''(t)\}+b\mathcal{L}\{y'(t)\}+c\mathcal{L}\{y(t)\}=F(s)$$

λόγω της γραμμικότητας του $\mathcal{L}$. Από τα Λήμματα 4.2, 4.3,

$$a[s^2Y(s)-sy_0-y_0']+b[sY(s)-y_0]+cY(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{(as+b)y_0}{as^2+bs+c}+\frac{ay_0'}{as^2+bs+c}+\frac{F(s)}{as^2+bs+c} \tag{4.3}$$

Η εξίσωση (4.3) μας δίνει τον μετασχηματισμό Laplace της λύσης $y(t)$ της (4.1). Για να βρούμε την $y(t)$ πρέπει να συμβουλευθούμε τους πίνακες των αντιστρόφων μετασχηματισμών Laplace (Πίνακας Π.2 του Παραρτήματος), και να χρησιμοποιήσουμε, πιθανώς, τις Ιδιότητες 4.4, 4.5.

Παράδειγμα 4.13 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=e^{3t}\,,\quad y(0)=1\,,\ y'(0)=0$$

Λύση: Μετασχηματίζοντας και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης,

$$s^2Y(s)-s-3[sY(s)-1]+2Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-3)(s^2-3s+2)}+\frac{s-3}{s^2-3s+2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}+\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} \tag{4.4}$$

Αναπτύσσοντας το πρώτο μέρος του δεξιού μέλους της (4.4) με την μέθοδο των μερικών κλασμάτων, παίρνουμε,

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}$$

Άρα,

$$A(s-2)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s-2)=1$$

Θέτοντας,

$s=1$, παίρνουμε $2A=1 \Rightarrow A=1/2$

$s=2$, παίρνουμε $-B=1 \Rightarrow B=-1$

$s=3$, παίρνουμε $2C=1 \Rightarrow C=1/2$

Παρόμοια βρίσκουμε, $\dfrac{s-3}{(s-1)(s-2)}=\dfrac{2}{s-1}-\dfrac{1}{s-2}$

Άρα,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-3)}+\frac{2}{s-1}-\frac{1}{s-2} \\ &= \frac{5}{2}\frac{1}{(s-1)}-\frac{2}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-3)} \end{aligned}$$

και,

$$y(t)=\frac{5}{2}e^{t}-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$$

Παρατήρηση 1: Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace είναι μία δεδομένη συνάρτηση. Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης,

$$z(t)=\begin{cases} \frac{5}{2}e^{t}-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}, & t\neq 1,\ 2,\ 3 \\ 0, & t=1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

είναι επίσης η $Y(s)$ αφού η $z(t)$ διαφέρει από την $y(t)$ μόνο σε τρία σημεία και είναι γνωστό ότι σ' αυτή την περίπτωση,

$$\int_a^b z(t)\mathrm{d}t=\int_a^b y(t)\mathrm{d}t$$

Όμως υπάρχει μόνο <u>μία</u> συνεχής συνάρτηση $y(t)$ της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace να είναι η $Y(s)$ και μ' αυτή την έννοια γράφουμε $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Παρατήρηση 2 Πρέπει να τονισθεί ότι το Παράδειγμα 4.13 απλά δείχνει την μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace για την λύση προβλημάτων αρχικής τιμής. Η καλύτερη μέθοδος για την λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η μέθοδος της συνετής εικασίας. Αυτό που δεν είναι απόλυτα ικανοποιητικό με την μέθοδο αυτή είναι ότι πρέπει να βρούμε πρώτα την γενική λύση και μετά να υπολογίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 4.14 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 4y = f(t),\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0'$$

Λύση: Μετασχηματίζοντας και τα δύο μέλη, βρίσκουμε,

$$(s^2 Y(s) - s y_0 - y_0') + 4Y(s) = F(s)$$

ή,

$$Y(s) = \frac{s y_0 + y_0'}{s^2 + 4} + \frac{F(s)}{s^2 + 4} \tag{4.5}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, ενώ ο δεύτερος στη λύση της αρχικής εξίσωσης αν $y_0 = y_0' = 0$. Αντιστρέφοντας την (4.5),

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + y_0' \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2+4}\right\} \\ &= y_0 \text{συν} 2t + \tfrac{1}{2} y_0' \text{ημ} 2t + y_f(t) \end{aligned}$$

όπου, $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s^2+4}\right\}$.

4.4 Λύση συστημάτων με μετασχηματισμούς Laplace

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την λύση του προβλήματος αρχικής τιμής,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{4.6}$$

Έστω,

$$\boldsymbol{x}(s)=\begin{bmatrix} x_1(s) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(s) \end{bmatrix}=\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}(t)\} \;=\begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st}x_1(t)\mathrm{d}t \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \int_0^\infty e^{-st}x_n(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

και,

$$\boldsymbol{f}(s)=\begin{bmatrix} f_1(s) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(s) \end{bmatrix}=\mathcal{L}\{\boldsymbol{f}(t)\}=\begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\mathrm{d}t \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \int_0^\infty e^{-st}f_n(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

Μετασχηματίζοντας και τα δύο μέλη της (4.6), έχουμε,

$$\mathcal{L}\{\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\}=\mathcal{L}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(t)\}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(s)$$

Επίσης,

$$\mathcal{L}\{\dot{\boldsymbol{x}}(t)\}=\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{\dot{x}_1(t)\} \\ . \\ . \\ . \\ \mathcal{L}\{\dot{x}_n(t)\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sx_1(s)-x_1(0) \\ . \\ . \\ . \\ sx_n(s)-x_n(0) \end{bmatrix}=s\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{x}_0$$

Επομένως,

$$s\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(s)\;\Rightarrow(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(s)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}(s) = (s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}[\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(s)] \tag{4.7}$$

Η εξίσωση (4.7) είναι ένα σύστημα n εξισώσεων ως προς $x_1(s)$, ..., $x_n(s)$ που μπορεί να λυθεί με διάφορους τρόπους. Βρίσκοντας τις $x_i(s)$ μπορούμε μετά να υπολογίσουμε τις $x_i(t)$ χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα 4.15 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Λύση: Μετασχηματίζοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε,

$$s\boldsymbol{x}(s) - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(s) + \frac{1}{s-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ή,

$$\begin{bmatrix} s\,x_1(s) - 2 \\ s\,x_2(s) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(s) + 4x_2(s) \\ x_1(s) + x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} \\ \dfrac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(s)(s-1) - 4x_2(s) = \dfrac{1}{s-1} + 2 \\ x_2(s)(s-1) - x_1(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1 \end{cases}$$

Η λύση των εξισώσεων αυτών είναι,

$$x_1(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{1}{s^2-1},\quad x_2(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{s}{(s-1)(s+1)(s-3)}$$

Τώρα, $\dfrac{2}{s-3} = \mathcal{L}\{2e^{3t}\}$ και $\dfrac{1}{s^2-1} = \mathcal{L}\{\text{ημh}t\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right\}$

Άρα,

$$x_1(t)=2e^{3t}+\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

Για την αντιστροφή του $x_2(s)$ αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s}{(s-1)(s+1)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}$$

Η εξίσωση αυτή ικανοποιείται για A=–1/4, B=–1/8, C=3/8. Επομένως,

$$x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{8}\frac{1}{s+1}+\frac{11}{8}\frac{1}{s-3}\right\}=-\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{11}{8}e^{3t}$$

Τελικά,

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}e^{t}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{8}\end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix}2\\\frac{11}{8}\end{bmatrix}e^{3t}$$

5 Εξισώσεις διαφορών

5.1 Εισαγωγή

Οι εξισώσεις διαφορών εμφανίζονται σε πολλούς τομείς των επιστημών, ιδιαίτερα όμως στα ψηφιακά συστήματα και γενικά σε συστήματα που μπορούν να ορισθούν σε διακεκριμένο χρόνο σε αντίθεση με τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν συστήματα που ορίζονται στον συνεχή χρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε επιγραμματικά με την επίλυση εξισώσεων διαφορών και συγκεκριμένα με τις γραμμικές εξισώσεις διαφορών.

Πιο συγκεκριμένα έστω $y(n)$ μία συνάρτηση που ορίζεται σε ένα σύνολο ακεραίων $\mathbb{I}$.

