

Μάθημα: Γραμμικός Προγραμματισμός

Διδάσκων: Δούμπος Μιχαήλ



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΡΗΤΗΣ**

1^η Εργασία

Αυγέρης Σωτήριος: 2013010138

Ρασούλης Αλέξανδρος: 2015010123

Χανιά 2020

Πίνακας Περιεχομένων

Ερώτημα 1: Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	1
Ερώτημα 2 : Γραφική παρουσίαση	2
Βασικές εφικτές λύσεις	2
Βασικές αλλά μη εφικτές λύσεις	2
Ερώτημα 3	3
Ερώτημα 4: Υλοποίηση της Simplex μέσω πινάκων	4
Αρχικοποίηση – 1 ^{ος} Πίνακας.....	4
1η Επανάληψη Simplex	4
Γραμμοπράξεις.....	5
Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών	5
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ	5
Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	6
2 ^η Επανάληψη Simplex.....	6
Γραμμοπράξεις:.....	6
Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών:	7
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ	7
Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης:	7
Ερώτημα 5	8
Ερώτημα 6	8
Ερώτημα 7	8
Υπολογισμός σημείου και ωρομισθίου	9
Ερώτημα 8	9

Ερώτημα 1: Μοντελοποίηση του προβλήματος

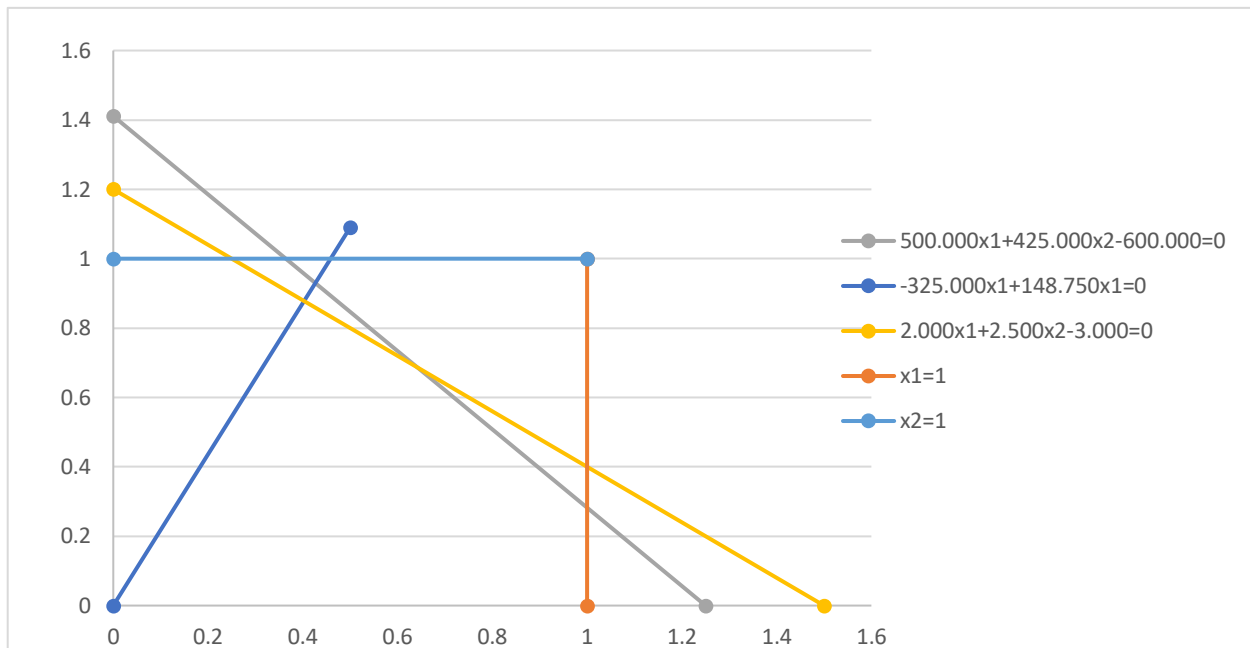
Αρχικά αυτό που αναζητάμε είναι η αντικειμενική συνάρτηση, η οποία θα μας περιγράφει το κέρδος που θα αποκομίσουμε μεσά από την δραστηριότητα στην οποία αναφέρεται η εκφώνηση. Δηλαδή μας ενδιαφέρει να δούμε, με βάση το διαθέσιμο κεφάλαιο και τις εργατοώρες μας, τα ποσοστά συμμετοχής που μπορούμε να έχουμε στις εκάστοτε επενδύσεις, άρα και ποιο θα είναι το συνολικό κέρδος. Με βάση και την εκφώνηση οι μεταβλητές απόφασης θα είναι τα ποσοστά συμμετοχής του οργανισμού στα δύο επενδυτικά σχέδια, όπου x_1 το ποσοστό συμμετοχής για το σχέδιο Α' και x_2 το ποσοστό συμμετοχής για το σχέδιο Β'.

