

Θέμα 1

(α)[12] Για τη Δ.Ε.: $y' \ln(ty) + \frac{f(y)}{t} + t^2 = 0$, $t, y > 0$, βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(y)$ για τις οποίες η Δ.Ε. είναι πλήρης και αν για μία από αυτές $f(0) = 0$ υπολογίστε την (πεπλεγμένη) λύση της Δ.Ε.

(β)[16] Σε μία πόλη 1000 κατοίκων ένας κάτοικος εμφανίζει συμπτώματα μόλυνσης από κάποιον ιό! Η εξάπλωση του ιού δίνεται από τη Δ.Ε.

$$A' = k(1000 - A)A, \quad \text{όπου } k > 0 \text{ και } A(t) = \text{κάτοικοι που ασθενούν στο χρόνο } t.$$

Αν μετά από 4 ημέρες 50 κάτοικοι έχουν ασθενήσει, πόσοι κάτοικοι θα είναι άρρωστοι σε 6 ημέρες;

Θέμα 2

(α)[12] Έστω το Π.Α.Τ. για την $y(t)$: $y'' + ay' + by = 0$, με $a, b \in \mathbb{R}$ με $y(0) = 1, y'(0) = c \in \mathbb{R}$. Αν μία λύση του Π.Α.Τ. είναι η $y_1(t) = e^{-3t}$ και ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$, υπολογίστε τις σταθερές a, b , και c .

(β)[12] Υπολογίστε τη γενική λύση, $y(t)$, της Δ.Ε.: $2y'' + 4y' = e^{-t} - 2y$ (χωρίς τη χρήση μετασχηματισμών Laplace).

Θέμα 3

Έστω το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x_1(t)$ και $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 + 2e^{4t}, \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 + e^{4t} \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

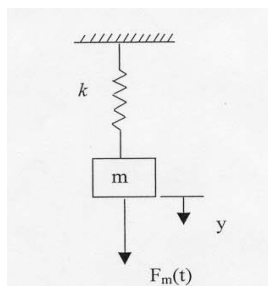
(α)[16] Υπολογίστε όλες τις λύσεις του παραπάνω συστήματος που ικανοποιούν την συνθήκη $x_1(0) = 8/5$.

(β)[5] Σχεδιάστε το γράφημα του διανυσματικού πεδίου (επίπεδο φάσης) και τις αντίστοιχες τροχιές των λύσεων για το ομογενές σύστημα που προκύπτει από το παραπάνω.

Θέμα 4

(α)[9] Αν ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ είναι $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3s^2}{s^5 + 1}$ και $f(0) = 1, f(1) = 4$ και $f'(0) = -6$, υπολογίστε τους: (i) $\mathcal{L}\{tf(t)\}$, (ii) $\mathcal{L}\{f''(t)\}$, (iii) $\mathcal{L}\{e^{-2t}f(t)\}$ και (iv) αν $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-6s}\frac{3s^2}{s^5 + 1}\right\}$ υπολογίστε το $g(1)$.

(β)[18] Το σύστημα ελατηρίου-μάζας χωρίς απόσβεση στο σχήμα, έχει $m = 1 \text{ kg}$ και η σταθερά ελατηρίου είναι $k = 25\pi^2 \text{ N/m}$. Το σύστημα αρχικά, $t = 0$, είναι σε ισορροπία ($y = 0$) και για ένα δευτερόλεπτο ασκείται εξωτερική δύναμη $F_m = 1 \text{ N}$. Με χρήση μετασχηματισμών Laplace και της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος υπολογίστε την κίνηση $y(t)$ του συστήματος.



Θέμα 1

(α) Έχοντας $M(t, y) = t^2 + \frac{f(y)}{t}$ και $N(t, y) = \ln(ty)$ τότε $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{f'(y)}{t}$ και $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{t}$. Για να είναι τότε ακριβής/πλήρης η Δ.Ε. πρέπει $f'(y) = 1$ δηλ. $f(y) = y + c$, $c \in \mathbb{R}$.
Για τη λύση, αν $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ άρα $f(y) = y$ και για τη λύση

$$u = \int M(t, y) dt = \frac{t^3}{3} + y \ln t + g(y)$$

$$N = \frac{\partial u}{\partial y} = \ln t + g(y)' \quad \text{συνεπώς} \quad g'(y) = \ln y \quad \text{άρα} \quad g(y) = y \ln y - y.$$

Η λύση (σε πεπλεγμένη μορφή) είναι: $u(t, y) = \frac{t^3}{3} + y \ln t + y \ln y - y = C$.

(β) Έχουμε να λύσουμε το Π.Α.Τ. (εφόσον αρχικά, για $t = 0$, ένας κάτοικος ήταν άρρωστος)

$$A' = k(1000 - A)A, \quad A(0) = 1$$

Η Δ.Ε. μπορεί να λυθεί είτε σαν χωριζομένων μεταβλητών είτε σαν Bernoulli, η γενική λύση της είναι

$$A(t) = \frac{1000Ce^{1000kt}}{1 - Ce^{1000kt}}$$

Απο $A(0) = 1$ έχουμε $C = \frac{A(0)}{A(0) - 1000}$ συνεπώς,

$$A(t) = \frac{1000A(0)}{A(0) + (1000 - A(0))e^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$$

όπου πρέπει να υπολογίζουμε το k (σταθερά μεταβολής). Απο $A(4) = 50$ (στις 4 μέρες 50 κάτοικοι άρρωστοι) έχουμε

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}} \Rightarrow k \approx 0.0009906$$

Τελικά (στις 6 ημέρες),

$$A(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906 \cdot 6}} \approx 276 \quad \text{κάτοικοι αναμένεται να αρρωστήσουν σε 6 ημέρες.}$$

Θέμα 2

(α) Για το δοσμένο Π.Α.Τ. $y'' + ay' + by = 0$ γνωρίζουμε, από υπέρθεση, ότι η γενική λύση είναι $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ και ότι η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι $r^2 + ar + b = 0$ και εφόσον $y_1(t) = e^{-3t}$ μια ρίζα της χαρ. εξίσωσης είναι $r = -3$, άρα $(-3)^2 + a(-3) + b = 0 \Rightarrow -3a + b = -9$.

