

### **Θέμα 1**

**(α)[12]** Δεξαμενή περιέχει αρχικά 10 λίτρα ( $l$ ) νερού και διαλυμένα 0.5 κιλά ( $kg$ ), αλατιού. Ένα μείγμα συγκέντρωσης  $\frac{1}{200}(10-t)^2(\sin t + 1)$  σε ( $Kgr/l$ ), σε αλάτι εισέρχεται στη δεξαμενή με ρυθμό  $1\ l/min$  και το καλά αναδευόμενο μείγμα εκρέει από τη δεξαμενή με ρυθμό  $2\ l/min$ . Να βρεθεί η έκφραση της ποσότητας του αλατιού στη δεξαμενή, για οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t(min)$ .

**(β)[8]** Υπολογίστε τη λύση  $y(t)$  της Δ.Ε.  $y' = \frac{1}{t-y} + 1$ .

**(γ) [4+8]** Για τη Δ.Ε.  $y' + \frac{y}{t} - y^3 = 0$ , σχεδιάστε το πεδίο κλίσεων της στο  $[t, y] \in [1, 4] \times [0, 4]$  και στη συνέχεια υπολογίστε τη λύση της Δ.Ε. που ικανοποιεί τη συνθήκη  $y(3) = 1$ .

### **Θέμα 2**

**(α)[5 + 7]** Έστω το Π.Α.Τ.  $my'' + cy' + ky = f(t)$ ,  $y(0) = y_0$  και  $y'(0) = u_0$ , το οποίο περιγράφει την μετακίνηση από τη θέση ισορροπίας ενός σώματος μάζας  $m$  συνδεδεμένο με ένα ελατήριο. (i) Αν η λύση της Δ.Ε. για  $f(t) = 0$  και  $m = 5kg$  είναι  $y_c = 2e^{-t} \cos(\sqrt{3}t - 1.0472)$ , υπολογίστε τα  $c$  και  $k$  και (ii) για τα  $c$  και  $k$  που βρήκατε, υπολογίστε τη γενική λύση της Δ.Ε. αν  $f(t) = 5 \sin(2t)$ .

**(β)[12]** Υπολογίστε τη γενική λύση,  $y(t)$ , της Δ.Ε.:  $t^2 y'' + ty' - y = t - \frac{1}{t}$ ,  $t > 0$ .

### **Θέμα 3**

**(α)[10]** Έστω ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ενός γραμμικού συστήματος Δ.Ε.  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , υπολογίστε τον  $e^{At}$ .

**(β)[7+10]** Έστω το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις  $x(t)$  και  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x + 2 \cos t \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(i) Υπολογίστε ένα θεμελιώδη πίνακα λύσεων για το ομογενές σύστημα που προκύπτει από το παραπάνω και (ii) υπολογίστε τη γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος. [Υπόδειξη: για την λύση του μη-ομογενούς είναι ίσως καλύτερα να μην χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών].

### **Θέμα 4**

**(α)[5]** Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της  $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+7}$ .

**(β)[12]** Η εξέλιξη ενός πληθυσμού ψαριών  $y(t)$  στο χρόνο  $t$ , με ρυθμό αύξησης 1% και μείωσης λόγω αλιείας με βάση τη συνάρτηση  $h(t)$  για 30 ημέρες, δίνεται από το Π.Α.Τ.

$$y'(t) = 0.01y(t) - h(t), \quad y(0) = 100 \quad \text{με} \quad h(t) = \begin{cases} 3 & \text{αν } 0 \leq t < 30 \\ 0 & \text{αν } t \geq 30 \end{cases}$$

Υπολογίστε την  $y(t)$  με χρήση μετασχηματισμών Laplace και της βηματικής συνάρτησης.

**Η ακρίβεια των υπολογισμών σας και των τελικών αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική**  
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**