Εκφράζοντας λοιπόν τα κέρδη συναρτήσει των μεταβλητών απόφασης θα έχουμε την αντικειμενική μας συνάρτηση ως εξής: $\max 150.000x_1 + 175.000x_2$ την οποία προφανώς καλούμαστε να μεγιστοποιήσουμε καθώς εκφράζει το κέρδος από την επένδυση.

Το επόμενο μας βήμα είναι ο καθορισμός όλων των περιορισμών που περιγράφουν και καθορίζουν επακριβώς το πρόβλημα μας, όποτε βασιζόμενοι στα δοθέντα δεδομένα παρουσιάζουμε τους παρακάτω περιορισμούς:

1. $500.000x_1 + 425.000x_2 \leq 600.000$
2. $2.000x_1 + 2.500x_2 \leq 3.000$
3. $-325.000x_1 + 148.750x_2 \leq 0$
4. $x_1 \leq 1$
5. $x_2 \leq 1$
6. $x_1, x_2 \geq 0$

Ερώτημα 2 : Γραφική παρουσίαση



Βασικές εφικτές λύσεις

- A(0 , 0)
- B(1 , 0)
- Γ(1 , 0.235) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών $x_1=1$ και $500.000x_1 + 425.000x_2 - 600.000=0$
- Δ(0.5625 , 0.75) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών $2.000x_1 + 2.500x_2 - 3.000 = 0$ και $500.000x_1 + 425.000x_2 - 600.000=0$
- Ε(0.40 , 0.873) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών $-325.000x_1 + 148.750x_2 = 0$ και $500.000x_1 + 425.000x_2 - 600.000 = 0$

Βασικές αλλά μη εφικτές λύσεις

- Ζ(1 , 1)
- Η(0 , 1)
- Θ(1 , 0.4) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών $2.000x_1 + 2.500x_2 - 3.000 = 0$ και της x_1
- Κ(0,4199 , 0,9176) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών $-325.000x_1 + 148.750x_2 = 0$ και $500.000x_1 + 425.000x_2 - 600.000 = 0$

Ερώτημα 3

Αρχικά πρέπει να μετατραπούν οι περιορισμοί σε εξισώσεις εφαρμόζοντας τους κατάλληλους κανόνες μετατροπής και προσθέτοντας 5 μεταβαλητές απόκλισης όσες και οι περιορισμοί του γραμμικού μας προγράμματος. Επομένως το Γ.Π. θα πάρει την εξής μορφή:

$$\begin{array}{llll}
 1. & 500.000x_1 + 425.000x_2 + x_1^- & & = 600.000 \\
 2. & 2.000x_1 + 2.500x_2 + x_2^- & & = 3.000 \\
 3. & -325.000x_1 + 148.750x_2 + x_3^- & & = 0 \\
 4. & x_1 & & x_4^- = 1 \\
 5. & & x_2 & x_5^- = 1 \\
 6. & x_1, x_2 \geq 0 & &
 \end{array}$$

