Γραμμικός Προγραμματισμός

ΕΝΟΤΗΤΑ 6η
Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Μιχάλης Δούμπος, 2018

Το πρόβλημα της μεταφοράς

- Δεδομένα
  - m πηγές, n προορισμοί
  - a_i = διαθεσιμότητα πηγής i, A = συνολική διαθεσιμότητα
  - b_j = ζήτηση στον προορισμό j, B = συνολική ζήτηση
  - c_{ij} μοναδιαίο κόστος μεταφοράς μίας μονάδας από την πηγή i στον προορισμό j
- Στόχος: Διαμόρφωση του βέλτιστου πλάνου μεταφοράς που ελαχιστοποιεί το κόστος
- Παρατηρήσεις:
  - "Ισορροπημένο" πρόβλημα, δηλαδή $A = B$
  - $A > B$: προσθήκη τεχνητού προορισμού $n+1$ με $b_{n+1} = A - B$
  - $A < B$: προσθήκη τεχνητής πηγής $m+1$ με $a_{m+1} = B - A$
  - Εάν η μεταφορά από την πηγή i στον προορισμό j δεν είναι εφικτή, τότε τίθεται $c_{ij} = M \gg 0$

Μοντελοποίηση

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{Υπό:} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1, \dots, n$$

- Κάθε ΓΠ αυτής της μορφής είναι ένα πρόβλημα μεταφοράς
- Το ΓΠ έχει $m + n$ περιορισμούς, αλλά μόνο $m + n - 1$ βασικές μεταβλητές
  - Οποιοσδήποτε ένας από τους περιορισμούς περιττεύει
- Κάθε ΒΕΛ έχει το πολύ $m + n - 1$ μεταφορές από τις πηγές στους προορισμούς
- Λόγω της δομής του, το ΓΠ μπορεί να λυθεί με ειδικούς αλγορίθμους

Παράδειγμα 1

- Μια επιχείρηση ηλεκτρονικών διαθέτει 3 κέντρα διανομής (Δ1, Δ2, Δ3) από τα οποία τροφοδοτεί 2 καταστήματα (Κ1, Κ2) με ΗΥ
- Κάθε μήνα τα κέντρα διανομής έχουν τη δυνατότητα επεξεργασίας παραγγελιών 3.700 ΗΥ, ενώ η ζήτηση είναι συνολικά 3.300 ΗΥ
- Για τεχνικούς λόγους, η τροφοδοσία του Κ2 δεν μπορεί να γίνει από το Δ3
- Πολιτική της εταιρείας είναι να εξαντλείται το μηνιαίο απόθεμα από το κέντρο Δ3

Παράδειγμα 1
Στοιχεία κόστους, προσφοράς και ζήτησης

- Τα μοναδιαία κόστη μεταφοράς, οι ποσότητες που είναι διαθέσιμες (ανά μήνα) στα κέντρα και η μηνιαία ζήτηση (όλα τα στοιχεία ανά 100 ΗΥ)

	Κ1	Κ2	Διαθεσιμότητα
Δ1	20	40	10
Δ2	24	28	15
Δ3	26	-	12
Ζήτηση	19	14	

Παράδειγμα 1
Μοντελοποίηση ως «κανονικό» ΓΠ

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 20x_{11} + 40x_{12} + 24x_{21} + 28x_{22} + 26x_{31} \\
\text{Υπό:} & x_{11} + x_{12} & & & & \le 10 \\
& & x_{21} + x_{22} & & & = 15 \\
& & & & x_{31} & \le 12 \\
& x_{11} & + x_{21} & & + x_{31} & = 19 \\
& x_{12} & & + x_{22} & & = 14 \\
& x_{11} \quad x_{12} & x_{21} & x_{22} & x_{31} & \ge 0
\end{array}
$$