Οι τιμές $y(n)$ μπορούν να είναι πραγματικές ή μιγαδικές. Μία ***εξίσωση διαφορών τάξης N*** είναι μία σχέση μεταξύ των $y(n)$, $y(n+1)$, ..., $y(n+N)$. Μερικές απλές εξισώσεις διαφορών είναι οι,

$$y(n+1)-y(n)=1 \tag{5.1}$$

$$y(n+1)-y(n)=n \tag{5.2}$$

$$y(n+1)-(n+1)y(n)=0 \tag{5.3}$$

$$y(n+1)-2\text{συν}\gamma\cdot y(n+1)+y(n)=0 \tag{5.4}$$

Σαν λύση μίας εξίσωσης διαφορών εννοούμε μία ακολουθία τιμών που ορίζονται σε ένα σύνολο ακεραίων $\mathbb{I}$ και οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών. Οι λύσεις των (5.1)-(5.4) μπορεί να δειχτεί ότι είναι οι,

$$y(n)=n+c\,,\quad \text{όπου } c \text{ σταθερά, } n \text{ ακέραιος}$$

$$y(n)=\frac{n(n-1)}{2},\quad \text{όπου } n \text{ θετικός ακέραιος}$$

$$y(n)=n!\,,\qquad \text{» »}$$

$$y(n)=\text{συν}n\gamma\,,\qquad \text{» »}$$

5.2 Γραμμικές ομογενείς εξισώσεις διαφορών τάξης *N*

Μία εξίσωση διαφορών ονομάζεται ***γραμμική*** αν οι άγνωστες συναρτήσεις $y(n+k),\ k=0,\ \ldots,\ N$, εμφανίζονται γραμμικά στην εξίσωση. Η γενική μορφή της γραμμικής ***μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών τάξης N*** είναι,

$$y(n+N)+a_{N-1}(n)y(n+N-1)+\ldots+a_0(n)y(n)=b(n) \tag{5.5}$$

όπου τα a_i, b μπορεί να είναι συναρτήσεις του n αλλά όχι του y.

Οι εξισώσεις (5.1)-(5.4) είναι όλες γραμμικές. Ακολουθώντας την λογική της εύρεσης λύσεων σε στάδια αυξανομένης δυσκολίας, θα θεωρήσουμε κατ' αρχή την ομογενή γραμμική εξίσωση διαφορών τάξης N με σταθερούς συντελεστές. Η γενική της μορφή είναι,

$$y(n+N)+a_{N-1}y(n+N-1)+\ldots+a_0y(n)=0 \tag{5.6}$$

Για να λύσουμε την (5.6), υποθέτουμε μία λύση της μορφής $y(n)=b^n$ (συνετή εικασία). Αντικαθιστώντας στην (5.6) παίρνουμε,

$$b^{n+N}+a_{N-1}b^{n+N-1}+\ldots+a_0b^n=0$$

Διαιρώντας με b^n,

$$b^N+a_{N-1}b^{N-1}+\ldots+a_0=0=p(b) \tag{5.7}$$

Η (5.7) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού N. Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι οι ρίζες του, $b_i, i=1,\ldots,n$, είναι όλες διακεκριμένες. Τότε οι συναρτήσεις $b_i^n, i=1,\ldots,n$ είναι όλες λύσεις της (5.7) και εξαιτίας της γραμμικότητας και η συνάρτηση,

$$y(n)=c_1b_1^n+c_2b_2^n+\ldots+c_Nb_N^n \tag{5.8}$$

για αυθαίρετες σταθερές $c_i, i=1,\ldots,n$, είναι επίσης λύση της (5.7). Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί στην περίπτωση αυτή ότι η (5.8) είναι η γενική λύση της (5.6).

Παράδειγμα 5.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών,

$$y(n+3)-2y(n+2)-y(n+1)+2y(n)=0$$

Λύση: Η εξίσωση αυτή είναι τρίτης τάξης και επομένως η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι $b^3-2b^2-b+2=0$. Οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού είναι $b_1=1, b_2=-1, b_3=2$. Άρα η γενική λύση είναι,

$$y(n)=c_1(1)^n+c_2(-1)^n+c_3(2)^n=c_1+(-1)^n c_2+2^n c_3$$

Αν μας δοθούν οι πρώτες $N-1$ τιμές της $y(n)$ τότε μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικής τιμής που προκύπτει από την εξίσωση διαφορών και τις αρχικές τιμές της λύσης της.

Παράδειγμα 5.2 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής,

$$y(n+3)-2y(n+2)-y(n+1)+2y(n)=0,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1,\quad y(2)=1$$

Λύση: Από το Παρ. 5.1, η γενική λύση είναι,

$$y(n)=c_1+(-1)^n c_2+2^n c_3$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές, παίρνουμε,

$$\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0\\ c_1-c_2+2c_3&=1\\ c_1+c_2+4c_3&=1 \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό ικανοποιείται αν $c_1=0, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=\frac{1}{3}$, άρα η συγκεκριμένη λύση είναι η,

$$y(n)=-\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2^n}{3}$$

Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (5.7) έχει ένα ζευγάρι συζυγών μιγαδικών λύσεων μπορούμε πάλι να εκφράσουμε την λύση σε πραγματική μορφή. Αν $b_1=x+\mathrm{i}y$ και $b_2=x-\mathrm{i}y$, γράφουμε τα b_1, b_2 σε πολική μορφή,

$$\begin{aligned} b_1&=re^{\mathrm{i}\vartheta}\\ b_2&=re^{-\mathrm{i}\vartheta} \end{aligned}$$

όπου $r=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}, \theta=\text{τοξεφ}\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Τώρα, $b_1^n=r^n e^{in\vartheta}=r^n(\text{συν}n\theta+\text{i ημ}n\theta)$. Αντικαθιστώντας στην (5.6) παίρνουμε,

$$r^{n+N}\left(\text{συν}(n+N)\theta+\text{iημ}(n+N)\theta\right)+\ldots+a_0 r^n\left(\text{συν}n\theta+\text{iημ}n\theta\right)=0$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και μιγαδικά μέρη με μηδέν, βλέπουμε ότι και το πραγματικό και το μιγαδικό μέρος του b, ικανοποιούν την (5.6). Άρα δύο πραγματικές λύσεις που αντιστοιχούν στο συζυγές μιγαδικό ζευγάρι b_1, b_2 είναι οι,

$$c_1 r^n \text{συν}n\theta,\quad c_2 r^n \text{ημ}n\theta$$

Παράδειγμα 5.3 Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $y(n+2)-2y(n+1)+2y(n)=0$.

Λύση: Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι $b^2-2b+2=0$, με ρίζες b_1=1+i, b_2=1–i. Άρα $r=(1+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}, \theta=\text{τοξεφ}\left(\dfrac{1}{1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. Οι δύο πραγματικές λύσεις που αντιστοιχούν στην μιγαδική ρίζα είναι,

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \text{συν}\frac{n\pi}{4}, \left(\sqrt{2}\right)^n \text{ημ}\frac{n\pi}{4}$$

και επομένως η γενική λύση είναι $y(n)=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[c_1\text{συν}\dfrac{n\pi}{4}+c_2\text{ημ}\dfrac{n\pi}{4}\right]$.

Αν b_1 είναι μία διπλή πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.7), τότε μία δεύτερη είναι η nb_1^n. Για να το εξακριβώσουμε αυτό, αντικαθιστούμε την nb_1^n στην (5.6) και παίρνουμε,

$$\begin{aligned}&(n+N)b_1^{n+N}+a_{N-1}(n+N-1)b_1^{n+N-1}+\ldots+a_0 n b_1^n\\&=b_1^n\left[n\left(b_1^N+a_{N-1}b_1^{N-1}+\ldots+a_0\right)+b_1\left(Nb_1^{N-1}+a_{N-1}(N-1)b_1^{N-2}+\ldots+a_1\right)\right]\\&=b_1^n\left[np(b_1)+b_1\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}b}\right|_{b=b_1}\right]=0\end{aligned}$$

αφού $p(b_1)$ και $\left.\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}b}\right|_{b=b_1}$ είναι 0.

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι οι δύο αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες (αφού για να ισχύει $c_1 + nc_2 = 0$ για κάθε n πρέπει $c_1 = c_2 = 0$).

Προχωρώντας επαγωγικά, αν p_1 είναι κάποια πραγματική ρίζα πολλαπλότητας $k \leq n$, τότε k γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (5.7) είναι οι,

$$b_1^n, nb_1^n, n^2 b_1^n, \ldots, n^{k-1} b_1^n$$

Τέλος αν b_1 είναι κάποια μιγαδική ρίζα πολλαπλότητας $2k \leq n$, $2k$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (5.7) είναι οι,

$$r^n \text{συν} n\theta,\ \ nr^n \text{συν} n\theta,\ \ \ldots,\ \ n^{k-1} r^n \text{συν} n\theta,\ \ r^n \text{ημ} n\theta,\ \ nr^n \text{ημ} n\theta,\ \ \ldots,\ \ n^{k-1} r^n \text{ημ} n\theta$$

όπου $b_1 = x \pm \mathrm{i}y, r = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}, \theta = \text{τοξεφ}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Η σύνοψη των προηγουμένων αποτελεσμάτων φαίνεται στον Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1

Είδος ρίζας	Συμμετοχή στη λύση
1. Απλή ρίζα b.	$c_1 b^n$
2. Απλή μιγαδική ρίζα $b = x \pm \mathrm{i}y$.	$r^n \left(c_1 \text{συν} n\theta + c_2 \text{ημ} n\theta\right)$ $r = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}, \theta = \text{τοξεφ}\left(\dfrac{y}{x}\right)$
3. Πραγματική ρίζα b πολλαπλότητας k.	$b^n \left[c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \ldots + c_k\right]$
4. Μιγαδική ρίζα $b = x \pm \mathrm{i}y$ πολλαπλότητας k.	$r^n \begin{Bmatrix} \left[c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \ldots + c_k\right] \text{συν} n\theta + \\ \left[c_{\kappa+1} n^{k-1} + c_{\kappa+2} n^{k-2} + \ldots + c_{2k}\right] \text{ημ} n\theta \end{Bmatrix}$

