Μάθημα: Γραμμικός Προγραμματισμός

Διδάσκων: Δούμπος Μιχαήλ



2η Εργασία

Αυγέρης Σωτήριος: 2013010138

Ρασούλης Αλέξανδρος: 2015010123

Χανιά 2020

Πίνακας Περιεχομένων

[**Ερώτημα 1: Μοντελοποίηση του προβλήματος** 1](#_Toc34800723)

[**Ερώτημα 2 : Γραφική παρουσίαση** 2](#_Toc34800724)

[**Βασικές εφικτές λύσεις** 2](#_Toc34800725)

[**Βασικές αλλά μη εφικτές λύσεις** 2](#_Toc34800726)

[**Ερώτημα 3** 3](#_Toc34800727)

[**Ερώτημα 4: Υλοιποίηση της Simplex μέσω πινάκων** 4](#_Toc34800728)

[**Αρχικοποίηση – 1ος Πίνακας** 4](#_Toc34800729)

[**1η Επανάληψη Simplex** 4](#_Toc34800730)

[**Γραμμοπράξεις** 5](#_Toc34800731)

[**Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών** 5](#_Toc34800732)

[**Υπολογισμός νέων ΟΚΕ** 5](#_Toc34800733)

[**Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης** 6](#_Toc34800734)

[**2η Επανάληψη Simplex** 6](#_Toc34800735)

[**Γραμμοπράξεις:** 6](#_Toc34800736)

[**Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών:** 7](#_Toc34800737)

[**Υπολογισμός νέων ΟΚΕ** 7](#_Toc34800738)

[**Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης:** 7](#_Toc34800739)

[**Ερώτημα 5** 8](#_Toc34800740)

[**Ερώτημα 6** 8](#_Toc34800741)

[**Ερώτημα 7** 8](#_Toc34800742)

[**Υπολογισμός σημείου και ωρομισθίου** 9](#_Toc34800743)

[**Ερώτημα 8** 9](#_Toc34800744)

# **Ερώτημα 1: Περιγραφή του Γ.Π.**

Η αντικειμενική συνάρτηση έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος του συνολικού κόστους παραγωγής – αποθεματοποίaησης των προϊόντων για δοσμένες χρονικές περίοδούς και για συγκεκριμένο αριθμό προϊόντων, και της μισθοδοσίας (κανονική και υπερωριακή), για αυτές τις χρονικές περιόδους.

1. Ο πρώτος περιορισμός αναφέρει ότι σε μια χρονική περίοδο t η ζήτηση ενός προϊόντος πρέπει να ισούται με το άθροισμα των μονάδων παραγωγής του και με την διαφορά του αποθέματος αυτού του προϊόντος την συγκεκριμένη περίοδο σε σχέση με την προηγούμενη.
2. Ο περιορισμός υποδεικνύει ότι το σύνολο των απαιτούμενων εργατοωρών για την παραγωγή του συνόλου των προϊόντων πρέπει να ισούται με το άθροισμα της κανονικής αλλά και υπερωριακής εργασίας που χρησιμοποιούνται στην περίοδο t.
3. Οι ώρες κανονικής εργασίας δεν επιτρέπεται να ξεπερνούν τις διαθέσιμες ώρες μιας συγκεκριμένης περιόδου.
4. Η υπερωριακή εργασία που χρησιμοποιήθηκε την περίοδο t δεν πρέπει να υπερβαίνει το ποσοστό p επί των ωρών κανονικής εργασίας της περιόδου.
5. Για κάθε προϊόν και για κάθε περίοδο λειτουργίας οι μονάδες που παράχθηκαν, τα αποθέματα του προϊόντος, οι ώρες κανονικής και υπερωριακής εργασίας πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδέν.

# **Ερώτημα 2 : Παρουσίαση του Γ.Π.**

$v\_{1}$=1€/kg
$v\_{2}$=0,5€/kg
$c\_{1t}$=0,2€/kg
$c\_{2t}$=0,1€/kg
$r\_{t}$=5€/h
$h\_{t}$=10€/h
$R\_{1,2}$=3.500h
$R\_{3}$=2.500h
$p\_{}$=30%
$k\_{1}$=1h
$k\_{2}$=0.5h/kg
$I\_{i,0}$=0