Σε αυτή τη μορφή, το ΓΠ δεν εντάσσεται στην κατηγορία προβλημάτων μεταφοράς

Παράδειγμα 1
Μοντελοποίηση ως πρόβλημα μεταφοράς

- Προσφορά & ζήτηση
  - Συνολική προσφορά $= 10 + 15 + 12 = 37$
  - Συνολική ζήτηση $= 19 + 14 = 33$
  - Εισάγεται τεχνητός προορισμός (Κ3) με ζήτηση 4 μονάδες (400 ΗΥ)
- Κόστη
  - Επειδή η τροφοδοσία του Κ2 δεν μπορεί να γίνει από το Δ3, το αντίστοιχο κόστος τίθεται ίσο με ένα μεγάλο αριθμό: $c_{32} = M$ (πχ. $c_{32} = 1000$)
  - Για να διασφαλιστεί η εξάντληση του αποθέματος στο κέντρο Δ3, το τίθεται $c_{33} = M$
  - Ορίζονται μηδενικά κόστη μεταφοράς από τα κέντρα Δ1 και Δ2 προς τον τεχνητό προορισμό Κ3, δηλαδή $c_{13} = c_{23} = 0$

Παράδειγμα 1
Μοντελοποίηση ως πρόβλημα μεταφοράς

- Πίνακας κόστους, προσφοράς και ζήτησης

	Κ1	Κ2	Κ3	Διαθεσιμότητα
Δ1	20	40	0	10
Δ2	24	28	M	15
Δ3	26	M	0	12
Ζήτηση	19	14	4	

Παράδειγμα 1
Μοντελοποίηση ως πρόβλημα μεταφοράς

$$\begin{array}{llllllllllll}
\min & 20x_{11} + 40x_{12} + 0x_{13} + 24x_{21} + 28x_{22} + Mx_{23} + 26x_{31} + Mx_{32} + 0x_{33} \\
\text{Υπό:} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 15 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} = 12 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 19 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 14 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4 \\
& x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad x_{31} \quad x_{32} \quad x_{33} \geq 0
\end{array}$$

Παράδειγμα 2

- Για την άρδευση 4 περιοχών (Π1-Π4) χρησιμοποιούνται 3 λιμνοδεξαμενές (Λ1-Λ3)
- Τα κόστη, η διαθεσιμότητα και η ζήτηση (όλα για 1000 m^3) είναι

	Π1	Π2	Π3	Π4	Διαθεσιμότητα
Λ1	16	13	22	17	50
Λ2	14	13	19	15	60
Λ3	19	20	23	–	50
Ελάχιστη	30	70	0	10	
Επιθυμητή	50	70	30	–	

Παράδειγμα 2 – Μοντελοποίηση

- Παρατήρηση 1: η μέγιστη ποσότητα στην Π4 είναι

  (Συνολική διαθεσιμότητα) – (Ελάχιστη ζήτηση Π1-Π3) = 60
- Παρατήρηση 2: Θεωρώντας ως ζήτηση τα δεδομένα επιθυμητά επίπεδα, η συνολική προσφορά (160) είναι μικρότερη από τη ζήτηση $(210 = 50 + 70 + 30 + 60)$
  - Εισάγεται τεχνητή πηγή Λ4 με διαθεσιμότητα $210 - 160 = 50$

	Π1	Π2	Π3	Π4	Διαθεσιμότητα
Λ1	16	13	22	17	50
Λ2	14	13	19	15	60
Λ3	19	20	23	–	50
Ελάχιστη	30	70	0	10	
Επιθυμητή	50	70	30	–	

Παράδειγμα 2 – Μοντελοποίηση

- Κάλυψη ελάχιστων επιπέδων ζήτησης
  - Η παραπάνω ζήτηση στην Π2 καλύπτει ακριβώς την ελάχιστη ποσότητα
    - Τροφοδοσία μόνο από τις (υπαρκτές) λιμνοδεξαμενές Λ1-Λ3
  - Στην Π3 δεν υπάρχει ελάχιστη ποσότητα που πρέπει να καλυφθεί
  - Η ζήτηση στην Π4 (60) υπερβαίνει την προσφορά της Λ4 (50) κατά 10
    - Η Π4 θα τροφοδοτηθεί με ≥ 10 μονάδες από τις (υπαρκτές) λιμνοδεξαμενές Λ1-Λ3

	Π1	Π2	Π3	Π4	Διαθεσιμότητα
Λ1	16	13	22	17	50
Λ2	14	13	19	15	60
Λ3	19	20	23	M	50
Λ4	0	0	0	0	50
Ζήτηση	50	70	30	60	