Παράδειγμα 5.4 Να λυθεί η εξίσωση διαφορών,

$$y(n+3) - 5y(n+2) + 8y(n+1) - 4y(n) = 0$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $b^3 - 5b^2 + 8b - 4 = (b-1)(b-2)^2 = 0$. Άρα $b_1 = 1, b_2 = 2$ (διπλή) και η γενική λύση είναι της μορφής,

$$y(n) = c_1 (1)^n + c_2 \left(2^n\right) + nc_3 \left(2^n\right) = c_1 + 2^n \left(c_2 + nc_3\right)$$

5.3 Η μη ομογενής εξίσωση

Ας θεωρήσουμε τώρα την μη ομογενή γραμμική εξίσωση διαφορών τάξης N. Η γενική της μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$y(n+N)+a_{N-1}y(n+N-1)+\ldots+a_0y(n)=b(n) \tag{5.9}$$

Θα παρουσιάσουμε δύο μεθόδους για την λύση της (5.9). Και οι δύο απαιτούν κατ' αρχάς τη λύση της αντίστοιχης ομογενούς, και βασίζονται στο γεγονός ότι η γενική λύση της (5.9) είναι της μορφής,

$$y(n)=\varphi(n)+\psi(n) \tag{5.10}$$

όπου $\varphi(n)$ είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς και $\psi(n)$ μία συγκεκριμένη λύση της (5.9). Επομένως, όπως και στις διαφορικές εξισώσεις, η λύση της (5.9) ανάγεται στην εύρεση κάποιας συγκεκριμένης λύσης της.

Α. Η μέθοδος της συνετής εικασίας

Είναι γνωστό από τις μεθόδους λύσεων των διαφορικών εξισώσεων, ότι η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη όταν η συνάρτηση $b(n)$ του δεξιού μέλους της (5.9) έχει κάποια συγκεκριμένη μορφή και συνίσταται στην εικασία κάποιας συνάρτησης που φαίνεται να ικανοποιεί την (5.9). Στον Πίνακα 5.2 παρατίθενται συνοπτικά οι συναρτήσεις $\psi(n)$ που μπορούμε να δοκιμάσουμε για διαφορετικούς όρους που πιθανόν να περιέχονται στην συνάρτηση $b(n)$. Τα A, B, A_i είναι σταθερές που πρέπει να υπολογιστούν.

Πίνακας 5.2

Όροι του $b(n)$	Δοκιμαστικές λύσεις $\psi(n)$
1. b^n	Ab^n
2. $\eta\mu(an)$ ή $\sigma\upsilon\nu(an)$	$A\sigma\upsilon\nu(an)+B\eta\mu(an)$
3. $\sum_{j=0}^{m} c_j n^j$	$\sum_{j=0}^{m} A_j n^j$
4. $b^n \sum_{j=0}^{m} c_j n^j$	$b^n \sum_{j=0}^{m} A_j n^j$
5. $b^n\eta\mu(an)$ ή $b^n\sigma\upsilon\nu(an)$	$b^n\{A\sigma\upsilon\nu(an)+B\eta\mu(an)\}$

Παράδειγμα 5.5 Να δειχθεί ότι η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών,

$$y(n+2)-\left(2+h^2\right)y(n+1)+y(n)=h^2, h>0$$

είναι της μορφής $y(n)=c_1\left[1+h+\dfrac{h^2}{2}+O\left(h^3\right)\right]^n+c_2\left[1-h+\dfrac{h^2}{2}+O\left(h^3\right)\right]^n-1$.

Λύση: Εδώ $b(n)=h^2$, επομένως δοκιμάζουμε μία συγκεκριμένη λύση της μορφής, $\psi(n)=Ab^0=A$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε,

$$A-A\left(2+h^2\right)+A=h^2 \text{ ή } -Ah^2=h^2 \Rightarrow A=-1$$

Άρα μία συγκεκριμένη λύση είναι η $\psi(n)=-1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η,

$$p(b)=b^2-\left(2+h^2\right)b+1=0$$

με ρίζες,

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{2+h^2\pm\left(4h^2+h^4\right)^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{2+h^2\pm h\left(4+h^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= 1+\frac{h^2}{2}\pm h\left(1+\frac{h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας την ρίζα με βάση τον διωνυμικό τύπο,

$$b_{1,2}=1+\frac{h^2}{2}\pm h\left[1+\frac{h^2}{8}+O\left(h^4\right)\right]$$

$$\Rightarrow b_1=1+h+\frac{h^2}{2}+O\left(h^3\right),\; b_2=1-h+\frac{h^2}{2}+O\left(h^3\right)$$

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι,

$$\varphi(n)=cb_1^n+c_2b_2^n$$

και η γενική λύση,

$$y(n)=c_1\left[1+h+\frac{h^2}{2}+O\left(h^3\right)\right]^n+c_2\left[1-h+\frac{h^2}{2}+O\left(h^3\right)\right]^n-1$$

Παράδειγμα 5.6 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών,

$$y(n+2)-6y(n+1)+8y(n)=3n^2+2n-5\cdot 3^n$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η,

$$p(b)=b^2-6b+8=0$$

με ρίζες τις $b_1=2, b_2=4$. Άρα η γενική της λύση είναι της μορφής,

$$\varphi(n)=c_1 2^n+c_2 4^n$$

Σύμφωνα τώρα με τον Πίνακα 5.2 δοκιμάζουμε μία συγκεκριμένη λύση της μορφής,

$$\psi(n)=A_1n^2+A_2n+A_3+A_4 3^n$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε,

$$\begin{aligned}
y(n+2)-6y(n+1)+8y(n)= \; & A_1(n+2)^2+A_2(n+2)+A_3+A_4 3^{n+2} \\
& -6\left\{A_1(n+1)^2+A_2(n+1)+A_3+A_4 3^{n+1}\right\} \\
& +8\left\{A_1n^2+A_2n+A_3+A_4 3^n\right\} \\
& =A_1n^2+4A_1n+4A_1+A_2n+2A_2+A_3+9A_4 3^n \\
& -6A_1n^2-12A_1n-6A_2n-6A_2-6A_3-18A_4 3^n \\
& +8A_1n^2+8A_2n+8A_3+8A_4 3^n \\
\Rightarrow 3n^2+2n-5.3^n = \; & 3A_1n^2+(3A_2-8A_1)n+(3A_3-4A_2-2A_1)-A_4 3^n
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοίων δυνάμεων του n,

$$\begin{aligned}
3A_1&=3\\
3A_2-8A_1&=2\\
3A_3-4A_2-2A_1&=0\\
-5&=-A_4
\end{aligned}$$

Άρα $A_1 = 1,\ A_2 = \frac{8}{3},\ A_3 = \frac{44}{9},\ A_4 = 5$ και η συγκεκριμένη λύση είναι η,

$$\psi(n) = n^2 + \frac{8n}{3} + \frac{44}{9} + 5.3^n$$

Προσθέτοντάς την στη λύση της ομογενούς, παίρνουμε τελικά,

$$y(n) = c_1 2^n + c_2 4^n + n^2 + \frac{8n}{3} + \frac{44}{9} + 5.3^n$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος που περιγράψαμε παραπάνω δεν οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα αν η συγκεκριμένη λύση περιέχει όρους της ομογενούς λύσης. Στην περίπτωση αυτή η συγκεκριμένη λύση πρέπει να πολλαπλασιασθεί με κάποια θετική ακέραια δύναμη του n, μεγέθους τέτοιου ώστε κανένας όρος της νέας συγκεκριμένης λύσης να μην εμφανίζεται στην ομογενή λύση.

Παράδειγμα 5.7 Να βρεθεί μία δοκιμαστική λύση για την,

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 3n^2 + 2 - 5 \cdot 2^n$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Παρ. 5.6, $\varphi(n) = c_1 2^n + c_2 4^n$. Στη περίπτωση αυτή όμως δεν μπορούμε να δοκιμάσουμε την,

$$\psi(n) = A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 2^n$$

αφού ο όρος 2^n περιέχεται στην λύση της ομογενούς. Σύμφωνα λοιπόν με τη προηγούμενη παρατήρηση, δοκιμάζουμε την,

$$\psi(n) = A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 n 2^n$$

Β. Μεταβολή των παραμέτρων

Η μέθοδος αυτή, όπως και η προηγούμενη, απαιτεί τον υπολογισμό των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς, μας επιτρέπει όμως να βρούμε τη γενική λύση απευθείας και όχι σαν το άθροισμα δύο λύσεων.

