

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μια εταιρεία παράγει κέικ δύο κατηγοριών, απλά και πολυτελείας:

- Ένα απλό κέικ αποδίδει κέρδος 1 ευρώ.
- Ένα κέικ πολυτελείας αποδίδει κέρδος 6 ευρώ.
- Η καθημερινή ζήτηση του απλού κέικ είναι ≤ 200 .
- Η καθημερινή ζήτηση του κέικ πολυτελείας είναι ≤ 300 .
- Το εργοστάσιο παράγει ≤ 400 κέικ καθημερινά.

Πόσα απλά κέικ και πόσα πολυτελείας μεγιστοποιούν το κέρδος;

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μια εταιρεία παράγει κέικ δύο κατηγοριών, απλά και πολυτελείας:

- Ένα απλό κέικ αποδίδει κέρδος 1 ευρώ.
- Ένα κέικ πολυτελείας αποδίδει κέρδος 6 ευρώ.
- Η καθημερινή ζήτηση του απλού κέικ είναι ≤ 200 .
- Η καθημερινή ζήτηση του κέικ πολυτελείας είναι ≤ 300 .
- Το εργοστάσιο παράγει ≤ 400 κέικ καθημερινά.

Πόσα απλά κέικ και πόσα πολυτελείας μεγιστοποιούν το κέρδος;
 x_1 x_2

$$\max x_1 + 6x_2$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μια εταιρεία παράγει κέικ δύο κατηγοριών, απλά και πολυτελείας:

- Ένα απλό κέικ αποδίδει κέρδος 1 ευρώ.
- Ένα κέικ πολυτελείας αποδίδει κέρδος 6 ευρώ.
- Η καθημερινή ζήτηση του απλού κέικ είναι ≤ 200 .
- Η καθημερινή ζήτηση του κέικ πολυτελείας είναι ≤ 300 .
- Το εργοστάσιο παράγει ≤ 400 κέικ καθημερινά.

Πόσα απλά κέικ και πόσα πολυτελείας μεγιστοποιούν το κέρδος;

x_1

x_2

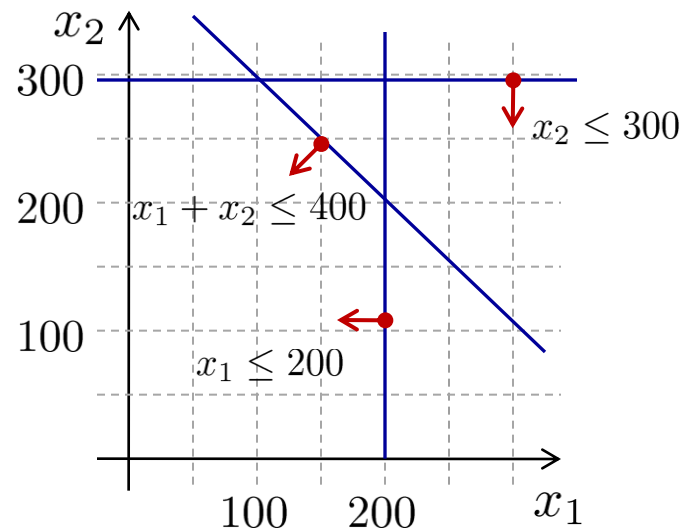
$$\max x_1 + 6x_2$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Γραμμικός Προγραμματισμός

Μια εταιρεία παράγει κέικ δύο κατηγοριών, απλά και πολυτελείας:

- Ένα απλό κέικ αποδίδει κέρδος 1 ευρώ.
- Ένα κέικ πολυτελείας αποδίδει κέρδος 6 ευρώ.
- Η καθημερινή ζήτηση του απλού κέικ είναι ≤ 200 .
- Η καθημερινή ζήτηση του κέικ πολυτελείας είναι ≤ 300 .
- Το εργοστάσιο παράγει ≤ 400 κέικ καθημερινά.