Min $X\_{1,1}+0.2I\_{1,1}+X\_{1,2}+0.2I\_{1,2}+X\_{1,3}+0.2I\_{1,3}+0,5X\_{2,1}+0.1I\_{2,1}+0,5X\_{2,2}+0.1I\_{2,2}+0.5X\_{2,3}+0.1I\_{2,3}+5W\_{1}+10O\_{1}+5W\_{2}+10O\_{2}+5W\_{3}+10O\_{3}$

Υπό:

1. $X\_{1,1}-I\_{1,1}=300$
2. $X\_{1,2}+I\_{1,1}-I\_{1,2}=600$
3. $X\_{1,3}+I\_{1,2}-I\_{1,3}=750$
4. $X\_{2,1}-I\_{2,1}=3000$
5. $X\_{2,2}+I\_{2,1}-I\_{2,2}=5000$
6. $X\_{2,3}+I\_{2,2}-I\_{2,3}=4000$
7. $X\_{1,1}+0,5X\_{2,1}-W\_{1}-O\_{1}=0$
8. $X\_{1,2}+0,5X\_{2,2}-W\_{2}-O\_{2}=0$
9. $X\_{1,3}+0,5X\_{2,3}-W\_{3}-O\_{3}=0$
10. $W\_{1}\leq 3500$
11. $W\_{2}\leq 3500$
12. $W\_{3}\leq 2500$
13. $Ο\_{1}-0,3W\_{1}\leq 0$
14. $Ο\_{2}-0,3W\_{2}\leq 0$
15. $Ο\_{3}-0,3W\_{3}\leq 0$

$$X\_{1,1},Χ\_{1,2},Χ\_{1,3},Χ\_{2,1},Χ\_{2,2},Χ\_{2,3},Ι\_{1,1},Ι\_{1,2},Ι\_{1,3},Ι\_{2,1},Ι\_{2,2},Ι\_{2,3},W\_{1},W\_{2},W\_{3},O\_{1},O\_{2},O\_{3 }\geq 0$$

# **Ερώτημα 3**

Το πρωτεύον θα είναι το ΓΠ του ερωτήματος 2.

 **Πρωτεύον**

Min $X\_{1,1}+0.2I\_{1,1}+X\_{1,2}+0.2I\_{1,2}+X\_{1,3}+0.2I\_{1,3}+0,5X\_{2,1}+0.1I\_{2,1}+0,5X\_{2,2}+0.1I\_{2,2}+0.5X\_{2,3}+0.1I\_{2,3}+5W\_{1}+10O\_{1}+5W\_{2}+10O\_{2}+5W\_{3}+10O\_{3}$

Υπό:

1. $X\_{1,1}-I\_{1,1}=300$
2. $X\_{1,2}+I\_{1,1}-I\_{1,2}=600$
3. $X\_{1,3}+I\_{1,2}-I\_{1,3}=750$
4. $X\_{2,1}-I\_{2,1}=3000$
5. $X\_{2,2}+I\_{2,1}-I\_{2,2}=5000$
6. $X\_{2,3}+I\_{2,2}-I\_{2,3}=4000$
7. $X\_{1,1}+0.5X\_{2,1}-W\_{1}-O\_{1}=0$
8. $X\_{1,2}+0.5X\_{2,2}-W\_{2}-O\_{2}=0$
9. $X\_{1,3}+0.5X\_{2,3}-W\_{3}-O\_{3}=0$
10. $W\_{1}\leq 3500$
11. $W\_{2}\leq 3500$
12. $W\_{3}\leq 2500$
13. $Ο\_{1}-0,3W\_{1}\leq 0$
14. $Ο\_{2}-0,3W\_{2}\leq 0$
15. $Ο\_{3}-0,3W\_{3}\leq 0$

**Δυικό**

Διαμόρφωση δυικού:

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυικού για σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί μια δυική μεταβλητή. Συνεπώς στη συγκεκριμένη περίπτωση μετατροπής του πρωτεύοντος ΓΠ σε δυικό ΓΠ, θα ισχύουν τα παρακάτω:
Υπάρχουν 18 μεταβλητές και 15 περιορισμοί στο πρωτεύον ΓΠ άρα το δυικό θα έχει 15 μεταβλητές και 18 περιορισμούς.