Η λύση της ομογενούς εκφράζεται σαν,

$$\phi(n) = \sum_{j=1}^{N} c_j v_j(n) \tag{5.11}$$

όπου τα $v_j(n), j = 1,...,N$ περιλαμβάνουν την αντίστοιχη ρίζα b υψωμένη στην νιοστή δύναμη όπως και τις δυνάμεις του n που πρέπει να πολλαπλασιάσουν την b^N στην περίπτωση πολλαπλών ριζών. Τα c_j, j=1, …, N είναι σταθερές. Τώρα υποθέτουμε ότι η γενική λύση της (5.9) είναι της μορφής,

$$y(n) = \sum_{j=1}^{N} A_j(n) v_j(n) \tag{5.12}$$

όπου τα $A_j(n)$, j=1, …, N είναι συναρτήσεις του n που πρέπει να υπολογισθούν. Στη περίπτωση αυτή ο ακόλουθος αλγόριθμος μας δίνει τις ζητούμενες συναρτήσεις:

(α) Σχηματίζουμε τους πίνακες,

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_1(n+1) & v_2(n+1) & \dots & v_N(n+1) \\ v_1(n+2) & v_2(n+2) & \dots & v_N(n+2) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ v_1(n+N) & v_2(n+N) & \dots & v_N(n+N) \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \Delta A_1(n) \\ \Delta A_2(n) \\ . \\ . \\ . \\ \Delta A_N(n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ b(n) \end{bmatrix}$$

Οι τρεις αυτοί πίνακες ικανοποιούν την σχέση,

$$\boldsymbol{V} \cdot \Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f} \tag{5.13}$$

(β) Υπολογίζουμε το διάνυσμα ***ΔΑ*** που δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{f}$$

Ειδικότερα,

$$\Delta A_j(n) = v_{jN}^{-1} \cdot b(n)$$

όπου v_{jN}^{-1} είναι το στοιχείο της j γραμμής και N στήλης του $\boldsymbol{V}^{-1}$.

(γ) Υπολογίζουμε τα $A_j(n), j=1,\ldots,N$ από τις σχέσεις:

$$A_j(n)=A_j(0)+\sum_{m=0}^{n-1}\Delta A_j(m), j=1,\ldots,N \tag{5.14}$$

Η γενική λύση βρίσκεται τελικά αντικαθιστώντας την (5.14) στην (5.12).

Παράδειγμα 5.8 Να λυθεί με την μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων η εξίσωση διαφορών $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=n^2$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες $b_1=2, b_2=3$, άρα ζητάμε γενική λύση της μορφής,

$$y(n)=A_1(n)2^n+A_2(n)3^n$$

Η (5.13) γίνεται,

$$\begin{bmatrix}2^{n+1} & 3^{n+1}\\ 2^{n+2} & 3^{n+2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta A_1(n)\\ \Delta A_2(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ n^2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta A_1(n)\\ \Delta A_2(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\cdot n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{3}\cdot n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{bmatrix}$$

Τώρα, από την (5.14),

$$\begin{aligned}A_1(n)&=A_1(0)+\sum_{m=0}^{n-1}\Delta A_1(m)\\ &=A_1(0)-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}m^2\left(\frac{1}{2}\right)^m\end{aligned} \tag{5.15}$$

Ο δεύτερος προσθεταίος είναι της μορφής $\sum_{i=0}^{n}i^2a^i$, που υπολογίζεται ως,

$$\sum_{i=0}^{n}i^2a^i=\frac{(a-1)^2(n+1)^2a^{n+1}-2(a-1)(n+1)a^{n+3}+a^{n+3}-a^2+a^{n+2}-a}{(a-1)^3}, a\neq 1 \tag{5.16}$$

Χρησιμοποιώντας το τύπο αυτό, η (5.15) γίνεται,

$$\begin{aligned} A_1(n) &= A_1(0)+4\left[\frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \\ &= \left[A_1(0)-3\right]+\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[n^2+2n+3\right] \\ &= c_1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[n^2+2n+3\right] \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι παρόμοια βρίσκουμε,

$$A_2(n)=c_2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left[n^2+n+1\right].$$

Έτσι τελικά,

$$y(n)=c_1 2^n+c_2 3^n+\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}$$

5.4 Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (ζήτα)

5.4.1 Γενικά περί μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ έχει την ίδια σημασία και παίζει τον ίδιο ρόλο για τα διακριτά σήματα και συστήματα (εξισώσεις διαφορών) όπως ο μετασχηματισμός Laplace για τα συνεχή σήματα και συστήματα (διαφορικές εξισώσεις).

Ο (***αμφίπλευρος***) ***μετασχηματισμός*** $\mathcal{Z}$ μιας διακριτής συνάρτησης $f(k)$ συμβολίζεται με $F(z)$ και ορίζεται ως εξής:

$$F(z)=\mathcal{Z}\left[f(k)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k} \tag{5.17}$$

Αν η διακριτή συνάρτηση $f(k)$ είναι αιτιακή, δηλαδή $f(k)=0$ για $k<0$, τότε ο ορισμός

(5.17) γίνεται,

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \tag{5.18}$$

Στην πράξη πολλές φορές η διακριτή συνάρτηση $f(k)$ παράγεται από μία συνεχή συνάρτηση $f(t)$. Η μετατροπή της $f(t)$ στην $f(k) = f^*(t) = f(nT)$, όπου T είναι η χρονική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών της $f(k)$, γίνεται με ένα δειγματολήπτη. Ο δειγματολήπτης είναι ουσιαστικά ένας διακόπτης που κλείνει στιγμιαία με συχνότητα $f_s=1/T$. Έτσι, η έξοδος του $f^*(t)$ είναι μία διακριτή συνάρτηση με πλάτος ίσο με το πλάτος της $f(t)$ στα χρονικά σημεία nT, n=0, 1, 2, ...

Ισχύει το παρακάτω ***Θεώρημα του Shannon*** σχετικά με τη συχνότητα δειγματοληψίας $f_s=1/T$.

Θεώρημα 5.1 Έστω f_1 η μεγαλύτερη συχνότητα του φάσματος συχνοτήτων της $f(t)$. Τότε, για να είναι δυνατή η αναπαραγωγή της $f(t)$ από την $f^*(t)$ θα πρέπει $f_s \geq 2 f_1$.

Ο ***αντίστροφος μετασχηματισμός*** $\mathcal{Z}$ μιας συναρτήσεως $F(z)$ συμβολίζεται $f(nT)$ και ορίζεται ως εξής,

$$f(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z \tag{5.19}$$

και,

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

Παρατήρηση: Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δεν είναι μονοσήμαντος. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός συνεχών συναρτήσεων $f(t)$ που μπορούν να έχουν την ίδια $f^*(t)$ αλλά να έχουν διαφορετικές μορφές για τις τιμές $t \neq nT$. Επομένως, στη γενική περίπτωση,

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f^*(t) \neq f(t)$$

Αντίθετα, ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ όλων των $f(t)$ που έχουν την ίδια $f^*(t)$ θα είναι ο ίδιος, δηλαδή,

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{Z}[f^*(t)]$$

5.4.2 Ιδιότητες και θεωρήματα μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

1. ***Γραμμικότητα***. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, δηλαδή ισχύει η σχέση,

$$\mathcal{Z}[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]=c_1\mathcal{Z}[f_1(t)]+c_2\mathcal{Z}[f_2(t)]=c_1F_1(z)+c_2F_2(z)$$

όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές και $F_i(z)=\mathcal{Z}[f_i(t)],\ \ i=1,\ \ 2$.

Απόδειξη: Αν εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$, θα έχουμε:

$$\mathcal{Z}[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]=\mathcal{Z}\left[c_1 f_1^{*}(t)+c_2 f_2^{*}(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_1 f_1(nT)z^{-n}+c_2 f_2(nT)z^{-n}\right]$$

$$=c_1\sum_{n=0}^{\infty}f_1(nT)z^{-n}+c_2\sum_{n=0}^{\infty}f_2(nT)z^{-n}=c_1F_1(z)+c_2F_2(z)$$

2. ***Μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου***. Οι διακριτές συναρτήσεις $f(nT-kT)$ και $f(nT+kT)$ προέρχονται από τη συνάρτηση $f(nT)$ όταν αυτή μετατοπισθεί κατά kT μονάδες δεξιά και αριστερά του σημείου nT, αντίστοιχα. Από τον ορισμό έχουμε:

α.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(nT-kT)]&=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT-kT)z^{-n}=\sum_{m=-k}^{\infty}f(nT)z^{-m}z^{-k}\\&=z^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}f(mT)z^{-m}+z^{-k}\sum_{m=-k}^{-1}f(mT)z^{-m}\\&=z^{-k}F(z)+\sum_{m=-k}^{-1}f(mT)z^{-(k+m)}\end{aligned}$$

β.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(nT-kT)u(nT-kT)]&=\sum_{n=0}^{\infty}f[(n-k)T]u[(n-k)T]z^{-n}=\\&=z^{-k}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f[(n-k)T]u[(n-k)T]z^{-(n-k)}\right]\end{aligned}$$

$$= z^{-k} \sum_{m=-k}^{\infty} f(mT)u(mT)z^{-m}$$

$$= z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m}$$

$$= z^{-k} F(z)$$

γ.

$$\mathcal{Z}[f(nT+kT)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+kT)z^{-n}$$

$$= z^{k}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f[(n+k)T]z^{-(n+k)}\right]$$

$$= z^{k}\left[\sum_{m=k}^{\infty} f[mT]z^{-m}\right]$$

$$= z^{k}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT)z^{-m}\right]$$

$$= z^{k}\left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT)z^{-m}\right]$$

$$= z^{k}\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT)z^{-n}\right]$$

(όπου στο τελευταίο βήμα ετέθη m=n).