Πόσα απλά κέικ και πόσα πολυτελείας μεγιστοποιούν το κέρδος;

x_1 x_2

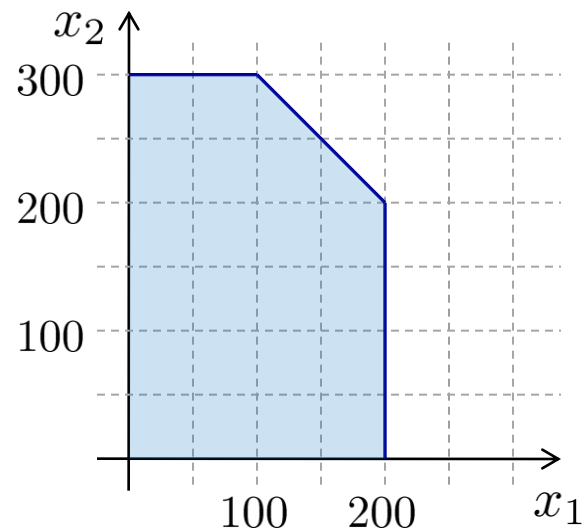
$$\max x_1 + 6x_2$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Γραμμικός Προγραμματισμός

Μια εταιρεία παράγει κέικ δύο κατηγοριών, απλά και πολυτελείας:

- Ένα απλό κέικ αποδίδει κέρδος 1 ευρώ.
- Ένα κέικ πολυτελείας αποδίδει κέρδος 6 ευρώ.
- Η καθημερινή ζήτηση του απλού κέικ είναι ≤ 200 .
- Η καθημερινή ζήτηση του κέικ πολυτελείας είναι ≤ 300 .
- Το εργοστάσιο παράγει ≤ 400 κέικ καθημερινά.

Πόσα απλά κέικ και πόσα πολυτελείας μεγιστοποιούν το κέρδος;

x_1

x_2

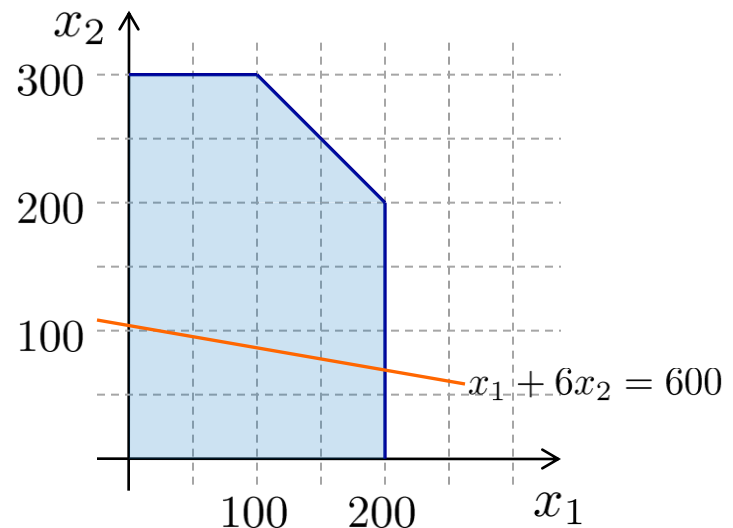
$$\max x_1 + 6x_2$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Γραμμικός Προγραμματισμός

Μια εταιρεία παράγει κέικ δύο κατηγοριών, απλά και πολυτελείας:

- Ένα απλό κέικ αποδίδει κέρδος 1 ευρώ.
- Ένα κέικ πολυτελείας αποδίδει κέρδος 6 ευρώ.
- Η καθημερινή ζήτηση του απλού κέικ είναι ≤ 200 .
- Η καθημερινή ζήτηση του κέικ πολυτελείας είναι ≤ 300 .
- Το εργοστάσιο παράγει ≤ 400 κέικ καθημερινά.