Αρχικά η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, άρα στο δυικό θα είναι σε μορφή μεγιστοποίησης. Για την κατασκευή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυικού χρησιμοποιήθηκαν τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος πολλαπλασιαζόμενα επί των αντίστοιχων μεταβλητών του δυικού. Να σημειωθεί ότι οι μεταβλητές του δυικού που αντιστοιχούν στους περιορισμούς των οποίων το δεξί μέλος είναι μηδέν δεν είναι απαραίτητο να αναφερθούν.

max $300u\_{1}+600u\_{2}+750u\_{3}+3000u\_{4}+5000u\_{5}+4000u\_{6}+3500u\_{10}+3500u\_{11}+2500u\_{12}$

Για την κατασκευή των περιορισμών του δυικού θα ισχύουν οι εξής κανόνες:

* Για τις θετικές μεταβλητές του πρωτεύοντος οι περιορισμοί του δυικού θα είναι του τύπου «$\leq $».
* Για τις μεταβλητές του πρωτεύοντος οι περιορισμοί του δυικού θα είναι του τύπου «$\geq $».
* Για τις μεταβλητές που ανήκουν στο $R$ οι περιορισμοί τους θα είναι του τύπου «$=$».

Υπο:

1. $u\_{1}+u\_{7}\leq 1$ $X\_{1,1}$
2. $-u\_{1}+u\_{2}\leq 0.2$ $I\_{1,1}$
3. $u\_{2}+u\_{8}\leq 1$ $X\_{1,2}$
4. $-u\_{2}+u\_{3}\leq 0.2$ $I\_{1,2}$
5. $u\_{3}+u\_{9}\leq 1$ $X\_{1,3}$
6. $-u\_{3}\leq 0.2$ $I\_{1,3}$
7. $u\_{4}+0.5u\_{7}\leq 0.5$$X\_{2,1}$
8. $-u\_{4}+u\_{5}\leq 0.1$ $I\_{2,1}$
9. $u\_{5}+0.5u\_{8}\leq 0.5$ $X\_{2,2}$
10. $-u\_{5}+u\_{6}\leq 0.1$ $I\_{2,2}$
11. $u\_{6}+0.5u\_{9}\leq 0.5$ $X\_{2,3}$
12. $-u\_{6}\leq 0.1$ $I\_{2,3}$
13. $-u\_{7}+u\_{10}-0.3u\_{13}\leq 5$ $W\_{1}$
14. $-u\_{7}+u\_{13}\leq 10$ $O\_{1}$
15. $-u\_{8}+u\_{11}-0.3u\_{14}\leq 5$ $W\_{2}$
16. $-u\_{8}+u\_{14}\leq 10$$O\_{2}$
17. $-u\_{9}+u\_{12}-0.3u\_{15}\leq 5$ $W\_{3}$
18. $-u\_{9}+u\_{15}\leq 10$ $O\_{3}$

Για την διαμόρφωση των μεταβλητών του δυικού από το πρωτεύον ισχύουν οι εξής κανόνες:

* Για τους περιορισμούς του πρωτεύοντος «$\geq $» οι μεταβλητές του δυικού θα είναι θετικές ή μηδέν.
* Για τους περιορισμούς του πρωτεύοντος «$\leq $» οι μεταβλητές του δυικού θα είναι αρνητικές ή μηδέν.
* Για τους περιορισμούς του πρωτεύοντος «$=$» οι μεταβλητές του δυικού θα ανήκουν στο $R$.

Οι περιορισμοί του πρωτεύοντος από 1 έως 9 είναι του τύπου $"="$ άρα οι μεταβλητές $u\_{1}$ έως $u\_{9}$ ανήκουν στο $R$

Οι περιορισμοί του πρωτεύοντος από 10 έως 15 είναι τύπου $"\leq "$ άρα οι μεταβλητές $u\_{10}$ έως $u\_{15}$ θα είναι $\leq $0

Τελική μορφή δυικού ΓΠ:

max $300u\_{1}+600u\_{2}+750u\_{3}+3000u\_{4}+5000u\_{5}+4000u\_{6}+3500u\_{10}+3500u\_{11}+2500u\_{12}$

Υπο:

1. $u\_{1}+u\_{7}\leq 1$ $X\_{1,1}$
2. $-u\_{1}+u\_{2}\leq 0.2$ $I\_{1,1}$
3. $u\_{2}+u\_{8}\leq 1$ $X\_{1,2}$
4. $-u\_{2}+u\_{3}\leq 0.2$ $I\_{1,2}$
5. $u\_{3}+u\_{9}\leq 1$ $X\_{1,3}$
6. $-u\_{3}\leq 0.2$ $I\_{1,3}$
7. $u\_{4}+0.5u\_{7}\leq 0.5$$X\_{2,1}$
8. $-u\_{4}+u\_{5}\leq 0.1$ $I\_{2,1}$
9. $u\_{5}+0.5u\_{8}\leq 0.5$ $X\_{2,2}$
10. $-u\_{5}+u\_{6}\leq 0.1$ $I\_{2,2}$
11. $u\_{6}+0.5u\_{9}\leq 0.5$ $X\_{2,3}$
12. $-u\_{6}\leq 0.1$ $I\_{2,3}$
13. $-u\_{7}+u\_{10}-0.3u\_{13}\leq 5$ $W\_{1}$
14. $-u\_{7}+u\_{13}\leq 10$ $O\_{1}$
15. $-u\_{8}+u\_{11}-0.3u\_{14}\leq 5$ $W\_{2}$
16. $-u\_{8}+u\_{14}\leq 10$$O\_{2}$
17. $-u\_{9}+u\_{12}-0.3u\_{15}\leq 5$ $W\_{3}$
18. $-u\_{9}+u\_{15}\leq 10$ $O\_{3}$

$u\_{1}$,$ u\_{2}$,$ u\_{3}$,$ u\_{4}$,$ u\_{5}$,$ u\_{6}$,$ u\_{7}$,$ u\_{8}$,$ u\_{9} $∈$R$

$u\_{10}$,$ u\_{11}$,$ u\_{12}$, $u\_{13}$, $u\_{14}$, $u\_{15}$ $\leq $ 0

# **Ερώτημα 4**

Α) Το βέλτιστο πλάνο παραγωγής για τους επόμενους 3 μήνες είναι:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Μήνες | Προϊόν Α’ | Προϊόν Β’ |
| 1ος | 300 | 3000 |
| 2ος | 850 | 5000 |
| 3ος | 500 | 4000 |

Β) Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 45.950

Γ) 1ος μήνας 1800 , 2ος μήνας 3350, 3ος μήνας 2500

Δ)Βασικές μεταβλητές είναι οι εξής: $X\_{1,1} ,X\_{1,2}, I\_{1,2}, X\_{1,3}, X\_{2,1}, X\_{2,2}, X\_{2,3}, W\_{1}, W\_{2}, W\_{3}$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Όλες οι μεταβλητές απόφασης που δεν είναι βασικές, είναι εξ’ ορισμού ίσες με μηδέν. Κάθε μεταβλητή απόφασης που σε μια λύση ενός ΓΠ δεν είναι ίση με μηδέν πρέπει να είναι βασική εάν υποτεθεί ότι η λύση είναι βασική που στην περίπτωση μας με βάση το λογισμικό έχουμε ΒΕΛ.

# **Ερώτημα 5**

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του λογισμικού η βέλτιστη λύση είναι εκφυλισμένη γιατί η λύση μας εμπεριέχει βασικές μεταβλητές που είναι μηδέν.

Στο διάνυσμα b η μεταβλητή $I\_{2,2}$=0 γεγονός που σημαίνει ότι είναι μη βασική. Από την αναφορά ευαισθησίας της λύσης του ΓΠ βλέπουμε πως το ΟΚΕ της μεταβλητής $I\_{2,2}$=0. Από τα παραπάνω δεδομένα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

Μπορούμε να βρούμε μια ακόμα βέλτιστη λύση που δεν είναι ΒΕΛ, από το δυικό, της οποίας υπολογίστηκε το b και ισούται με:
b=[300 0 600 0 750 0 3000 0 5500 500 3500 0 1800 0 3350 0 2500 0]

# **Ερώτημα 6**

Μεταβλητές απόκλισης-τελικές τιμές πρωτεύον ΓΠ. Για να βρεθούν οι εφικτές λύσεις του δυικού από την λύση του πρωτεύοντος θα πρέπει να ισχύουν οι εξής κανόνες:
α) $x\_{i}^{\\_}\*u\_{i}=0$ $∀$ i=1…..15
β) $u\_{j}^{\\_}\*x\_{j}=0$ $∀$ i=1…..18

Πρότυπη μορφή δυϊκού Γ.Π.