Εάν ο ΟΑΝΑΚ επενδύσει το ίδιο ποσό και στα δύο έργα θα ισχύει ότι:

$$500.000x_1 = 425.000x_2 \text{ ή ότι } 20x_1 = 17x_2 \text{ σχ. (1)}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{array}{llll}
 1. & 850.000x_2 + x_1^- & & = 600.000 \\
 2. & 42.000x_2 + x_2^- & & = 3.000 \\
 3. & -127.500x_2 + x_3^- & & = 0 \\
 4. & \frac{17}{20}x_2 + x_4^- & & = 1 \\
 5. & x_2 + x_5^- & & = 1
 \end{array}$$

Παρουσιάζεται η λύση του συστήματος εξισώσεων της πρότυπης μορφής ως προς τις μεταβλητές $x_2, x_2^-, x_3^-, x_4^-, x_5^-$.

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 850.000 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4.200 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -12.7500 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 17/20 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad b = \begin{array}{|c|} \hline 600.000 \\ \hline 3.000 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$x_B = B^{-1} b \rightarrow$$

$x_2=0,70589$ (2)
$x_2^-=35,24$
$x_3^-=900.000$
$x_4^-=0,40$
$x_5^-=0,29$

Από (1) και (2) $\rightarrow x_1=0,599998$, η λύση του Γ.Π. είναι βασική

Υπό τους περιορισμούς:

1. $500.000x_1 + 425.000x_2 = 599.998 \leq 600.000$
2. $2.000x_1 + 25.000x_2 = 2914,696 \leq 3000$
3. $148.750x_1 + 325.000x_2 \rightarrow 104.999,65 \leq 194.999,35$
4. $x_2 \leq 1$
5. $x_1 \leq 1$
6. $x_1, x_2 \geq 0$

Συμπερασματικά καταλήγουμε ότι είναι και εφικτή η λύση αφού ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί του Γ.Π.

Ερώτημα 4: Υλοποίηση της Simplex μέσω πινάκων

Αρχικοποίηση – 1^{ος} Πίνακας

$$\text{Max: } 150.000x_1 + 175.000x_2$$

1. $500.000x_1 + 425.000x_2 + x_1^- = 600.000$
2. $2.000x_1 + 2.500x_2 + x_2^- = 3.000$
3. $-325.000x_1 + 148.750x_2 + x_3^- = 0$
4. $x_1 + x_4^- = 1$
5. $x_2 + x_5^- = 1$
6. $x_1, x_2, x_1^-, x_2^-, x_3^-, x_4^-, x_5^- \geq 0$

C_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	x_B
0	$\bar{1}$	500.000	425.000	1	0	0	0	0	600.000
0	$\bar{2}$	2.000	2.500	0	1	0	0	0	3.000
0	$\bar{3}$	-325.000	148.750	0	0	1	0	0	0
0	$\bar{4}$	1	0	0	0	0	1	0	1
0	$\bar{5}$	0	1	0	0	0	0	1	1
c		150.000	175.000	0	0	0	0	0	
$\bar{c}$		150.000	175.000	0	0	0	0	0	0

1η Επανάληψη Simplex

Εισέρχεται η μεταβλητή $\bar{c}_2$ γιατί έχει το μεγαλύτερο ΟΚΕ. →

Παρατηρείται ότι το 3^ο στοιχείο είναι το μικρότερο στον πίνακα x_B/y_2 .

x_B/y_2
1.41
1.2
0
-
1

Από την στήλη της εισερχόμενης μεταβλητής και τη θέση του μικρότερου πηλίκου προκύπτει το οδηγό στοιχείο το οποίο είναι το 148.750, το οποίο πρέπει να είναι 1.

Γραμμοπράξεις

Διαίρεση της γραμμής 3 με το οδηγό στοιχείο.