Παράδειγμα 2 – Μοντελοποίηση

- Για την κάλυψη της ελάχιστη ζήτησης (30) στην Π1, χρειάζεται τροφοδοσία τουλάχιστον 30 μονάδων από τις Λ1-Λ3, ενώ οι επιπλέον 20 μονάδες είναι «προαιρετικές»
  - Διάκριση μεταξύ ελάχιστων (Π1-ε) και πρόσθετων αναγκών (Π1-π)

	Π1-ε	Π1-π	Π2	Π3	Π4	Διαθεσιμότητα
Λ1	16 (x_{11})	16 (x_{12})	13 (x_{13})	22 (x_{14})	17 (x_{15})	50
Λ2	14 (x_{21})	14 (x_{22})	13 (x_{23})	19 (x_{24})	15 (x_{25})	60
Λ3	19 (x_{31})	19 (x_{32})	20 (x_{33})	23 (x_{34})	M (x_{35})	50
Λ4	M (x_{41})	0 (x_{42})	M (x_{43})	0 (x_{44})	0 (x_{45})	50
Ζήτηση	30	20	70	30	60	

Παράδειγμα 2 – Το ΓΠ

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{44}		
min	16	16	13	22	17	14	14	13	19	15	19	19	20	23	M	M	0	M	0	0		
	1	1	1	1	1																=	50
						1	1	1	1	1											=	60
											1	1	1	1	1						=	50
																1	1	1	1	1	=	50
	1					1					1					1					=	30
		1					1					1					1				=	20
			1					1					1					1			=	70
				1					1					1					1		=	30
					1					1					1					1	=	60

Διαδικασία επίλυσης

- **Βήμα 1:** Εύρεση μιας αρχικής ΒΕΛ με $m + n - 1$ στοιχεία
  α) Μέθοδος «βορειοδυτικής» γωνίας
  β) Μέθοδος ελάχιστου κόστους
  γ) Μέθοδος μέγιστης διαφοράς (Vogel)
- **Βήμα 2:** Αλγόριθμος stepping stone
  2α) Υπολογισμός ΟΚΕ για τις μεταφορές που δεν αποτελούν μέρος της ΒΕΛ (μη βασικές μεταβλητές)
  2β) Εάν δεν υπάρχει ΟΚΕ<0, τότε η ΒΕΛ είναι βέλτιστη
  Διαφορετικά, εισαγωγή στη ΒΕΛ της μεταφοράς με το μικρότερο ΟΚΕ, προσαρμογή των υπόλοιπων και συνέχεια από το βήμα 2α

Παράδειγμα

- Παράδειγμα με 3 πηγές (S1-S3), 3 προορισμούς (D1-D3) και τα ακόλουθα στοιχεία για τα κόστη, την προσφορά και τη ζήτηση

	D1	D2	D3	Προσφορά
S1	7	8	5	4
S2	3	7	2	3
S3	9	5	10	3
Ζήτηση	2	2	6	

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

			4
			3
			3
2	2	6	

Διαθεσιμότητες πηγών

Ζήτηση προορισμών

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2			4
			3
			3
2	2	6	

Στο ΒΔ κελί του πίνακα μεταφέρεται η μέγιστη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2			2
			3
			3
0	2	6	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2			2
			3
			3
0	2	6	

Η ζήτηση του 1^{ου} περιορισμού καλύφθηκε, οπότε διαγράφεται η 1^{η} στήλη

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2		2
			3
			3
0	2	6	

Στο ΒΔ κελί του πίνακα μεταφέρεται η μέγιστη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2		0
			3
			3
0	0	6	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2		0
			3
			3
0	0	6	

Η ζήτηση του 2ου περιορισμού καλύφθηκε, οπότε διαγράφεται η 2η στήλη

* Εναλλακτικά θα μπορούσε να είχε διαγραφτεί η 1η γραμμή γιατί εξαντλήθηκε η διαθεσιμότητα της 1ης πηγής (***σε κάθε επανάληψη διαγράφουμε μόνο μία γραμμή ή στήλη***)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	0
			3
			3
0	0	6	

Στο ΒΔ κελί του πίνακα μεταφέρεται η μέγιστη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	$\boxed{0}$
			3
			3
0	0	$\boxed{6}$	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	$\boxed{0}$
			3
			3
0	0	6	