Εφόσον ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$ (δηλ. σταθερή τιμή και $y_1(t) \rightarrow 0$) η δευτερη ρίζα είναι η $r = 0$ και $C_2 = 2$. Άρα απο τη χαρ. εξίσωση $0^2 + a \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$ και $a = 3$. Τέλος, εφόσον $y(0) = 1$ από τη γεν. λύση έχουμε $C_1 + 2 = 1 \Rightarrow C_1 = -1$. Άρα $y(t) = -e^{-3t} + 2$ και $y'(t) = 3e^{-3t}$, συνεπώς $y'(0) = 3 = c$.

(β) Από τη δοσμένη Δ.Ε. έχουμε $2y'' + 4y' + 2y = e^{-t}$ δηλ. μη-ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Η λύση της ομογενούς είναι, με βάση τη χαρ. εξίσωση $(r + 1)^2 = 0$ και $r = -1$ διπλή ρίζα,

$$y_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Στη συνέχεια με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών, η ειδική λύση θα είναι της μορφής $y_p = At^2 e^{-t}$ (διπλή προσαύξηση λόγω της ομογενούς) και αντικαθιστώντας στη ΔΕ την y_p, y_p' και y_p'' έχουμε ότι $A = 1/4$, συνεπώς

$$y(t) = y_c + y_p = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{4} t^2 e^{-t}$$

Θέμα 3

(α) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διάνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδος ιδιοτιμών υπολογίζουμε την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \implies \lambda_{1,2} = -1, 3$

Λύνοντας για τα ιδιοδιάνυσματα $v_1 = [-1, 1]^T$ και $v_2 = [1, 1]^T$. Άρα η λύση του ομογενούς συστήματος είναι

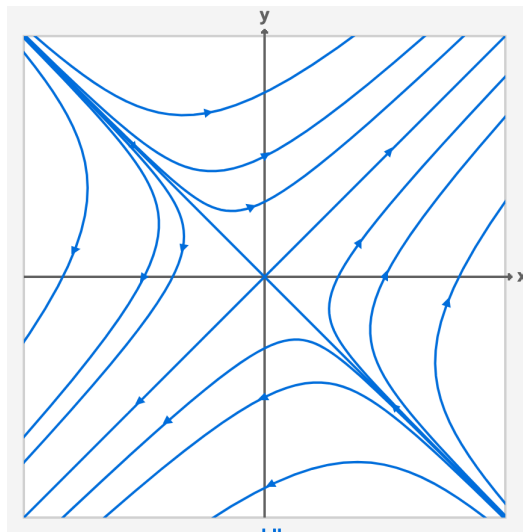
$$\vec{x}_c(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Για τη ειδική λύση मानτεύουμε ότι είναι της μορφής $\vec{x}_p(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ και αντικαθιστώντας στο μη-ομογενές σύστημα έχουμε

$$4 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} \implies a = 8/5, b = 7/5$$

Τέλος, από τη συνθήκη $x_1(0) = 8/5 \implies c_1 = c_2$.

(β) Με βάση τα κυρίαρχα ιδιοδιάνυσματα v_1 και v_2 και τη λύση του ομογενούς που βρήκαμε στο (α) ερώτημα, οι τροχιές των λύσεων είναι



Θέμα 4

(α) Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού

$$(i) \mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3s^2}{s^5+1}\right) = \frac{9s^6-6s}{(s^5+1)^2},$$

$$(ii) \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) = \frac{3s^4}{s^5+1},$$

$$(iii) \mathcal{L}\{e^{-2t}f(t)\} = F(s+2) = \frac{3(s+2)^2}{(s+2)^5+1} \text{ και}$$

$$(iv) g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-6s} \frac{3s^2}{s^5+1}\right\} = u(t-6)f(t-6) \implies g(1) = 0.$$

(β) Το Π.Α.Τ. που περιγράφει την κίνηση είναι

$$my'' + ky = F_m \Rightarrow y'' + 25\pi^2 y = 1 - u(t-1), \quad y(0) = 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του Π.Α.Τ. δίνει

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} + 25\pi^2 \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2 + 25\pi^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \right)$$

Από απλά κλάσματα

$$\frac{1}{s(s^2 + 25\pi^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 25\pi^2} \Rightarrow C = 0, \quad A = 1/25\pi^2, \quad B = -1/25\pi^2$$

άρα

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{25\pi^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 25\pi^2} \right) (1 - e^{-s}) \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{25\pi^2} (\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos(5\pi t)\}) (1 - e^{-s})$$

Εφόσον ισχύει ότι $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$ έχουμε

$$y(t) = \frac{1}{25\pi^2} (1 - \cos(5\pi t)) - \frac{1}{25\pi^2} [u(t-1) - u(t-1)\cos(5\pi(t-1))].$$