Απαλοιφή του 425.000 στη γραμμή 1, στήλη 2 $\rightarrow$ γραμμη 3 * (-425.000)+ γραμμη 1

Απαλοιφή του 2.500 στη γραμμή 2, στήλη 2 $\rightarrow$ γραμμη 3 * (-2.500)+ γραμμη 2

Απαλοιφή του 1 στη γραμμή 5, στήλη 2 $\rightarrow$ γραμμη 3 * (-1)+ γραμμη 5

1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	x_B
1.426.500	0	1	0	-2.86	0	0	600.000
7.450	0	0	1	0,017	0	0	3.000
-2,18	1	0	0	$6,722 \times 10^{-6}$	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1
2.18	0	0	0	$-6,722 \times 10^{-6}$	0	1	1

Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών

- 1) Η μεταβλητή 2 αντικαθιστά την $\bar{3}$.
- 2) Το 3^ο στοιχείο του C_B αντικαθίσταται με το 175.000.

Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

Το ΟΚΕ της μεταβλητής 2 αντικαθίσταται με το 0 γιατί είναι πλέον βασική.

ΟΚΕ μεταβλητής 1: $\bar{C}_1 = 150.000 - (0 \cdot 1.426.500 + 0 \cdot 7.450 + 175.000 \cdot (-2,18) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2,18) = 531.500$

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{3}$: $\bar{C}_3 = 0 - (0 \cdot -2,86 + 0 \cdot (0,017) + 175.000 \cdot 6,722 \times 10^{-6} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6,722 \times 10^{-6}) = -1,176$

Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης

$$0 \cdot 600.000 + 0 \cdot 3.000 + 175.000 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$

C_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	x_B
0	$\bar{1}$	1.426.500	0	1	0	-2.86	0	0	600.000
0	$\bar{2}$	7.450	0	0	1	0,017	0	0	3.000
175.000	2	-2,18	1	0	0	$6,722 \times 10^{-6}$	0	0	0
0	$\bar{4}$	1	0	0	0	0	1	0	1
0	$\bar{5}$	2.18	0	0	0	$-6,722 \times 10^{-6}$	0	1	1
c		150.000	175.000	0	0	0	0	0	
$\bar{c}$		531.500	0	0	0	-1,176	0	0	0

2^η Επανάληψη Simplex

Εισέρχεται η μεταβλητή $\bar{C}_1$ γιατί είναι η μοναδική με ΟΚΕ θετικό $\rightarrow$

Παρατηρείται πάλι ότι το 2^ο στοιχείο είναι το μικρότερο στον πίνακα x_B/y_2 .

Από την στήλη της εισερχόμενης μεταβλητής και τη θέση του μικρότερου πηλίκου προκύπτει το οδηγό στοιχείο το οποίο είναι το 7.450.

x_B/y_1
0.42
0.402
-
1
0.458

Γραμμοπράξεις:

Διαίρεση της γραμμής 2 με το οδηγό στοιχείο.

Απαλοιφή του 1.426.500 στη γραμμή 1, στήλη 1 $\rightarrow$ γραμμή 2 * (-1.426.500) + γραμμή 1

Απαλοιφή του -2,18 στη γραμμή 3, στήλη 1 $\rightarrow$ γραμμή 2 * (2.18) + γραμμή 3

Απαλοιφή του 1 στη γραμμή 4, στήλη 1 $\rightarrow$ γραμμή 2 * (-1) + γραμμή 4

Απαλοιφή του 2.18 στη γραμμή 4, στήλη 1 $\rightarrow$ γραμμή 2 * (-2,18) + γραμμή 5

0	0	1	-1,914	-6.113	0	0	26.547
1	0	0	1.342×10^{-6}	$2,281 \times 10^{-6}$	0	0	0,402
0	1	0	$2,925 \times 10^{-6}$	$1,169 \times 10^{-5}$	0	0	0,876
0	0	0	-1.342×10^{-6}	$-2,281 \times 10^{-6}$	1	0	0,598
0	0	0	$-2,925 \times 10^{-6}$	$-1,169 \times 10^{-5}$	0	1	0,123

Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών:

- 1) Η μεταβλητή 1 αντικαθιστά την $\bar{2}$.
- 2) Το 2^ο στοιχείο του C_B αντικαθίσταται με το 150.000.

Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

Το ΟΚΕ της μεταβλητής 1 αντικαθίσταται με το 0 γιατί είναι πλέον βασική.

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{2}$: $\bar{C}_2 = 0 - (0 \cdot -1,914 + 150.000 \cdot 1,342 \times 10^{-6} + 175.000 \cdot 2,925 \times 10^{-6} + 0 \cdot -1,342 \times 10^{-6} + 0 \cdot -2,925 \times 10^{-6}) = -0,713$

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{3}$: $\bar{C}_3 = -1,176 - (0 \cdot -6,113 + 150.000 \cdot 2,281 \times 10^{-6} + 175.000 \cdot 1,169 \times 10^{-5} + 0 \cdot -2,281 \times 10^{-6} + 0 \cdot -1,169 \times 10^{-5}) = -1,708$

Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης:

$$0 \cdot 26.547 + 150.000 \cdot 0,402 + 175.000 \cdot 0,876 + 0 \cdot 0,598 + 0 \cdot 0,123 = 213.600$$

C_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	x_B
0	$\bar{1}$	0	0	1	-1,914	-6,113	0	0	26.547
150.000	1	1	0	0	$1,342 \times 10^{-6}$	$2,281 \times 10^{-6}$	0	0	0,402
175.000	2	0	1	0	$2,925 \times 10^{-6}$	$1,169 \times 10^{-5}$	0	0	0,876
0	$\bar{4}$	0	0	0	$-1,342 \times 10^{-6}$	$-2,281 \times 10^{-6}$	1	0	0,598
0	$\bar{5}$	0	0	0	$-2,925 \times 10^{-6}$	$-1,169 \times 10^{-5}$	0	1	0,123
c		150.000	170.000	0	0	0	0	0	
$\bar{c}$		0	0	0	-0,713	-1,708	0	0	213.600

Η λύση είναι βέλτιστη γιατί δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ.

Η βέλτιστη λύση είναι $x_1=26.547$, $x_2=0,402$, $x_3=0,876$, $x_4=0,598$, $x_5=0,123$

Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 213.600

B=

0	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Ερώτημα 5

Α) Τα αναμεόμενα έσοδα του βέλτιστου επενδυτικού σχεδίου είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης: 213.600€

Β) $x_1 = 0,402$, $x_2 = 0,876$

$$500.000x_1 + 425.000x_2 = 573.300\text{€}$$

$$2.000x_1 + 2.500x_2 = 2.994 \text{ hours}$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς προφανώς και δεν αξιοποιούνται πλήρως τα διαθέσιμα κεφάλαια ούτε και οι ανθρωπόωρες.

Γ) Οι μεταβλητές απόφασης όπως είχε ειπωθεί, εκφράζουν το ποσοστό συμμετοχής του ΟΑΝΑΚ στα επενδυτικά σχέδια Α' και Β', έτσι θα υπολογιστεί το ποσοστό συμμετοχής των ιδιωτικών φορέων αντίστοιχα.

Ποσοστό ιδιωτικής συμμετοχής στο σχέδιο Α' = $(1-x_1) \times 100\% = 59.8\%$

Ποσοστό ιδιωτικής συμμετοχής στο σχέδιο Β' = $(1-x_2) \times 100\% = 12.4\%$

Δ) Κρίνοντας από την μεγάλη τιμή του x_2 , ο περιορισμός που αφορά το ποσοστό συμμετοχής στο σχέδιο Β' δεν επιδρά στο συνολικό απολέσμα.