Η διαθεσιμότητα της 1ης πηγής εξαντλήθηκε, οπότε διαγράφεται η 1η γραμμή

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	0
		3	$\boxed{3}$
			3
0	0	$\boxed{6}$	

Στο ΒΔ κελί του πίνακα μεταφέρεται η μέγιστη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	0
		3	$\boxed{0}$
			3
0	0	$\boxed{3}$	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	0
		3	$\boxed{0}$
			3
0	0	3	

Η διαθεσιμότητα της 2ης πηγής εξαντλήθηκε, οπότε διαγράφεται η 2η γραμμή

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	0
		3	0
		3	$\boxed{3}$
0	0	$\boxed{3}$	

Στο ΒΔ κελί του πίνακα μεταφέρεται η μέγιστη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	0
		3	0
		3	0
0	0	0	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας

2	2	0	0
		3	0
		3	0
0	0	0	

Οι διαθεσιμότητες των **πηγών** εξαντλήθηκαν και η ζήτηση των **προορισμών** καλύφθηκε
Η ΒΕΛ έχει $m + n - 1 = 5$ στοιχεία στον πίνακα

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	5
3	7	2
9	5	10

Ποσότητες

			4
		3	3
			3
2	2	6	

Στο κελί με το **ελάχιστο κόστος** μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	5
3	7	2
9	5	10

Ποσότητες

			4
		3	0
			3
2	2	3	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	5
9	5	10

Ποσότητες

			4
		3	$\boxed{0}$
			3
2	2	3	

Η διαθεσιμότητα της $2^{ης}$ πηγής εξαντλήθηκε, οπότε διαγράφεται η $2^{η}$ γραμμή από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	$\boxed{5}$
9	5	10

Ποσότητες

		3	$\boxed{4}$
		3	0
			3
2	2	$\boxed{3}$	

Στο κελί με το **ελάχιστο κόστος** μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	5
9	5	10

Ποσότητες

		3	1
		3	0
			3
2	2	0	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	
9	5	

Ποσότητες

		3	1
		3	0
			3
2	2	0	

Η ζήτηση του 3ου προορισμού καλύφθηκε, οπότε διαγράφεται η 3η στήλη από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	
9	$\boxed{5}$	

Ποσότητες

		3	1
		3	0
	2		$\boxed{3}$
2	$\boxed{2}$	0	

Στο κελί με το **ελάχιστο κόστος** μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7	8	
9	5	

Ποσότητες

		3	1
		3	0
	2		$\boxed{1}$
2	$\boxed{0}$	0	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7		
9		

Ποσότητες

		3	1
		3	0
	2		1
2	0	0	

Η ζήτηση του $2^{ου}$ προορισμού καλύφθηκε, οπότε διαγράφεται η $2^{η}$ στήλη από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7		
9		

Ποσότητες

1		3	1
		3	0
	2		1
2	0	0	

Στο κελί με το **ελάχιστο κόστος** μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

7		
9		

Ποσότητες

1		3	$\boxed{0}$
		3	0
	2		1
$\boxed{1}$	0	0	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

9		

Ποσότητες

1		3	$\boxed{0}$
		3	0
	2		1
1	0	0	

Η διαθεσιμότητα της 1ης πηγής εξαντλήθηκε, οπότε διαγράφεται η 1η γραμμή από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

9		

Ποσότητες

1		3	0
		3	0
1	2		1
1	0	0	

Στο κελί με το **ελάχιστο κόστος** μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

9		

Ποσότητες

1		3	0
		3	0
1	2		0
0	0	0	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος ελάχιστου κόστους

Κόστη

Ποσότητες

1		3	0
		3	0
1	2		0
0	0	0	

Οι διαθεσιμότητες των **πηγών** εξαντλήθηκαν και η ζήτηση των **προορισμών** καλύφθηκε

Η ΒΕΛ έχει $m + n - 1 = 5$ στοιχεία στον πίνακα

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

7	8	5	2
3	7	2	1
9	5	10	4
4	2	3	

Ποσότητες

			4
			3
			3
2	2	6	

Διαφορές μεταξύ του μικρότερου κόστους και του αμέσως μεγαλύτερου κάθε γραμμής/στήλης