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι απλές ειδικές περιπτώσεις:

$$\mathcal{Z}[f(t+T)] = zF(z) - zf(0) \tag{5.20}$$

$$\mathcal{Z}[f(t+2T)] = z^2F(z) - z^2 f(0) - zf(T) \tag{5.21}$$

$$\mathcal{Z}[f(t-T)] = z^{-1}F(z) + f(-T) \tag{5.22}$$

$$\mathcal{Z}[f(t-2T)] = z^{-2}F(z) + z^{-1}f(-T) + f(-2T) \tag{5.23}$$

Οι σχέσεις (5.20)-(5.23) είναι ανάλογες προς τις σχέσεις του μετασχηματισμού

Laplace συνεχών συναρτήσεων.

3. ***Συνέλιξη δύο διακριτών συναρτήσεων***. Έστω οι διακριτές αιτιακές συναρτήσεις $f(nT)$ και $h(nT)$. Η συνέλιξη των δύο συναρτήσεων συμβολίζεται με $y(nT)=f(nT)*h(nT)$ και ορίζεται ως εξής:

$$y(nT)=f(nT)*h(nT)=\sum_{i=0}^{\infty}f(iT)h(nT-iT)=\sum_{i=0}^{\infty}h(iT)f(nT-iT)$$

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της $y(nT)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[y(nT)] &= Y(z)=z[f(nT)*h(nT)] \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{\infty}f(iT)h(nT-iT)\right]z^{-n} \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{\infty}h(iT)f(nT-iT)\right]z^{-n}
\end{aligned}$$

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά των αθροισμάτων θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
Y(z) &=\sum_{i=0}^{\infty}h(iT)\sum_{n=0}^{\infty}f(nT-iT)z^{-n}=\sum_{i=0}^{\infty}h(iT)z^{-i}\sum_{n=0}^{\infty}f(nT-iT)z^{-(n-i)} \\
&=\left[\sum_{i=0}^{\infty}h(iT)z^{-i}\right]\cdot\left[\sum_{m=-1}^{\infty}f(mT)z^{-m}\right]
\end{aligned}$$

Επειδή η $f(mT)$ είναι αιτιακή συνάρτηση, δηλαδή $f(mT)=0$ για $m<0$, έπεται ότι:

$$Y(z)=\left[\sum_{i=0}^{\infty}h(iT)z^{-i}\right]\cdot\left[\sum_{m=0}^{\infty}f(mT)z^{-m}\right]=H(z)F(z) \tag{5.24}$$

4. ***Το Θεώρημα της αρχικής τιμής***. Ισχύει $f(0)=\underset{z\to\infty}{\text{ορ}}\,F(z)$.

Απόδειξη: Έχουμε,

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}=f(0)+f(nT)z^{-1}+f(nT)z^{-2}+\ldots$$

Επομένως, $\underset{z\to\infty}{\text{ορ}}\,F(z)=f(0)$.

5. ***Το Θεώρημα της τελικής τιμής***. Ισχύει $\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\, f(nT) = \underset{z\to 1}{\text{ορ}}(z-1)F(z)$.

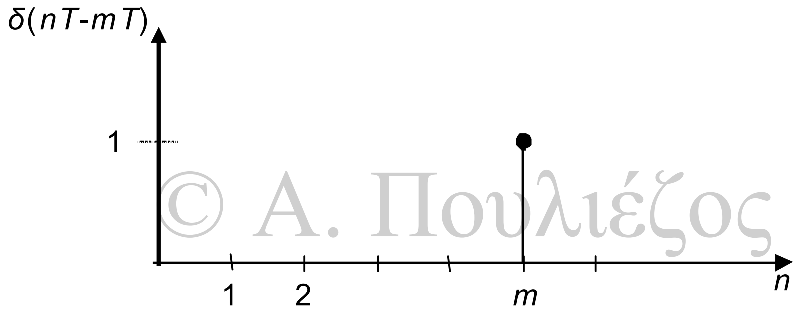
Η απόδειξη παραλείπεται.

Οι προηγούμενες ιδιότητες και θεωρήματα συνοψίζονται στο Πίνακα Π.3 του Παραρτήματος.

5.4.3 Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ τυπικών συναρτήσεων

1. $f(nT) = \delta(nT - mT)$, όπου $\delta(nT - mT)$, είναι η (μετατοπισμένη) μοναδιαία κρουστική ακολουθία (Σχ. 5.1),

$$\delta(nT - mT) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$



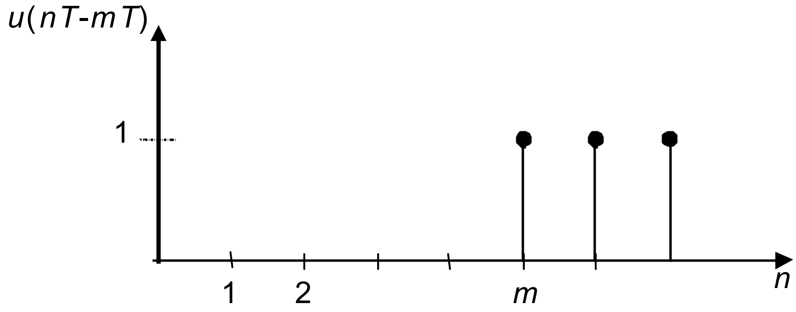
Σχήμα 5.1

Έχουμε,

$$\mathcal{Z}[\delta(nT - mT)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(nT - mT) z^{-n} = z^{-m}$$

2. $f(nT) = u(nT - mT)$, όπου $u(nT - mT)$ είναι η (μετατοπισμένη) μοναδιαία βηματική ακολουθία (Σχ. 5.2),

$$u(nT - mT) = \begin{cases} 1, & n \geq m \\ 0, & n < m \end{cases}$$



Σχήμα 5.2

Έχουμε,

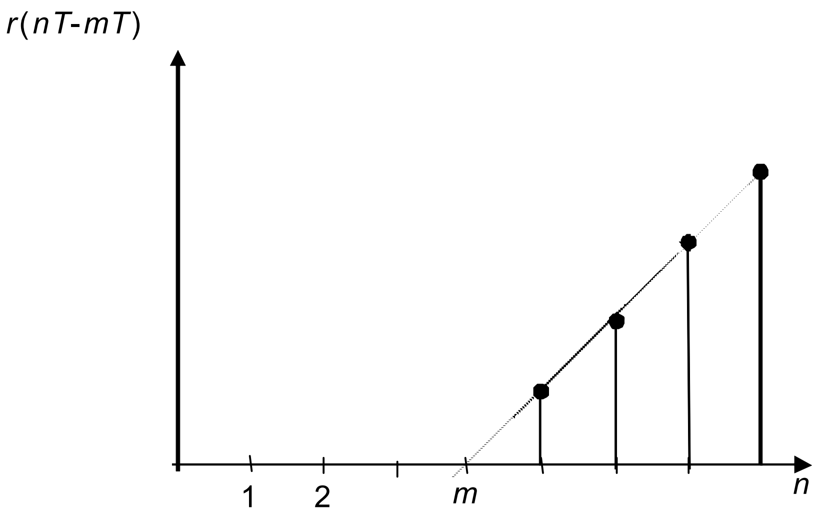
$$\mathcal{Z}[u(nT-mT)] = z^{-m}\mathcal{Z}[u(nT)] = z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}u(nT)z^{-n} = z^{-m}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^{n}\right] = \frac{z^{-m}}{z-1}$$

όπου έγινε χρήση της σχέσης,

$$\sum_{i=0}^{\infty}z^{i} = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$$

3. $f(t) = r(nT-mT)$, όπου $r(nT-mT)$ είναι η (μετατοπισμένη) ακολουθία αναρριχήσεως (Σχ. 5.3),

$$r(nT-mT) = \begin{cases} nT-mT, & n \geq m \\ 0, & n<m \end{cases}$$



Σχήμα 5.3

Έχουμε,

$$\mathcal{Z}[r(nT-mT)]=z^{-m}\mathcal{Z}[r(nT)]=z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}(nT)z^{-n}=Tz^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}$$
$$=Tz^{-m}(-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{Z}[u(nT)]=-Tz^{-m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{z-1}\right]=\frac{Tz^{-m+1}}{(z-1)^2}$$

5.4.4 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Όπως ο υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace έτσι και ο υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ ανάγεται ουσιαστικά σ' ένα πρόβλημα αναπτύξεως μιάς ρητής συναρτήσεως σε άθροισμα μερικών κλασμάτων που ο αντίστροφός τους υπολογίζεται απ' ευθείας από τους πίνακες ζευγών μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ που δίνονται στον Πίνακα Π.4 του Παραρτήματος. Επειδή όμως οι συναρτήσεις στο πεδίο του z παρουσιάζουν την μεταβλητή z στον αριθμητή, αναλύουμε την $F(z)/z$, αντί της $F(z)$, σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, οπότε η $F(z)$ θα είναι $z[F(z)/z]$.