Πόσα απλά κέικ και πόσα πολυτελείας μεγιστοποιούν το κέρδος;

x_1

x_2

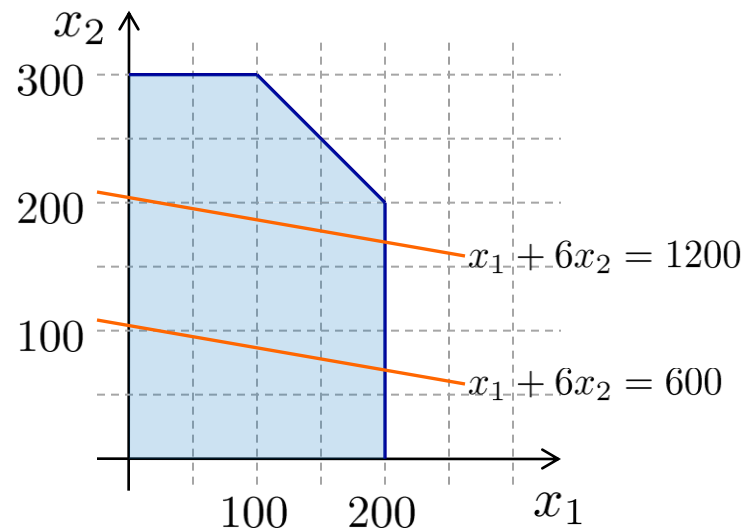
$$\max x_1 + 6x_2$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Γραμμικός Προγραμματισμός

Μια εταιρεία παράγει κέικ δύο κατηγοριών, απλά και πολυτελείας:

- Ένα απλό κέικ αποδίδει κέρδος 1 ευρώ.
- Ένα κέικ πολυτελείας αποδίδει κέρδος 6 ευρώ.
- Η καθημερινή ζήτηση του απλού κέικ είναι ≤ 200 .
- Η καθημερινή ζήτηση του κέικ πολυτελείας είναι ≤ 300 .
- Το εργοστάσιο παράγει ≤ 400 κέικ καθημερινά.

Πόσα απλά κέικ και πόσα πολυτελείας μεγιστοποιούν το κέρδος;

x_1

x_2

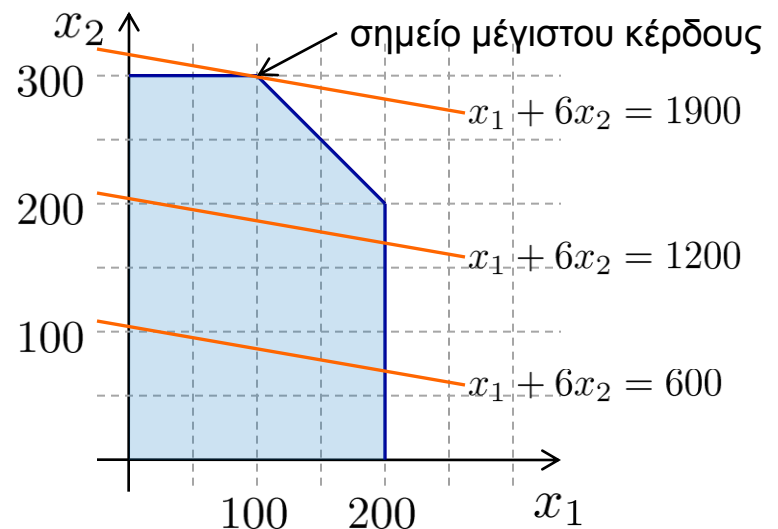
$$\max x_1 + 6x_2$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Γραμμικός Προγραμματισμός

Τυπική μορφή

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^n c_j x_j} \right\} \text{αποτιμητική συνάρτηση}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j} \right\} \text{περιορισμοί}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad \left. \vphantom{x_j \geq 0} \right\} \text{περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Τυπική μορφή

