Μάθημα: Γραμμικός Προγραμματισμός

Διδάσκων: Δούμπος Μιχαήλ



1η Εργασία

Αυγέρης Σωτήριος: 2013010138

Ρασούλης Αλέξανδρος: 2015010123

Χανιά 2020

Πίνακας Περιεχομένων

[**Ερώτημα 1: Μοντελοποίηση του προβλήματος** 1](#_Toc34800723)

[**Ερώτημα 2 : Γραφική παρουσίαση** 2](#_Toc34800724)

[**Βασικές εφικτές λύσεις** 2](#_Toc34800725)

[**Βασικές αλλά μη εφικτές λύσεις** 2](#_Toc34800726)

[**Ερώτημα 3** 3](#_Toc34800727)

[**Ερώτημα 4: Υλοιποίηση της Simplex μέσω πινάκων** 4](#_Toc34800728)

[**Αρχικοποίηση – 1ος Πίνακας** 4](#_Toc34800729)

[**1η Επανάληψη Simplex** 4](#_Toc34800730)

[**Γραμμοπράξεις** 5](#_Toc34800731)

[**Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών** 5](#_Toc34800732)

[**Υπολογισμός νέων ΟΚΕ** 5](#_Toc34800733)

[**Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης** 6](#_Toc34800734)

[**2η Επανάληψη Simplex** 6](#_Toc34800735)

[**Γραμμοπράξεις:** 6](#_Toc34800736)

[**Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών:** 7](#_Toc34800737)

[**Υπολογισμός νέων ΟΚΕ** 7](#_Toc34800738)

[**Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης:** 7](#_Toc34800739)

[**Ερώτημα 5** 8](#_Toc34800740)

[**Ερώτημα 6** 8](#_Toc34800741)

[**Ερώτημα 7** 8](#_Toc34800742)

[**Υπολογισμός σημείου και ωρομισθίου** 9](#_Toc34800743)

[**Ερώτημα 8** 9](#_Toc34800744)

# **Ερώτημα 1: Μοντελοποίηση του προβλήματος**

Αρχικά αυτό που αναζητάμε είναι η αντικειμενική συνάρτηση, η οποία θα μας περιγράφει το κέρδος που θα αποκομίσουμε μεσά από την δραστηριότητα στην οποία αναφέρεται η εκφώνηση. Δηλαδή μας ενδιαφέρει να δούμε, με βάση το διαθέσιμο κεφάλαιο και τις εργατοώρες μας, τα ποσοστά συμμετοχής που μπορούμε να έχουμε στις εκάστοτε επενδύσεις, άρα και ποιο θα είναι το συνολικό κέρδος. Με βάση και την εκφώνηση οι μεταβλητές απόφασης θα είναι τα ποσοστά συμμετοχής του οργανισμού στα δύο επνδυτικά σχέδια, όπου το ποσοστό συμμετοχής για το σχέδιο Α’ και το ποσοστό συμμετοχής για το σχέδιο Β’.

Εκφράζοντας λοιπόν τα κέρδη συναρτήσει των μεταβλητών απόφασης θα έχουμε την αντικειμενική μας συνάρτηση ως εξής: *max 150.000 + 175.000* την οποία προφανώς καλούμαστε να μεγιστοποίησουμε καθώς εκφράζει το κέρδος από την επένδυση.

Το επόμενο μας βήμα είναι ο καθορισμός όλων των περιορισμών που περιγράφουν και καθορίζουν επακριβώς το πρόβλημα μας, όποτε βασιζόμενοι στα δοθέντα δεδομένα παρουσιάζουμε τους παρακάτω περιορισμούς:

1. *500.000 + 425.000 600.000*
2. *2.000 + 2.500 3.000*
3. *-325.000 + 148.750 0*

# **Ερώτημα 2 : Γραφική παρουσίαση**

## **Βασικές εφικτές λύσεις**

* Α(0 , 0)
* Β(1 , 0)
* Γ(1 , 0.235) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών =1 και 500.000 + 425.000 - 600.000=0
* Δ(0.5625 , 0.75) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών 2.000+ 2.500 – 3.000 = 0 και 500.000 + 425.000 – 600.000=0)
* Ε(0.40 , 0.873) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών  
  -325.000 + 148.750 = 0 και 500.000 + 425.000 – 600.000 = 0)

## **Βασικές αλλά μη εφικτές λύσεις**

* Ζ(1 , 1)
* Η(0 , 1)
* Θ(1 , 0.4) το σημέιο τομής μεταξυ των ευθειών 2.000 + 2.500 – 3.000 = 0 και της
* K(0,4199 , 0,9176) το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών -325.000 + 148.750 = 0 και 500.000 + 425.000 - 600.000 = 0