Παράδειγμα 5.9 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συναρτήσεως,

$$F(z)=\frac{-3z}{(z-1)(z-4)}$$

Λύση: Αναπτύσσουμε την $F(z)/z$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων,

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{-3}{(z-1)(z-4)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-4}$$

Άρα η $F(z)$ θα είναι $F(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-4}$. Από τον πίνακα ζευγών μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ βρίσκουμε ότι,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}=u(nT),\ T{=}1 \text{ και } \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-4}\right\}=4^n$$

Επομένως, $f(nT)=u(nT)-4^n=1-4^n$.

Παράδειγμα 5.10 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συναρτήσεως,

$$F(z)=\frac{z(z-4)}{(z-2)^2(z-3)}$$

Λύση: Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $F(z)/z$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων. Επειδή η ρίζα z=2 είναι επαναλαμβανόμενη, έχουμε:

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z-2}+\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-3}$$

και επομένως,

$$F(z)=\frac{z}{z-2}+\frac{2z}{(z-2)^2}-\frac{z}{z-3}$$

Επειδή για T=1,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}=2^n,\quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-2)^2}\right\}=n2^n \;\; \text{και} \;\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\}=3^n$$

έπεται ότι $f(nT)=\mathcal{Z}^{-1}F\{z\}=2^n+n2^n+3^n=(n+1)2^n+3^n$.

Παράδειγμα 5.11 Η ακολουθία Fibonacci[1] είναι μία ακολουθία αριθμών, που ο κάθε όρος της είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων όρων. Οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι το 0 και το 1. Ζητείται να βρεθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας.

Λύση: Έστω $y(n)$ ένας τυχαίος όρος της ακολουθίας. Τότε η ακολουθία του Fibonacci περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών,

$$y(n+2)=y(n+1)+y(n) \tag{5.25}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0)$=0 και $y(1)$=1. Η (5.25) μπορεί να λυθεί στο πεδίο n με μεθόδους που προαναφέραμε ή χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ υπερτερεί των μεθόδων του πεδίου n διότι μετατρέπει την εξίσωση διαφορών σε μία αλγεβρική εξίσωση, όπως και ο μετασχηματισμός Laplace. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ στην (5.25) θα έχουμε:

[1] Δες βιογραφίες.

$$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = \mathcal{Z}\{y(n+1)\} + \mathcal{Z}\{y(n)\} \tag{5.26}$$

Από τις σχέσεις (5.20) και (5.21) έχουμε,

$$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = zY(z) - zY(0) = zY(z)$$
$$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2Y(z) - z^2Y(0) - zY(1) = z^2Y(z) - z$$

Επομένως η (5.26) γίνεται $z^2Y(z) - z = zY(z) + Y(z)$. Άρα,

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ θα αναλύσουμε την $Y(z)$ σε ά-θροισμα μερικών κλασμάτων. Έχουμε,

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2}\right]$$

όπου $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Άρα,

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\},\ n=0,\ 1,\ \ldots,$$

Παράδειγμα 5.12 (Υπολογισμός τοκοχρεωλύσιου). Έστω ότι δανειζόμαστε P ευρώ με ετήσιο επιτόκιο R%, για διάστημα k ετών. Ποιο είναι η μηνιαία δόση x;

Λύση: Ξεκινάμε υπολογίζοντας τον συνολικό τόκο. Στο πρώτο μήνα αυτός είναι,

$$I(1)=(r/12)P,\ r=R/100$$

ενώ στο δεύτερο,

$$I(2) = I(1) - \frac{r}{12}(x - I(1))$$

Προχωρώντας επαγωγικά,

$$I(n+1) = I(n) - \frac{r}{12}(x - I(n)) = \left(1 + \frac{r}{12}\right) I(n) - \frac{r}{12} x \qquad (5.27)$$

Η (5.27) είναι μία εξίσωση διαφορών (γραμμική, μη ομογενής) ως προς $I(n)$ με αρχική συνθήκη $I(1)=\frac{r}{12}P$. Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές της Ενότητας 5.3, βρίσκουμε (καλή άσκηση!):

$$I(n) = \frac{r}{12} P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{n-1} + x\left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{n-1}\right]$$

Επομένως ο συνολικός τόκος είναι,

$$\begin{aligned} I &= I(1) + I(2) + \cdots + I(12k) = \sum_{j=1}^{12k} I(j) \\ &= \frac{r}{12} P \sum_{j=1}^{12k} (1 + \frac{r}{12})^{j-1} + 12kx - x \sum_{j=1}^{12k} (1 + \frac{r}{12})^{j-1} \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\sum_{j=1}^{12k} (1 + \frac{r}{12})^{j-1} = \frac{12}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12k} - 1\right]$$

Συνακόλουθα,

$$\begin{aligned} I &= P\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12k} - 1\right] + 12kx - \frac{12x}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12k} - 1\right] \\ &= 12kx - P + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12k} - \frac{12x}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12k} - 1\right] \end{aligned}$$

Αλλά η ποσότητα $12kx-P$ πρέπει να ισούται με το I, οπότε,

$$P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12k} - \frac{12x}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12k} - 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{r}{12}P\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12k}}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12k}-1}$$

5.5 Συστήματα εξισώσεων διαφορών

Κατ' αναλογία προς τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, μπορούμε να εξετάσουμε συστήματα εξισώσεων διαφορών. Έτσι η,

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)x(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{f}(k),\quad \boldsymbol{x}(k_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{5.28}$$

περιγράφει ένα γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να προκύψει και από τη βαθμωτή εξίσωση τάξης N, που περιγράφεται από τη (5.9):

$$y(k+N)+a_{N-1}(k)y(k+N-1)+\ldots+a_0(k)y(k)=b(k) \tag{5.9}$$

αν κάνουμε τις ακόλουθες αντιστοιχήσεις:

$$\begin{gathered} x_1(k)=y(k) \\ x_2(k)=y(k+1)=x_1(k+1) \\ x_3(k)=y(k+2)=x_2(k+1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N(k)=y(k+N-1)=x_{N-1}(k+1) \end{gathered}$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{N-1}(k+1) \\ x_N(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \\ -a_{N-1}(k)y(k+N-1)-\ldots-a_0(k)y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(k) \end{bmatrix}$$

ή

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)x(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{b}(k)$$

Το σύστημα (5.28) μπορεί να λυθεί ή απευθείας, χρησιμοποιώντας τον πίνακα μεταφοράς $\boldsymbol{\Phi}(k, k_0)$ (ανάλογο του e^{At} της Ενότητας 3.4) ή μέσω του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$.

Η μορφή της λύσης της (5.28) μπορεί εύκολα να βρεθεί επαγωγικά. Έτσι για k=k_0, k_0+1, … η 5.28 γίνεται

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k_0+1) &= \boldsymbol{A}(k_0)x(k_0)+\boldsymbol{B}(k_0)\boldsymbol{f}(k_0) \\
\boldsymbol{x}(k_0+2) &= \boldsymbol{A}(k_0+1)x(k_0+1)+\boldsymbol{B}(k_0+1)\boldsymbol{f}(k_0+1) \\
&= \boldsymbol{A}(k_0+1)[\boldsymbol{A}(k_0)x(k_0)+\boldsymbol{B}(k_0)\boldsymbol{f}(k_0)]+\boldsymbol{B}(k_0+1)\boldsymbol{f}(k_0+1) \\
&= \boldsymbol{A}(k_0+1)\boldsymbol{A}(k_0)x(k_0)+\boldsymbol{A}(k_0+1)\boldsymbol{B}(k_0)\boldsymbol{f}(k_0)+\boldsymbol{B}(k_0+1)\boldsymbol{f}(k_0+1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{x}(k) &= \left(\prod_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}(i)\right)\boldsymbol{x}_0+\sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k-1}\boldsymbol{A}(i)\right)\boldsymbol{f}(r)
\end{aligned}$$

Με απλή εξέταση μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας μετάβασης $\boldsymbol{\Phi}(k, 0)$ δίνεται από το τύπο,

$$\boldsymbol{\Phi}(k,\ 0)=\prod_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}(i) \tag{5.29}$$

(Ο πίνακας μετάβασης απαντάται και με την ονομασία ***θεμελιώδης πίνακας***, κυρίως σε πλαίσια μαθηματικά). Έτσι, η γενική λύση της (5.28) γράφεται και σαν,

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k,\ 0)\boldsymbol{x}_0+\sum_{r=0}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(k,r+1)\boldsymbol{f}(r) \tag{5.30}$$

Παραμένει το πρόβλημα υπολογισμού του πίνακα μετάβασης. Στη γενική περίπτωση όπου ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι χρονικά μεταβαλλόμενος απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι. Στην απλούστερη περίπτωση σταθερών $\boldsymbol{A}$, ο πίνακας μετάβασης γίνεται,

$$\boldsymbol{\Phi}(k,\ 0)=\boldsymbol{A}^k$$

Για να υπολογίσουμε τον $\boldsymbol{A}^k$, χρησιμοποιούμε τον ***αλγόριθμο Putzer***. Ο αλγόριθμος αυτός συνίσταται στην έκφραση του $\boldsymbol{A}^k$ ως,

$$\boldsymbol{A}^k=\sum_{j=1}^{s}u_j(k)\boldsymbol{M}(j-1)$$

όπου,

$$M(k)=\prod_{j=1}^{k}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_j\mathbf{I}\right)$$

και,

$$u_1(k)=\lambda_1^k,\ u_j(k)=\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_j^{k-1-i}u_{j-1}(i)$$

(η απόδειξη στον Elaydi).