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^n} \right\} \text{αποτιμητική συνάρτηση}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^n} \right\} \text{περιορισμοί}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad \left. \vphantom{x_j} \right\} \text{περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

$$\max c^T x$$

$$Ax \leq b$$

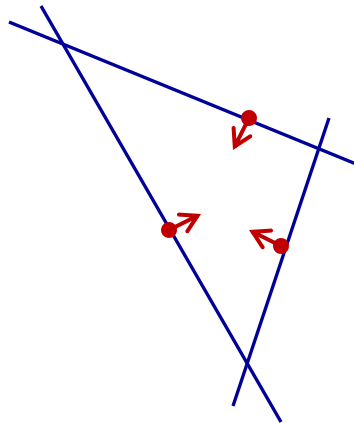
$$x \geq 0$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

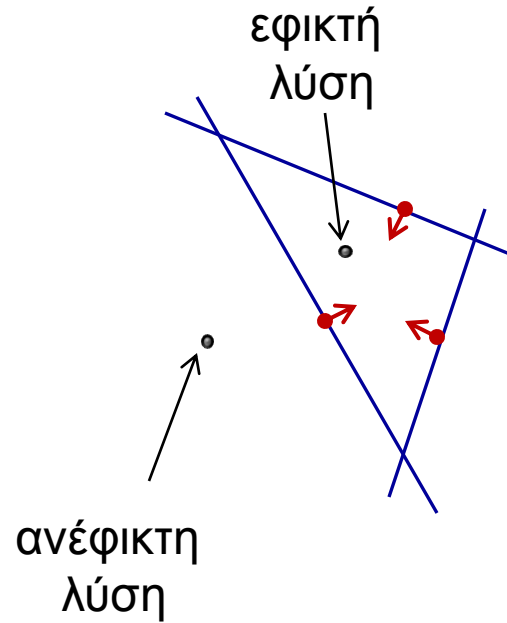
$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



εφικτό
γραμμικό πρόγραμμα :
μπορούν να ικανοποιηθούν
όλοι οι περιορισμοί

Γραμμικός Προγραμματισμός

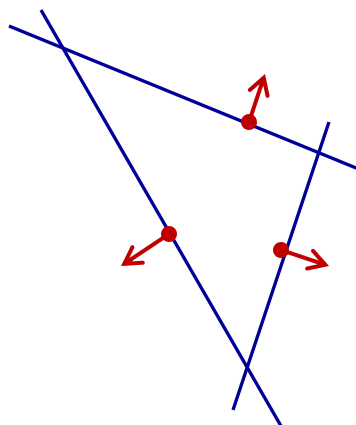
$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



εφικτό
γραμμικό πρόγραμμα :
μπορούν να ικανοποιηθούν
όλοι οι περιορισμοί

Γραμμικός Προγραμματισμός

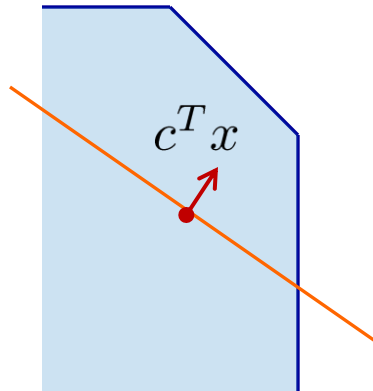
$$\begin{aligned}\max \quad & c^T x \\ Ax \leq & b \\ x \geq & 0\end{aligned}$$



μη εφικτό
γραμμικό πρόγραμμα

Γραμμικός Προγραμματισμός

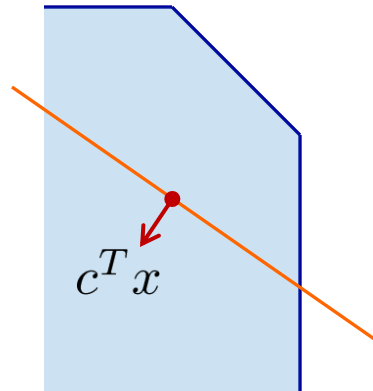
$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