# **Ερώτημα 3**

Αρχικά πρέπει να μετατραπούν οι περιορισμοί σε εξισώσεις εφαρμόζωντας τους κατάλληλους κανόνες μετατροπής και προσθέτοντας 5 μεταβαλητές απόκλισης όσες και οι περιορισμοί του γραμμικού μας προγράμματος. Επομένως το Γ.Π. θα πάρει την εξής μορφή:

1. *500.000 + 425.000 + 600.000*
2. *2.000 + 2.500+ 3.000*
3. *-325.000 + 148.750 + 0*

Εάν ο ΟΑΝΑΚ επενδύσει το ίδιο ποσό και στα δύο έργα θα ισχύει ότι:  
***500.000 = 425.000***ή ότι ***20 = 17 σχ.(1)***

Επομένως θα έχουμε:

1. *850.000 + 600.000*
2. *42.000 + 3.000*
3. *-127.500 + 0*
4. *+*
5. *+*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 850.000 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4.200 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| -12.7500 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 17/20 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Παρουσιάζεται η λύση του συστήματος εξισώεων της πρότυπης μορφής ως προς τις μεταβλήτες **,,,.**

|  |
| --- |
| 600.000 |
| 3.000 |
| 0 |
| 1 |
| 1 |

Β= b=

|  |
| --- |
| =0,70589 **(2)** |
| =35,24 |
| =900.000 |
| =0,40 |
| =0,29 |

🡪

Από (1) και (2) 🡪 **=0,599998**, η λύση του Γ.Π. είναι βασική

Υπό τους περιορισμούς:

1. *500.000x0,599998 + 425.000x0,70588 = 599.998*
2. *2.000x0,599998 + 25.000x0,70588 = 2914,6963000*
3. *148.750x0,70588 325.000x0,59998 🡪 104.999,65 194.999,35*
4. *1*

Συμπερασματικά καταλήγουμε ότι είναι και εφικτή η λύση αφού ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί του Γ.Π.

# **Ερώτημα 4: Υλοιποίηση της Simplex μέσω πινάκων**

## **Αρχικοποίηση – 1ος Πίνακας**

*Max: 150.000 + 175.000*

1. *500.000 + 425.000 + 600.000*
2. *2.000 + 2.500+ 3.000*
3. *-325.000 + 148.750 + 0*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Βάση |  | 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  |  | 500.000 | 425.000 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 600.000 |
| 0 |  |  | 2.000 | 2.500 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  | 3.000 |
| 0 |  |  | -325.000 | 148.750 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  | 0 |
| 0 |  |  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | 1 |
| 0 |  |  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |  | 1 |
|  |  | c | 150.000 | 175.000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  | 150.000 | 175.000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |

|  |
| --- |
| / |
| 1.41 |
| 1.2 |
| 0 |
| - |
| 1 |

**1η Επανάληψη Simplex**

Εισέρχεται η μεταβλητή γιατί έχει το μεγαλύτερο ΟΚΕ. 🡪

Παρατηρείται ότι το 3ο στοιχείο είναι το μικρότερο στον πίνακα /.

Από την στήλη της εισερχόμενης μεταβλητής και τη θέση του μικρότερου πηλίκου προκύπτει το οδηγό στοιχείο το οποίο είναι το 148.750, το οποίο πρέπει να είναι 1.

## **Γραμμοπράξεις**

Διαίρεση της γραμμής 3 με το οδηγό στοιχείο.

Απαλοιφή του 425.000 στη γραμμή 1, στήλη 2 🡪 γραμμη 3 \* (-425.000)+ γραμμη 1

Απαλοιφή του 2.500 στη γραμμή 2, στήλη 2 🡪 γραμμη 3 \* (-2.500)+ γραμμη 2

Απαλοιφή του 1 στη γραμμή 5, στήλη 2 🡪 γραμμη 3 \* (-1)+ γραμμη 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 1.426.500 | 0 | 1 | 0 | -2.86 | 0 | 0 |  | 600.000 |
| 7.450 | 0 | 0 | 1 | 0,017 | 0 | 0 |  | 3.000 |
| -2,18 | 1 | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | 1 |
| 2.18 | 0 | 0 | 0 | - | 0 | 1 |  | 1 |

## **Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών**

1. Η μεταβλητή 2 αντικαθιστά την .
2. Το 3ο στοιχείο του αντικαθίσταται με το 175.000.

## **Υπολογισμός νέων ΟΚΕ**

Το ΟΚΕ της μεταβλητής 2 αντικαθίσταται με το 0 γιατί είναι πλέον βασική.