Παράδειγμα 5.13 Να λυθεί το σύστημα $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{f}(k)$, όπου

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{f}(k)=\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix},\ x_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Putzer, βρίσκουμε ότι,

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}2^k&k2^{k-1}\\0&2^k\end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στη (5.30), η λύση είναι,

$$\begin{aligned}y(k)&=\begin{bmatrix}2^k&k2^{k-1}\\0&2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\sum_{r=0}^{k-1}\left\{\begin{bmatrix}2^{k-r-1}&(k-r-1)2^{k-r-2}\\0&2^{k-r-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\1\end{bmatrix}\right\}\\&=\begin{bmatrix}2^k\\0\end{bmatrix}+\sum_{r=0}^{k-1}\begin{bmatrix}r2^{k-r-1}+(k-r-1)2^{k-r-2}\\2^{k-r-1}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2^k\\0\end{bmatrix}+2^k\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{k-1}r\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{k-1}{4}\sum_{r=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r\\\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(όπου έχει γίνει χρήση της σχέσης $\sum_{r=1}^{k-1}ra^r=\dfrac{a(1-a^k)-ka^{k+1}(1-a)}{(1-a)^2}$).

Μετά από κάποιες πράξεις …

$$y(k)=\begin{bmatrix} 2^k + k2^{k-1} - \frac{3}{4}k \\ 2^k - 1 \end{bmatrix}$$

Παράρτημα

Πίνακας Π.1 Ευθείς μετασχηματισμοί Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)$	$aF(s)$
$af_1(t) \pm bf_2(t)$	$aF_1(s) \pm bF_2(s)$
$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f^{(1)}(t)$	$sF(s) - f(0^+)$
$\dfrac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f^{(1)}(0^+)$
$\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^2F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f^{(1)}(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^\infty f(t)dt = f^{(-1)}(t)$	$\dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{f^{(-1)})(0^+)}{s}$
$f(t/a)$	$aF(as)$
$f(t-a)$ όπου $f(t-a)=0, \quad 0<t<a$	$\exp(-as)F(s)$

$f(t)$	$F(s)$
$f(t+a)$ όπου $f(t+a)=0,\quad -\alpha<t<0$	$\exp(as)F(s)$
$\exp(-at)f(t)$	$F(s+a)$
$-tf(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$
$u(t)$ (μοναδιαίο βήμα)	$\frac{1}{s}$
$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
ημ at	$\frac{a}{s^2+a^2}$
συν at	$\frac{s}{s^2+a^2}$
ημh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$
συνh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
T	$\frac{1}{s^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\exp(-at)\text{ημ}bt$	$\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$\exp(-at)\text{συν}bt$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$\dfrac{\text{συν}bt-\text{ημ}at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+b^2)+(s^2+a^2)}$

Πίνακας Π.2 Αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace

$F(s)$	$f(t)$, $(t\geq 0)$
$\dfrac{1}{s}$	$1=u(t)$, μοναδιαίο βήμα στον T=0
$\dfrac{1}{s^2}$	T
$\dfrac{1}{s^n}$, n=1, 2, ….	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$

$F(s)$	$f(t),\ (t\geq 0)$
$s^{-3/2}$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
$\dfrac{1}{s+a}$	$\exp(-at)$
$\dfrac{1}{(s+a)(s+\gamma)}$	$\dfrac{1}{\gamma-\alpha}[\exp(-at)-\exp(-\gamma t)]$
$\dfrac{s+a_0}{(s+a)(s+\gamma)}$	$\dfrac{1}{\gamma-\alpha}[(a_0-a)\exp(-at)-(a_0-\gamma)\exp(-\gamma t)]$
$\dfrac{1}{(s+a)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\dfrac{\exp(-at)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\dfrac{\exp(-\beta t)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+\dfrac{\exp(-\gamma t)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\dfrac{s+a_0}{(s+a)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\dfrac{(\alpha_0-\alpha)\exp(-at)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\dfrac{(\alpha_0-\beta)\exp(-\beta t)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+\dfrac{(\alpha_0-\gamma)\exp(-\gamma t)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\dfrac{s^2+a_1 s+a_0}{(s+a)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\dfrac{(a^2-a_1\alpha+a_0)\exp(-\alpha t)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\dfrac{(\beta^2-a_1\beta+a_0)\exp(-\beta t)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+\dfrac{(\gamma^2-a_1\gamma+a_0)\exp(-\gamma t)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\dfrac{1}{s^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}\,\text{ημ}\beta t$

$F(s)$	$f(t),\ (t\geq 0)$
$\dfrac{1}{s^2-\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}\,\text{ημh}\,\beta t$
$\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$	$\text{συν}\,\beta t$
$\dfrac{s}{s^2-\beta^2}$	$\text{συνh}\,\beta t$
$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}\exp(-\alpha t)\,\text{ημ}\,\beta t$
$\dfrac{s+a_0}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}[(a_0-\alpha)^2+\beta^2]^{1/2}\exp(-\alpha t)\,\text{ημ}(\beta t+\psi),\quad \psi=\text{τοξεφ}\left[\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right.$
$\dfrac{1}{(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{\exp(-\gamma t)}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}+\dfrac{\exp(-\alpha t)\,\text{ημ}(\beta t-\psi)}{\beta[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^{1/2}},\quad \psi=\text{τοξεφ}[\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}]$
$\dfrac{s+a_0}{(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{(a_0-\gamma)\exp(-\gamma t)}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}+\dfrac{1}{\beta}\left[\dfrac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}\right]^{1/2}\exp(-\alpha t)\,\text{ημ}(\beta t+\psi),$ $\psi=\text{τοξεφ}\left[\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right]-\text{τοξεφ}\left[\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right]$

$\dfrac{s+a_1s+a_0}{(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{(\gamma^2-a_1\gamma+a_0)\exp(-\gamma t)}{(a-\gamma)^2+\beta^2}+\dfrac{1}{\beta}\left[\dfrac{(\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0)^2+\beta^2(a_1-2\alpha)^2}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}\right]^{1/2}\times\exp(-\alpha t)\text{ημ}(\beta t+\psi),$ $\psi=\text{τοξεφ}\left[\dfrac{\beta(a-2\alpha)}{\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0}\right]-\text{τοξεφ}\left[\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right]$
$\dfrac{1}{(s^2+\lambda^2)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{1}{[(a^2+\beta^2-\lambda^2)^2+4\alpha^2\lambda^2]^{1/2}}\left\{\dfrac{1}{\lambda}\text{ημ}(\lambda t-\psi_1)+\dfrac{1}{\beta}\exp(-\alpha t)\text{ημ}(\beta t-\psi_2)\right\},$ $\psi_1=\text{τοξεφ}\left[\dfrac{2\alpha\lambda}{\alpha^2+\beta^2-\lambda^2}\right],\ \psi_2=\text{τοξεφ}\left[\dfrac{-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\lambda^2}\right]$
$\dfrac{s+a_0}{(s^2+\lambda^2)\cdot\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]}$	$\dfrac{1}{\lambda}\left\{\dfrac{a_0^2+\lambda^2}{(\alpha^2+\beta^2-\lambda^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\text{ημ}(\lambda t+\psi_1)+\dfrac{1}{\beta}\left\{\dfrac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2-\lambda^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\exp(-\alpha t)\text{ημ}(\beta t+\psi_2)$ $\psi_1=\text{τοξεφ}\left[\dfrac{\lambda}{a_0}\right]-\text{τοξεφ}\left[\dfrac{2\alpha\lambda}{\alpha^2+\beta^2-\lambda^2}\right],\ \psi_2=\text{τοξεφ}\left[\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right]-\text{τοξεφ}\left[\dfrac{-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\lambda^2}\right]$
$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{(s^2+\lambda^2)\cdot\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]}$	$\dfrac{1}{\lambda}\left\{\dfrac{(a_0-\lambda)^2+a_1^2\lambda^2}{(\alpha^2+\beta^2-\lambda^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\text{ημ}(\lambda t+\psi_1)+\dfrac{1}{\beta}\left\{\dfrac{(\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0)^2+\beta^2(a_1-2\alpha)^2}{(\alpha^2+\beta^2-\lambda^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right\}\times\exp(-\alpha t)\text{ημ}(\beta t+\psi_2)$

	$\psi_1 = \text{τοξεφ}\left[\dfrac{a_1\lambda}{a_0-\lambda^2}\right] - \text{τοξεφ}\left[\dfrac{2\alpha\lambda}{\alpha^2+\beta^2-\lambda^2}\right],\ \ \psi_2 = \text{τοξεφ}\left[\dfrac{\beta(a_1-2\alpha)}{\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0}\right] - \text{τοξεφ}\left[\dfrac{-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\lambda^2}\right]$