Οι μεταβλητές που είναι μη θετικές και οι μεταβλητές που είναι ελεύθερες πρόσημου αντικαθίστανται ανάλογα

$$u\_{1}=u\_{1}^{'}-u\_{1}^{''},u\_{2}=u\_{2}^{'}-u\_{2}^{''},u\_{3}=u\_{3}^{'}-u\_{3}^{''},u\_{4}=u\_{4}^{'}-u\_{4}^{''},u\_{5}=u\_{5}^{'}-u\_{5}^{''},$$

$$u\_{6}=u\_{6}^{'}-u\_{6}^{''},u\_{7}=u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''},u\_{8}=u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''},u\_{9}=u\_{9}^{'}-u\_{9}''$$

$u\_{10}^{'}=-u\_{10}$,$ u\_{11}^{'}=-u\_{11}$,$ u\_{12}^{'}=-u\_{12}$, $u'\_{13}=-u\_{13}$, $u\_{14}^{'}=-u\_{14}$, $u\_{15}^{'}=-u\_{15}$

Υπο:

1. $u\_{1}^{'}-u\_{1}^{''}+u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''}+u\_{1}^{\\_}=1$ $X\_{1,1}$
2. $–\left(u\_{1}^{'}-u\_{1}^{''}\right)+u\_{2}^{'}-u\_{2}^{''}+u\_{2}^{\\_}=0.2$ $I\_{1,1}$
3. $u\_{2}^{'}-u\_{2}^{''}+u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}+u\_{3}^{\\_}=1$ $X\_{1,2}$
4. $–\left(u\_{2}^{'}-u\_{2}^{''}\right)+u\_{3}^{'}-u\_{3}^{''}+u\_{4}^{\\_}=0.2$ $I\_{1,2}$
5. $u\_{3}^{'}-u\_{3}^{''}+u\_{9}^{'}-u\_{9}^{''}+u\_{5}^{\\_}=1$ $X\_{1,3}$
6. $-\left(u\_{3}^{'}-u\_{3}^{''}\right)+u\_{6}^{\\_}=0.2$ $I\_{1,3}$
7. $u\_{4}^{'}-u\_{4}^{''}+0.5\left(u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''}\right)+u\_{7}^{\\_}=0.5$$X\_{2,1}$
8. $–\left(u\_{4}^{'}-u\_{4}^{''}\right)+u\_{5}^{'}-u\_{5}^{''}+u\_{8}^{\\_}=0.1$ $I\_{2,1}$
9. $u\_{5}^{'}-u\_{5}^{''}+0.5\left(u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}\right)+u\_{9}^{\\_}=0.5$ $X\_{2,2}$
10. $–\left(u\_{5}^{'}-u\_{5}^{''}\right)+u\_{6}^{'}-u\_{6}^{''}+u\_{10}^{\\_}=0.1$ $I\_{2,2}$
11. $u\_{6}^{'}-u\_{6}^{''}+0.5\left(u\_{9}^{'}-u\_{9}^{''}\right)+u\_{11}^{\\_}=0.5$ $X\_{2,3}$
12. $–\left(u\_{6}^{'}-u\_{6}^{''}\right)+u\_{12}^{\\_}=0.1$ $I\_{2,3}$
13. $-(u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''})-u\_{10}^{'}+0.3u\_{13}^{'}+u\_{13}^{\\_}=5$ $W\_{1}$
14. $-(u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''})-u\_{13}^{'}+u\_{14}^{\\_}=10$ $O\_{1}$
15. $-\left(u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}\right)-u\_{11}^{'}+0.3u\_{14}^{'}+u\_{15}^{\\_}=5$ $W\_{2}$
16. $-\left(u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}\right)-u'\_{14}^{'}+u\_{16}^{\\_}=10$$O\_{2}$
17. $-(u\_{9}^{'}-u\_{9}'')-u'\_{12}^{'}+0.3u'\_{15}^{'}+u\_{17}^{\\_}=5$ $W\_{3}$
18. $-\left(u\_{9}^{'}-u\_{9}^{''}\right)-u\_{15}^{'}+u\_{18}^{\\_}=10$ $O\_{3}$