ΟΚΕ μεταβλητής 1: = 150.000 – (0\*1.426.500 + 0\*7.450+ 175.000\*(-2,18) + 0\*1 + 0\*2,18) = 531.500

ΟΚΕ μεταβλητής : = 0 – (0\*-2,86 + 0\*(0,017) + 175.000\* + 0\*0 + 0\* = -1,176

**Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης**

0\*600.000+ 0\*3.000 + 175.000\*0 + 0\*1 + 0\*1= 0

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Βάση |  | 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  |  | 1.426.500 | 0 | 1 | 0 | -2.86 | 0 | 0 |  | 600.000 |
| 0 |  |  | 7.450 | 0 | 0 | 1 | 0,017 | 0 | 0 |  | 3.000 |
| 175.000 | 2 |  | -2,18 | 1 | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  | 0 |
| 0 |  |  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | 1 |
| 0 |  |  | 2.18 | 0 | 0 | 0 | - | 0 | 1 |  | 1 |
|  |  | c | 150.000 | 175.000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  | 531.500 | 0 | 0 | 0 | -1,176 | 0 | 0 |  | 0 |

## **2η Επανάληψη Simplex**

|  |
| --- |
| / |
| 0.42 |
| 0.402 |
| - |
| 1 |
| 0.458 |

Εισέρχεται η μεταβλητή γιατί είναι η μοναδική με ΟΚΕ θετικό 🡪

Παρατηρείται πάλι ότι το 2ο στοιχείο ειίναι το μικρότερο στον πίνακα /.

Από την στήλη της εισερχόμενης μεταβλητής και τη θέση του μικρότερου πηλίκου προκύπτει το οδηγό στοιχείο το οποίο είναι το   
7.450.

## **Γραμμοπράξεις:**

Διαίρεση της γραμμής 2 με το οδηγό στοιχείο.

Απαλοιφή του 1.426.500 στη γραμμή 1, στήλη 1 🡪 γραμμη 2 \* (-1.426.500)+ γραμμη 1

Απαλοιφή του -2,18 στη γραμμή 3, στήλη 1 🡪 γραμμη 2 \* (2.18)+ γραμμη 3

Απαλοιφή του 1 στη γραμμή 4, στήλη 1 🡪 γραμμη 2 \* (-1)+ γραμμη 4

Απαλοιφή του 2.18 στη γραμμή 4, στήλη 1 🡪 γραμμη 2 \* (-2,18)+ γραμμη 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 1 | -1,914 | -6.113 | 0 | 0 |  | 26.547 |
| 1 | 0 | 0 | 1.342 | 2,281 | 0 | 0 |  | 0,402 |
| 0 | 1 | 0 | 2,925 |  | 0 | 0 |  | 0,876 |
| 0 | 0 | 0 | -1.342 | -2,281 | 1 | 0 |  | 0,598 |
| 0 | 0 | 0 | -2,925 | - | 0 | 1 |  | 0,123 |

## **Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών:**

1. Η μεταβλητή 1 αντικαθιστά την .
2. Το 2ο στοιχείο του αντικαθίσταται με το 150.000.

## **Υπολογισμός νέων ΟΚΕ**

Το ΟΚΕ της μεταβλητής 1 αντικαθίσταται με το 0 γιατί είναι πλέον βασική.

ΟΚΕ μεταβλητής : = 0 – (0\*-1,914+ 150.000\*1.342 + 175.000\*2,9250\*-1.342)= -0,713

ΟΚΕ μεταβλητής : = -1,176- (0\* -6.113 + 150.000\*2,281+175.000\* +0\*-2,281+0\*-=-1,708

**Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης:**  
 0\*26.547+ 150.000\*0,402+175.00\*0,876+0\*0,598+0\*0,123= 213.600

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Βάση |  | 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  |  | 0 | 0 | 1 | -1,914 | -6.113 | 0 | 0 |  | 26.547 |
| 150.000 | 1 |  | 1 | 0 | 0 | 1.342 | 2,281 | 0 | 0 |  | 0,402 |
| 175.000 | 2 |  | 0 | 1 | 0 | 2,925 |  | 0 | 0 |  | 0,876 |
| 0 |  |  | 0 | 0 | 0 | -1.342 | -2,281 | 1 | 0 |  | 0,598 |
| 0 |  |  | 0 | 0 | 0 | -2,925 | - | 0 | 1 |  | 0,123 |
|  |  | c | 150.000 | 170.000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  | 0 | 0 | 0 | -0,713 | -1,708 | 0 | 0 |  | 213.600 |

Η λύση είναι βέλτιστη γιατί δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ.  
Η βέλτιστη λύση είναι =26.547, =0,402 , =0,876, =0,598, =0,123  
Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 213.600

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

B=

# **Ερώτημα 5**

Α) Τα αναμεόμενα έσοδα του βέλτιστου επενδυτικού σχεδίου είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης: 213.600€

Β) = 0,402, =0,876  
500.000+425.000= 573.300€  
2.000+2.500=2.994 hours|  
Από τους παραπάνω υπολογισμούς προφανώς και δεν αξιοπούνται πλήρως τα διαθέσιμα κεφάλαια ούτε και οι ανθρωποώρες.