εφικτό και φραγμένο
γραμμικό πρόγραμμα

Γραμμικός Προγραμματισμός

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



εφικτό αλλά μη φραγμένο
γραμμικό πρόγραμμα

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{llll} \min & -2x_1 & + & 3x_2 \\ & x_1 & + & x_2 = 7 \\ & x_1 & - & 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 & & \geq 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{llll} \max & 2x_1 & - & 3x_2 \\ & x_1 & + & x_2 = 7 \\ & x_1 & - & 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 & & \geq 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 \\ & x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 = 7 \\ & x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 \leq 4 \\ & x_1, & x'_2, & x''_2 & & \geq 0 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 \\ & x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & = & 7 \\ & x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & x'_2, & x''_2 & & & \geq & 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 \\ & x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \geq & 7 \\ & x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & x'_2, & x''_2 & & & \geq & 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 \\ & x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \leq & 7 \\ & -x_1 & - & x'_2 & + & x''_2 & \leq & -7 \\ & x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & x'_2, & x''_2 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 & & \\ & x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \leq & 7 \\ & -x_1 & - & x'_2 & + & x''_2 & \leq & -7 \\ & x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & x'_2, & x''_2 & & & \geq & 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 7 \\ & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & -7 \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε αποκλιτική μορφή

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε αποκλιτική μορφή

$$\begin{array}{rcccccccl} \max & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & & \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 7 & \\ & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & -7 & \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 & \\ & x_1, & x_2, & x_3 & & & \geq & 0 & \end{array}$$



$$\begin{array}{rcccccccc} \max & & & & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \\ & x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \\ & x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \\ & x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 & \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε αποκλιτική μορφή

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & & & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcllclclcl} z & = & & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε αποκλιτική μορφή

$$\begin{array}{rcllcllcl} \max & & & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$



τιμή
αποτιμητικής
συνάρτησης

βασικές
μεταβλητές

$$\begin{array}{rcllcllcl} z & = & & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε αποκλιτική μορφή

$$z = v + \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j, \quad i \in B$$

$$B = \text{δείκτες βασικών μεταβλητών} \quad |B| = m$$

$$N = \text{δείκτες μη βασικών μεταβλητών} \quad |N| = n$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε αποκλιτική μορφή

$$z = v + \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j, \quad i \in B$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & B = \{4, 5, 6\} \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \\ x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & N = \{1, 2, 3\} \\ x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v = 0$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Μετατροπή σε αποκλιτική μορφή

$$z = v + \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j, \quad i \in B$$

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & 28 & - & x_3/6 & - & x_5/6 & - & 2x_6/3 & B = \{1, 2, 4\} \\ x_1 & = & 8 & + & x_3/6 & + & x_5/6 & - & x_6/3 & \\ x_2 & = & 4 & - & 8x_3/3 & - & 2x_5/3 & + & x_6/3 & N = \{3, 5, 6\} \\ x_4 & = & 18 & - & x_3/2 & + & x_5/2 & & & \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 8/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad v = 28$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rcllcll} \max & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 24 \\ & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 36 \\ & & & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcllcllcl} z & = & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\ x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\ x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

αρχική λύση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\ x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

αρχική λύση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\ x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 30 \Rightarrow x_4 \leq 0$$

$$x_1 \geq 12 \Rightarrow x_5 \leq 0$$

$$x_1 \geq 9 \Rightarrow x_6 \leq 0$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\ x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 30 \Rightarrow x_4 \leq 0$$

$$x_1 \geq 12 \Rightarrow x_5 \leq 0$$

$$x_1 \geq 9 \Rightarrow x_6 \leq 0$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\ x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