$u\_{1}^{'},u\_{1}^{''},u\_{2}^{'},u\_{2}^{''},u\_{3}^{'},u\_{3}^{''},u\_{4}^{'},u\_{4}^{''},u\_{5}^{'},u\_{5}^{''},u\_{6}^{'},u\_{6}^{''},u\_{7}^{'},u\_{7}^{''},u\_{8}^{'},u\_{8}^{''},u\_{9}^{'},u\_{9}^{''},u\_{10}^{'}$,$ u\_{11}^{'}$,$ u\_{12}^{'}$, $u^{'}\_{13}$, $u\_{14}^{'}$, $u\_{15}^{'}\geq 0$

$$u\_{1}^{\\_},u\_{2}^{\\_},u\_{3}^{\\_},u\_{4}^{\\_},u\_{5}^{\\_},u\_{6}^{\\_},u\_{7}^{\\_},u\_{8}^{\\_},u\_{9}^{\\_},u\_{10}^{\\_},u\_{11}^{\\_},u\_{12}^{\\_},u\_{13}^{\\_},u\_{14}^{\\_},u\_{15}^{\\_},u\_{16}^{\\_},u\_{17}^{\\_},u\_{18}^{\\_}\geq 0$$

Επειδή όλοι οι περιορισμοί είναι της μορφής $\leq $ οι μεταβλητές απόκλισης προστίθενται και οι περιορισμοί μετατρέπονται σε μορφή = .

|  |  |
| --- | --- |
| Αποκλίσεις | T. Τιμές |
| 0 | U1 |
| U2 | U2 |
| 0 | U3 |
| 0 | U4 |
| 0 | U5 |
| U6 | U6 |
| 0 | U7 |
| U8 | U8 |
| 0 | U9 |
| U10 | U10=0 |
| 0 | U11=0 |
| U12 | U12 |
| 0 | U13=0 |
| U14 | U14=0 |
| 0 | U15=0 |
| U16 |  |
| 0 |  |
| U18 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Αποκλίσεις | T. Τιμές |
| 0 | 300 |
| 0 | 0 |
| 0 | 850 |
| 0 | 250 |
| 750 | 500 |
| 0 | 0 |
| 0 | 3000 |
| 0 | 0 |
| 0 | 5000 |
| 1700 | 0 |
| 150 | 4000 |
| 0 | 0 |
| 540 | 1800 |
| 1005 | 0 |
| 0 | 3350 |
|  | 0 |
|  | 2500 |
|  | 0 |

1. $u\_{1}^{'}-u\_{1}^{''}+u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''}=1$ $X\_{1,1}$
2. $–\left(u\_{1}^{'}-u\_{1}^{''}\right)+u\_{2}^{'}-u\_{2}^{''}+u\_{2}^{\\_}=0.2$ $I\_{1,1}$
3. $u\_{2}^{'}-u\_{2}^{''}+u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}=1$ $X\_{1,2}$
4. $–\left(u\_{2}^{'}-u\_{2}^{''}\right)+u\_{3}^{'}-u\_{3}^{''}=0.2$ $I\_{1,2}$
5. $u\_{3}^{'}-u\_{3}^{''}+u\_{9}^{'}-u\_{9}^{''}=1$ $X\_{1,3}$
6. $-\left(u\_{3}^{'}-u\_{3}^{''}\right)+u\_{6}^{\\_}=0.2$ $I\_{1,3}$
7. $u\_{4}^{'}-u\_{4}^{''}+0.5\left(u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''}\right)=0.5$$X\_{2,1}$
8. $–\left(u\_{4}^{'}-u\_{4}^{''}\right)+u\_{8}^{\\_}=0.1$ $I\_{2,1}$
9. $0.5\left(u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}\right)=0.5$ $X\_{2,2}$
10. $u\_{6}^{'}-u\_{6}^{''}+u\_{10}^{\\_}=0.1$ $I\_{2,2}$
11. $u\_{6}^{'}-u\_{6}^{''}+0.5\left(u\_{9}^{'}-u\_{9}^{''}\right)=0.5$ $X\_{2,3}$
12. $–\left(u\_{6}^{'}-u\_{6}^{''}\right)+u\_{12}^{\\_}=0.1$ $I\_{2,3}$
13. $-(u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''})\_{}^{'}=5$ $W\_{1}$
14. $-(u\_{7}^{'}-u\_{7}^{''})-\_{}^{}+u\_{14}^{\\_}=10$ $O\_{1}$
15. $-\left(u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}\right)+=5$ $W\_{2}$
16. $-\left(u\_{8}^{'}-u\_{8}^{''}\right)+u\_{16}^{\\_}=10$$O\_{2}$
17. $-(u\_{9}^{'}-u\_{9}'')-u'\_{12}^{'}+0.3u'\_{15}^{'}+=5$ $W\_{3}$
18. $-\left(u\_{9}^{'}-u\_{9}^{''}\right)-u\_{15}^{'}+u\_{18}^{\\_}=10$ $O\_{3}$

# **Ερώτημα 7**