Ερώτημα 6

Η βέλτιστη λύση που προκύπτει λύνοντας το Γ.Π. με τη χρήση Η/Υ, είναι: $f=215.625$ με μεταβλητές απόφασης x_1 , x_2 παίρνουν τις τιμές 0,5625 και 0,75 αντίστοιχα. Τα παραπάνω αποτελέσματα δεν συμβαδίζουν με τα αποτελέσματα της μεθόδου simplex που εφαρμόστηκε στο ερώτημα 4. Ωστόσο και οι δύο λύσεις αποτελούν βασικές εφικτές λύσεις στο γράφημα του ερωτήματος 2.

Ερώτημα 7

Από το γράφημα που παρουσιάστηκε στο Ερώτημα 2, μπορούμε να διακρίνουμε ακόμη ένα σημείο όπου τέμνονται οι δύο ευθείες: $500.000x_1 + 425.000x_2 = 600.000$ και $-325.000x_1 + 148.750x_2 = 0$. Ταυτόχρονα αυτό το σημείο βρίσκεται εντός του χωρίου που περικλείεται από τις κάθετες μεταξύ τους x_1 και x_2 . Όμως απορρίπτεται καθότι βρίσκεται πιο πάνω από τα σημεία της ευθείας του περιορισμού που αφορά τις εργατοώρες του Γ.Π., στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει η δυνατότητα να προσληφθεί επιπλέον προσωπικό άρα να αυξηθούν οι εργατοώρες. Επομένως με την αλλαγή του περιορισμού θα μεταβληθεί και η ευθεία $2.000x_1 + 2.500x_2 = 3.000$ με τέτοιο τρόπο που θα συμπεριλαμβάνει πλέον και αυτό το σημείο, έτσι ώστε να μπορούμε να το συγκαταλάβουμε στις Βασικές Εφικτές λύσεις του προβλήματος.

Υπολογισμός σημείου και ωρομισθίου

$$x_2 = \frac{325.000}{148.750} x_1 \quad (1)$$

$$500.000x_1 + 425.000x_2 = 600.000 \quad (2)$$

→ Από (1) και (2) έχουμε: $1.428.579,429x_1 = 600.000 \rightarrow x_1 = 0,4199$, $x_2 = 0,9176$

Γνωρίζουμε ότι θα αυξηθούν οι εργατοώρες χωρίς να αλλάζει κάτι άλλο στον αντίστοιχο περιορισμό, άρα η νέα εξίσωση θα είναι της μορφής: $2.000x_1 + 2.500x_2 = 3.000 + z$, όπου z οι επιπλέον εργατοώρες.

$2.000x_1 + 2.500x_2 = 3.000 + z \rightarrow z = 133,8$ ώρες επομένως αφού επρόκειτο για απαιτούμενες ώρες στρογγυλοποιούμε προς τα επάνω $\rightarrow z = 134$

$f' = 223.565$ για $x_1 = 0,4199$, $x_2 = 0,9176$

Ο ΟΑΝΑΚ θα είχε την δυνατότητα να καταβάλει μέγιστο ωρομίσθιο τέτοιο ώστε να μειωθούν τα έσοδα λόγω της πρόσληψης επιπλέον προσωπικού.

$$\frac{f' - f}{z} = \frac{223.565 - 215.625}{134} = 59,25 \text{ €/h}$$

Ερώτημα 8

Η μορφή που θα αποκτήσει η αντικειμενική συνάρτηση είναι η εξής:

$$\max: 150.000x_1 + 175.000x_2 - 59,25x_3$$

Στη μοντελοποίηση του Γ.Π. προστίθεται ένας καινούριος περιορισμός x_3 , έτσι ο περιορισμός που έχουμε για τις εργατοώρες θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

1. $500.000x_1 + 425.000x_2 \leq 600.000$
2. $2.000x_1 + 2.500x_2 - x_3 \leq 3.000$
3. $-325.000x_1 + 148.750x_2 \leq 0$
4. $x_1 \leq 1$
5. $x_2 \leq 1$
6. $x_3 \leq 134$
7. $x_1, x_2, x_3 \geq 0$