$$x_1 = 9 - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_6}{4} \Rightarrow \begin{array}{rclclclcl} z & = & 27 & + & x_2/4 & + & x_3/2 & - & 3x_6/4 \\ x_1 & = & 9 & - & x_2/4 & - & x_3/2 & - & x_6/4 \\ x_4 & = & 21 & - & 3x_2/4 & - & 5x_3/2 & + & x_6/4 \\ x_5 & = & 6 & - & 3x_2/2 & - & 4x_3 & + & x_6/2 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & 27 & + & x_2/4 & + & x_3/2 & - & 3x_6/4 \\ x_1 & = & 9 & - & x_2/4 & - & x_3/2 & - & x_6/4 \\ x_4 & = & 21 & - & 3x_2/4 & - & 5x_3/2 & + & x_6/4 \\ x_5 & = & 6 & - & 3x_2/2 & - & 4x_3 & + & x_6/2 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & 111/4 & + & x_2/16 & - & x_5/8 & - & 11x_6/16 \\ x_1 & = & 33/4 & - & x_2/16 & + & x_5/8 & - & 5x_6/16 \\ x_3 & = & 3/2 & - & 3x_2/8 & - & x_5/4 & + & x_6/8 \\ x_4 & = & 69/4 & + & 3x_2/16 & - & 5x_5/8 & - & x_6/16 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & 111/4 & + & x_2/16 & - & x_5/8 & - & 11x_6/16 \\ x_1 & = & 33/4 & - & x_2/16 & + & x_5/8 & - & 5x_6/16 \\ x_3 & = & 3/2 & - & 3x_2/8 & - & x_5/4 & + & x_6/8 \\ x_4 & = & 69/4 & + & 3x_2/16 & - & 5x_5/8 & - & x_6/16 \end{array}$$

⇓

$$\begin{array}{rclclclcl} z & = & 28 & - & x_3/6 & - & x_5/6 & - & 2x_6/3 \\ x_1 & = & 8 & + & x_3/6 & + & x_5/6 & - & x_6/3 \\ x_2 & = & 4 & - & 8x_3/3 & - & 2x_5/3 & + & x_6/3 \\ x_4 & = & 18 & - & x_3/2 & + & x_5/2 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πολυτοπικός Αλγόριθμος - Παράδειγμα

$$\begin{aligned} z &= 28 - x_3/6 - x_5/6 - 2x_6/3 \\ x_1 &= 8 + x_3/6 + x_5/6 - x_6/3 \\ x_2 &= 4 - 8x_3/3 - 2x_5/3 + x_6/3 \\ x_4 &= 18 - x_3/2 + x_5/2 \end{aligned}$$

βέλτιστη λύση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 28$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

- ▶ Ο πολυτοπικός αλγόριθμος έχει εκθετικό χρόνο εκτέλεσης στη χειρότερη περίπτωση. Χρησιμοποιείται όμως σε πολλές εφαρμογές καθώς η απόδοση του είναι πολύ καλή στην πράξη (η χειρότερη περίπτωση εμφανίζεται πολύ σπάνια).
- ▶ Υπάρχουν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου:
 - Ελλειψοειδής αλγόριθμος (όχι καλός στην πράξη)
 - Αλγόριθμοι εσωτερικού σημείου (αρκετά καλοί στην πράξη)
- ▶ Επομένως Γραμμικός Προγραμματισμός $\in \mathbf{P}$

Δυσικότητα Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρωτεύον Πρόγραμμα (Π)

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Δευτερεύον Πρόγραμμα (Δ)

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Δυσκότητα Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρωτεύον Πρόγραμμα (Π)

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Δευτερεύον Πρόγραμμα (Δ)

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Π.χ.

$$\begin{array}{rclclcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 24 \\ & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 36 \\ & & & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} \min & 30y_1 & + & 24y_2 & + & 36y_3 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & \geq & 3 \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\ & 3y_1 & + & 5y_2 & + & 2y_3 & \geq & 2 \\ & & & y_1, & y_2, & y_3, & \geq & 0 \end{array}$$

Δυσικότητα Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρωτεύον Πρόγραμμα (Π)

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Δευτερεύον Πρόγραμμα (Δ)

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Ασθενής Δυσικότητα

Έστω $\bar{x}$ μια οποιαδήποτε εφικτή λύση του (Π) και $\bar{y}$ μια οποιαδήποτε εφικτή λύση του (Δ). Τότε