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

7	8	5	2
3	7	2	1
9	5	10	4
4	2	3	

Ποσότητες

			4
			3
			3
2	2	6	

Από τις **γραμμές & στήλες** με τη μέγιστη διαφορά επιλέγεται το κελί με το **μικρότερο κόστος**

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

7	8	5	2
3	7	2	1
9	5	10	4
4	2	3	

Ποσότητες

			4
2			3
			3
2	2	6	

Στο κελί που επιλέχθηκε μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

7	8	5	2
3	7	2	1
9	5	10	4
4	2	3	

Ποσότητες

			4
2			1
			3
0	2	6	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	2
	7	2	1
	5	10	4
	2	3	

Ποσότητες

			4
2			1
			3
0	2	6	

Η ζήτηση του 1^{ου} προορισμού καλύφθηκε, οπότε διαγράφεται η 1^{η} στήλη από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	7	2	5
	5	10	5
	2	3	

Ποσότητες

			4
2			1
			3
0	2	6	

Υπολογίζονται ξανά οι διαφορές μεταξύ του μικρότερου κόστους και του αμέσως μεγαλύτερου κάθε γραμμής/στήλης

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	7	2	5
	5	10	5
	2	3	

Ποσότητες

			4
2			1
			3
0	2	6	

Από τις **γραμμές & στήλες** με τη μέγιστη διαφορά επιλέγεται το κελί με το **μικρότερο κόστος**

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	7	2	5
	5	10	5
	2	3	

Ποσότητες

			4
2		1	1
			3
0	2	6	

Στο κελί που επιλέχθηκε μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	7	2	5
	5	10	5
	2	3	

Ποσότητες

			4
2		1	0
			3
0	2	5	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	5	10	5
	2	3	

Ποσότητες

			4
2		1	$\boxed{0}$
			3
0	2	5	

Η διαθεσιμότητα της $2^{ης}$ πηγής εξαντλήθηκε, οπότε διαγράφεται η $2^{η}$ γραμμή από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	5	10	5
	3	5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
			3
0	2	5	

Υπολογίζονται ξανά οι διαφορές μεταξύ του μικρότερου κόστους και του αμέσως μεγαλύτερου κάθε γραμμής/στήλης

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	5	10	5
	3	5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
			3
0	2	5	

Από τις **γραμμές & στήλες** με τη μέγιστη διαφορά επιλέγεται το κελί με το **μικρότερο κόστος**

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	5	10	5
	3	5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2		3
0	2	5	

Στο κελί που επιλέχθηκε μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

	8	5	3
	5	10	5
	3	5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2		1
0	0	5	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

		5	3
		10	5
		5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2		1
0	0	5	

Η ζήτηση του $2^{ου}$ προορισμού καλύφθηκε, οπότε διαγράφεται η $2^{η}$ στήλη από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

		5	5
		10	10
		5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2		1
0	0	5	

Υπολογίζονται ξανά οι διαφορές μεταξύ του μικρότερου κόστους και του αμέσως μεγαλύτερου κάθε γραμμής/στήλης

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

		5	5
		10	10
		5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2		1
0	0	5	

Από τις **γραμμές & στήλες** με τη μέγιστη διαφορά επιλέγεται το κελί με το **μικρότερο κόστος**

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

		5	5
		10	10
		5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2	1	1
0	0	5	

Στο κελί που επιλέχθηκε μεταφέρεται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα (το ελάχιστο της **ζήτησης** του προορισμού και της **διαθεσιμότητας** της πηγής)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

		5	5
		10	10
		5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2	1	0
0	0	4	

Ενημερώνονται η ζήτηση και η διαθεσιμότητα (μειώνονται κατά την ποσότητα που μεταφέρθηκε στο κελί)

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

		5	5
		5	

Ποσότητες

			4
2		1	0
	2	1	0
0	0	4	

Η διαθεσιμότητα της 3ης πηγής εξαντλήθηκε, οπότε διαγράφεται η 3η γραμμή από τους πίνακες

Αρχική ΒΕΛ – Μέθοδος Vogel (μεγ. διαφοράς)

Κόστη

Ποσότητες

		4	4
2		1	0
	2	1	0
0	0	4	

Συμπληρώνεται η ποσότητα που έχει απομείνει στο τελευταίο διαθέσιμο κελί και ολοκληρώνεται η διαδικασία

Οι διαθεσιμότητες των **πηγών** εξαντλήθηκαν και η ζήτηση των **προορισμών** καλύφθηκε

Η ΒΕΛ έχει $m + n - 1 = 5$ στοιχεία στον πίνακα

Υπολογισμός ΟΚΕ και βελτίωση λύσης

Κόστη

7^{+}	8	5^{-}
3^{-}	7	2^{+}
9	5	10

Ποσότητες

$^{+}$		4^{-}	4
2^{-}		1^{+}	3
	2	1	3
2	2	6	

Κόστος = 48
(Ποσότητες × Κόστη)

Κλειστές διαδρομές μεταξύ βασικών μεταβλητών

- Αύξηση x_{11} → μείωση x_{13} → αύξηση x_{23} → μείωση x_{21}
  - $\bar{c}_{11} = 7 - 5 + 2 - 3 = 1 > 0$
  - Η μεταφορά ποσότητας x_{11} από την πηγή 1 στον προορισμό 1 αυξάνει το κόστος $1x_{11}$

Υπολογισμός ΟΚΕ και βελτίωση λύσης

Κόστη

7	8^{+}	5^{-}
3	7	2
9	5^{-}	10^{+}

Ποσότητες

	$^{+}$	4^{-}	4
2		1	3
	2^{-}	1^{+}	3
2	2	6	

Κόστος = 48
(Ποσότητες × Κόστη)

Κλειστές διαδρομές μεταξύ βασικών μεταβλητών

- Αύξηση x_{12} → μείωση x_{13} → αύξηση x_{33} → μείωση x_{32}
  - $\bar{c}_{12} = 8 - 5 + 10 - 5 = 8 > 0$
  - Η μεταφορά ποσότητας x_{12} από την πηγή 1 στον προορισμό 2 αυξάνει το κόστος $8x_{12}$

Υπολογισμός ΟΚΕ και βελτίωση λύσης

Κόστη

7	8	5
3	7+	2-
9	5-	10+

Ποσότητες

		4	4
2	+	1-	3
	2-	1+	3
2	2	6	

Κόστος = 48
(Ποσότητες × Κόστη)

Κλειστές διαδρομές μεταξύ βασικών μεταβλητών

- Αύξηση $x_{22} \to$ μείωση $x_{23} \to$ αύξηση $x_{33} \to$ μείωση x_{32}
  - $\bar{c}_{22} = 7 - 2 + 10 - 5 = 10 > 0$
  - Η μεταφορά ποσότητας x_{22} από την πηγή 2 στον προορισμό 2 αυξάνει το κόστος $10x_{22}$

Υπολογισμός ΟΚΕ και βελτίωση λύσης

Κόστη

7	8	5
3-	7	2+
9+	5	10-

Ποσότητες

		4	4
2-		1+	3
+	2	1-	3
2	2	6	

Κόστος = 48
(Ποσότητες × Κόστη)

Κλειστές διαδρομές μεταξύ βασικών μεταβλητών

- Αύξηση $x_{31} \to$ μείωση $x_{21} \to$ αύξηση $x_{23} \to$ μείωση x_{33}
  - $\bar{c}_{31} = 9 - 3 + 2 - 10 = -2 < 0$
  - Η μεταφορά ποσότητας x_{31} από την πηγή 3 στον προορισμό 1 ***<u>μειώνει</u>*** το κόστος $2x_{31}$
  - Η λύση δεν είναι βέλτιστη: εισάγεται στη βάση η x_{31} στη θέση της x_{33}
    $$x_{31} = \min\{x_{21}, x_{33}\} = \min\{2, 1\} = 1$$

Νέο πλάνο μεταφοράς

Κόστη

7	8	5
3	7	2
9	5	10

Ποσότητες

		4	4
1		2	3
1	2		3
2	2	6	

Κόστος = 46
(Ποσότητες × Κόστη)

Νέα ΟΚΕ

- $\bar{c}_{11} = 1, \bar{c}_{12} = 6, \bar{c}_{22} = 8, \bar{c}_{33} = 2$
- Η λύση είναι βέλτιστη γιατί δεν υπάρχει αρνητικό ΟΚΕ