Γ) Οι μεταβλητές απόφασης όπως είχε ειπωθεί, εκφράζουν το πσοστό συμμετοχής του ΟΑΝΑΚ στα επνδυτικά σχέδια Α’ και Β’, έτσι θα υπολογιστεί το ποσοστό συμμετοχής των ιδιωτικών φορέων αντίστοιχα.

Ποσοστό ιδιωτικής συμμετοχης στο σχέδιο Α’= (1-)x100%= 59.8%  
Ποσοστό ιδιωτικής συμμετοχης στο σχέδιο B’= (1-)x100%= 12.4%

Δ)Κρίνοντας από την μεγάλη τιμή του , ο περιορισμός που αφορά το ποσοστό συμμετοχής στο σχέδιο Β’ δεν επιδρά στο συνολικό απολέσμα.

# **Ερώτημα 6**

Η βέλτιστη λύση που προκύπτει λύνοντας το Γ.Π. με τη χρήση Η/Υ, είναι:   
f=215.625 με μεταβλητές απόφασης , παίρνουν τις τιμές 0,5625 και 0,75 αντίστοιχα. Τα παρπάνω αποτελέσματα δεν συμβαδίζουν με τα αποτελέσματα της μεθόδου simplex που εφαρμόστηκε στο ερώτημα 4. Ωστόσο και οι δύο λύσεις αποτελούν βασικές εφικτές λύσεις στο γράφημα του ερωτήματος 2.

# **Ερώτημα 7**

Από το γράφημα που παρουσιάστηκε στο Ερώτημα 2, μπορούμε να διακρίνουμε ακόμη ένα σημείο όπου τέμνονται οι δύο ευθείες :500.000 + 425.000 = 600.000 και η -325.000 + 148.750=0*.* Ταυτόχρονα αυτό το σημείο βρίσκεται εντός του χωρίου που περικλείεται από τις κάθετες μεταξύ τους x1 και x2.Όμως απορρίπτεται καθότι βρίσκεται πιο πάνω από τα σημεία της ευθείας του περιορισμού που αφορά τις εργατοώρες του Γ.Π., στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει η δυνατότητα να προσληφθεί επιπλέον προσωπικό άρα να αυξηθούν οι εργατοώρες. Επομένως με την αλλαγή του περιορισμού θα μεταβληθεί και η ευθεία 2.000 + 2.500= 3.000 με τέτοιο τρόπο που θα συμπεριλαμβάνει πλέον και αυτό το σημείο, έτσι ώστε να μπορούμε να το συγκαταλάβουμε στις Βασικές Εφικτές λύσεις του προβλήματος.

## **Υπολογισμός σημείου και ωρομισθίου**

= (1)

500.000 + 425.000 = 600.000 (2)

🡪 Από (1) και (2) έχουμε: 1.428.579,429 = 600.000 🡪 **= 0,4199 , =0,9176**

Γνωρίζουμε ότι θα αυξηθούν οι εργατοώρες χωρίς να αλλάζει κάτι άλλο στον αντίστοιχο περιορισμό, άρα η νέα εξίσωση θα έιναι της μορφής: 2.000+ 2.500= 3.000 + z, όπου z οι επιπλέον εργατοώρες.

2.000+ 2.500= 3.000 + z 🡪 z= 133,8 ώρες επομένως αφού επρόκειτο για απαιτούμενες ώρες στρογγυλοποιούμε προς τα επάνω 🡪 **z=134**

f’= 223.565 για =0,4199, =0,9176

Ο ΟΑΝΑΚ θα έιχε την δυνατότητα να καταβάλει μέγιστο ωρομίσθιο τέτοιο ώστε να μειωθούν τα έσοδα λόγω της πρόσληψης επιπλέον προσωπικού.

== 59,25 €/h

# **Ερώτημα 8**

Η μορφή που θα αποκτήσει η αντικειμενική συνάρτηση είναι η εξής:   
max: 150.000 + 175.000 – 59,25

Στη μοντελοποίηση του Γ.Π. προστίθεται ένας καινούριος περιορισμός , έτσι ο περιορισμός που έχουμε για τις εργατοώρες θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

1. *500.000 + 425.000 600.000*
2. *2.000 + 2.500 - 3.000*
3. *-325.000 + 148.750 0*
4. *1*
5. *1*
6. *134*
7. *, , 0*