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

Δυσικότητα Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρωτεύον Πρόγραμμα (Π)

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Δευτερεύον Πρόγραμμα (Δ)

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Ασθενής Δυσικότητα

Έστω $\bar{x}$ μια οποιαδήποτε εφικτή λύση του (Π) και $\bar{y}$ μια οποιαδήποτε εφικτή λύση του (Δ). Τότε

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

Απόδειξη

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \right) \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{y}_i \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

Δυσικότητα Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρωτεύον Πρόγραμμα (Π)

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Δευτερεύον Πρόγραμμα (Δ)

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Ισχυρή Δυσικότητα

Έστω $\bar{x}$ μια βέλτιστη λύση του (Π) και $\bar{y}$ μια βέλτιστη λύση του (Δ). Τότε

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

Ακέραιος Προγραμματισμός

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^n c_j x_j} \right\} \text{αποτιμητική συνάρτηση}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j} \right\} \text{περιορισμοί}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad \left. \vphantom{x_j \geq 0} \right\} \text{περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

$$x_j \in \mathbf{Z}, j = 1, 2, \dots, n \quad \left. \vphantom{x_j \in \mathbf{Z}} \right\} \text{ακέραιες τιμές}$$

► Το πρόβλημα του Ακέραιου Προγραμματισμού είναι **NP**-πλήρες

Ακέραιος Προγραμματισμός

Σταθμισμένο κομβικό κάλυμμα

Γράφημα $G = (V, E)$

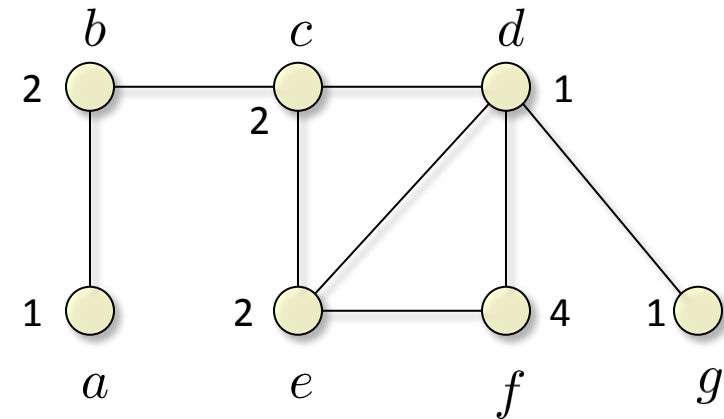
Ένα υποσύνολο κόμβων $U \subseteq V$ είναι κομβικό κάλυμμα αν για κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$ έχουμε $u \in U$ ή $v \in U$ (ή και τα δύο)

Βάρη κόμβων : $w_i \geq 0, \forall i \in V$

Βάρος καλύμματος $U \subseteq V : w(U) = \sum_{i \in U} w_i$

Πρόβλημα βελτιστοποίησης :

Θέλουμε κομβικό κάλυμμα με ελάχιστο βάρος



Ακέραιος Προγραμματισμός

Σταθμισμένο κομβικό κάλυμμα

Γράφημα $G = (V, E)$

Ένα υποσύνολο κόμβων $U \subseteq V$ είναι κομβικό κάλυμμα αν για κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$ έχουμε $u \in U$ ή $v \in U$ (ή και τα δύο)

Βάρη κόμβων : $w_i \geq 0, \forall i \in V$

Βάρος καλύμματος $U \subseteq V : w(U) = \sum_{i \in U} w_i$

Πρόβλημα βελτιστοποίησης :

Θέλουμε κομβικό κάλυμμα με ελάχιστο βάρος

Ακέραιο Πρόγραμμα

μεταβλητή για κάθε $i \in V$

$$\min \sum_{i \in V} w_i x_i$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in U \\ 0, & i \notin U \end{cases} \quad \begin{aligned} x_i + x_j &\geq 1, (i, j) \in E \\ x_i &\in \{0, 1\}, i \in V \end{aligned}$$