Πίνακας Π.3 Ιδιότητες και θεωρήματα μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Ιδιότητα ή Θεώρημα	$f(nt)$	$F(z)$
Ορισμός μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$	$f(nt)$	$\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$
Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$	$\frac{1}{2\pi j}\oint F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$	$F(z)$
Γραμμικότητα	$c_1 f_1(nT) + c_2 f_2(nT)$	$c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$
Μετατόπιση αριστερά	$f(nT + kT)$	$z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT) z^{-n} \right]$
Μετατόπιση δεξιά	$f(nT - kT)$	$z^{-k} F(z)$
Αλλαγή κλίμακας $\mathcal{Z}$	$a^{\mp nT} f(nT)$	$F(a^{\pm nT} z)$
Αλλαγή κλίμακας nT	$f(mnT)$	$F(z^{-m})$
Πολ/σμός επί n	$nf(nT)$	$-z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F(z)$
Άθροισμα	$\sum_{n=0}^{m} f(nT)$	$\frac{z}{z-1} F(z)$
Συνέλιξη	$f(nT) * h(nT)$	$F(z) H(z)$

Περιοδική συνάρτηση	$f(nT)=f(nT+pT)$	$\dfrac{z^p}{z^p-1}F(z)$
Αρχική τιμή	$f(0)$	$\underset{Z\to\infty}{\text{ορ}}\ F(z)$
Τελική τιμή	$\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\ f(nT)$	$\underset{Z\to 1}{\text{ορ}}\ (z-1)F(z)$

Πίνακας Π.4 Ευθείς μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$

$f(nT)$	$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$
$\delta(nT-kT)$	z^{-k}
$u(nT-kT)$	$\dfrac{z^{-k+1}}{z-1}$
$nT-kT$	$\dfrac{Tz^{-k+1}}{(z-1)^2}$
$\dfrac{1}{k!}n^kT^k$	$\underset{a\to 0}{\text{ορ}}\ \dfrac{(-1)^k}{k!}\dfrac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right]$
a^{nT}	$\dfrac{z}{z-a^T}$

e^{-anT}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
$\dfrac{n^k T^k}{k!}e^{-anT}$	$\dfrac{(-1)^k \partial^k}{k!\partial a^k}\left[\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right]$
$1-e^{-anT}$	$\dfrac{\left(1-e^{-aT}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$
$nT-\dfrac{1-e^{-anT}}{a}$	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}-\dfrac{\left(1-e^{-aT}\right)z}{a(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$
$\text{ημ}\,\omega nT$	$\dfrac{z\,\text{ημ}\,\omega T}{z^2-2z\,\text{συν}\,\omega T+1}$
$\text{συν}\,\omega nT$	$\dfrac{z(z-\text{συν}\,\omega T)}{z^2-2z\,\text{συν}\,\omega T+1}$
$\text{ημh}\,\omega nT$	$\dfrac{z\,\text{ημh}\,\omega T}{z^2-2z\,\text{συνh}\,\omega T+1}$
$\text{συνh}\,\omega nT$	$\dfrac{z(z-\text{συνh}\,\omega T)}{z^2-2z\,\text{συνh}\,\omega T+1}$
$\text{συνh}\,\omega nT-1$	$\dfrac{z(z-\text{συνh}\,\omega T)}{z^2-2z\,\text{συνh}\,\omega T+1}-\dfrac{z}{z-1}$
$1-\text{συν}\,\omega nT$	$\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z(z-\text{συν}\,\omega_0 T)}{z^2-2z\,\text{συν}\,\omega T+1}$

$(c-a)e^{-anT}$	$\dfrac{(c-a)z}{z-e^{-aT}}$
$1-(1+anT)e^{-anT}$	$\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-aT}}-\dfrac{aTe^{-aT}z}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$
$b-be^{-bnT}+a(a-b)nTe^{-anT}$	$\dfrac{bz}{z-1}-\dfrac{bz}{z-e^{-aT}}+\dfrac{(a-b)Te^{-aT}z}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$
$e^{-bnT}-e^{-anT}+(a-b)nTe^{-anT}$	$\dfrac{z}{z-e^{-bT}}-\dfrac{z}{z-e^{-aT}}+\dfrac{(a-b)Te^{-aT}z}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$
$e^{-anT}\text{ημ}\omega nT$	$\dfrac{ze^{-aT}\text{ημ}\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\text{συν}\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-anT}\text{συν}\omega nT$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\text{συν}\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\text{συν}\omega T+e^{-2aT}}$

Βιογραφίες

PISANO, Leonardo (**FIBONACCI**) (1170−~1250).

Ο Leonardo Pisano (δηλ. εκ Πίζας ορμώμενος) θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός του μεσαίωνα. Το προσωνύμιο Fibonacci προήλθε από τη σύντμηση των λέξεων filius Bonacci, που σημαίνει ο «γιος του Bonnacio», το επίθετο του πατέρα του.

Ο Fibonacci είναι βέβαια περισσότερο γνωστός σε μας από την ομώνυμη αριθμητική ακολουθία, την οποία περιγράφει στο βιβλίο του *Liber Abaci* (1202), ως τη λύση στο πρόβλημα «Πόσα ζευγάρια κουνελιών δημιουργούνται από ένα ζευγάρι σ' ένα χρόνο;» Η ακολουθία πάντως φαίνεται ότι ήταν γνωστή σε Άραβες και Ινδούς μαθηματικούς νωρίτερα. Η μεγάλη συνεισφορά όμως του Fibonacci είναι η εισαγωγή του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος με τα Ινδο-Αραβικά σύμβολα που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα. (μέχρι τότε χρησιμοποιούσαν τα λατινικά σύμβολα και μέθοδο αρίθμησης). Ο Fibonacci προσέλαβε τη γνώση αυτή από άραβες δασκάλους, κατά τη παραμονή του στη Β. Αφρική με το πατέρα του που ήταν εμπορικός ακόλουθος.

LAPLACE, Pierre Simon (1749-1827).

Διακεκριμένος Γάλλος (από το Beaumont-en-Auge της Νορμανδίας) μαθηματικός, ίσως ο σπουδαιότερος της εποχής του. Ήταν σύγχρονος των Lagrange, Legendre, d' Alembert (του οποίου ήταν κάποιο τρόπο προστατευόμενος), Poisson και Fourier. Υπήρξε μέλος της Académie des Sciences και Γερουσιαστής υπό τον Ναπολέοντα. Οι πολιτικές του όμως πεποιθήσεις εναλάσσονταν, ακολουθώντας την ιστορική ροή της Γαλλίας, τακτική που τον έκανε αντιπαθή στους συναδέλφους του.

Ο Laplace εντρύφησε σε διάφορες επιστημονικές περιοχές: μαθηματικά (με μελέτες σε βελτιστοποίηση συναρτήσεων, διαφορικές εξισώσεις, θεωρία πιθανοτήτων), αστρονομία (με το μνημειώδες 5τομο σύγγραμμα του *Traité du Mécanique Céleste*) και φυσική.

Γνωστός κυρίως από τον μετασχηματισμό που φέρνει τ' όνομά του.

Πηγές

Braun M., “Differential equations and their applications”, Springer Verlag, N.Y., 1983.

Bishop A. B., “Introduction to discrete linear controls”, Academic Press, N.Y., 1975.

Elaydi S., “An introduction to difference equations”, Springer, N.Y., 2005.

Παρασκευόπουλος Π.Ν., «Ελεγχος συστημάτων με υπολογιστές», Αθήνα, 1991.

Ελληνική βιβλιογραφία

Bronson R., *Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις*, Schaum's outline of modern introductory differential equations, μετάφραση Περσίδης Σ.Κ., 1978.

Boyce W.E. and DiPrima R.C., *Στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα, 1999.

Γκαρούτσος Β.Γ., *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: λυμένα θέματα και στοιχεία θεωρίας*, Αθήνα.

Δάσιος Γ., *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, Πάτρα, 1983.

Κυβεντίδης Θ., *Διαφορικές εξισώσεις: περιληπτική θεωρία, λυμένα προβλήματα, εφαρμογές*, 2η έκδοση, Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1998.

Παντελίδης Γ.Ν., Κραββαρίτης Δ. Χ. και Χατζησάββας Ν. Σ., *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, Ζήτη, Αθήνα, 1990.

Πολυράκης Ι. Α., *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, Αθήνα, 1989.

Τραχανάς Λ.Σ., *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: μέθοδοι λύσης και εφαρμογές,* 6η έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2002.

Φλυτζάνης Γ.Η., *Διαφορικές εξισώσεις με εφαρμογές*, University Studio Press, Θεσσαλονίκη, 1982.

Δικτυακές πηγές

http://www.aerolab.ntua.gr/Lessons/CFD/yp2006/Chapter%202.pdf

http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/home.php?action=courses_details&course_id=5&language=1

http://www.mie.uth.gr/n_ekp_yliko.asp?id=39

http://www.physics.upatras.gr/content/dyn/show_lesson.det?lesson_table=term&lesson_id=14

http://www.samos.aegean.gr/actuar/nick/differential.pdf

http://www.tem.uoc.gr/~plex/EM291/#material

http://www.ucy.ac.cy/~smyrlis/greek/Notes_Books_gr.htm

http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm