Γραμμικός Προγραμματισμός

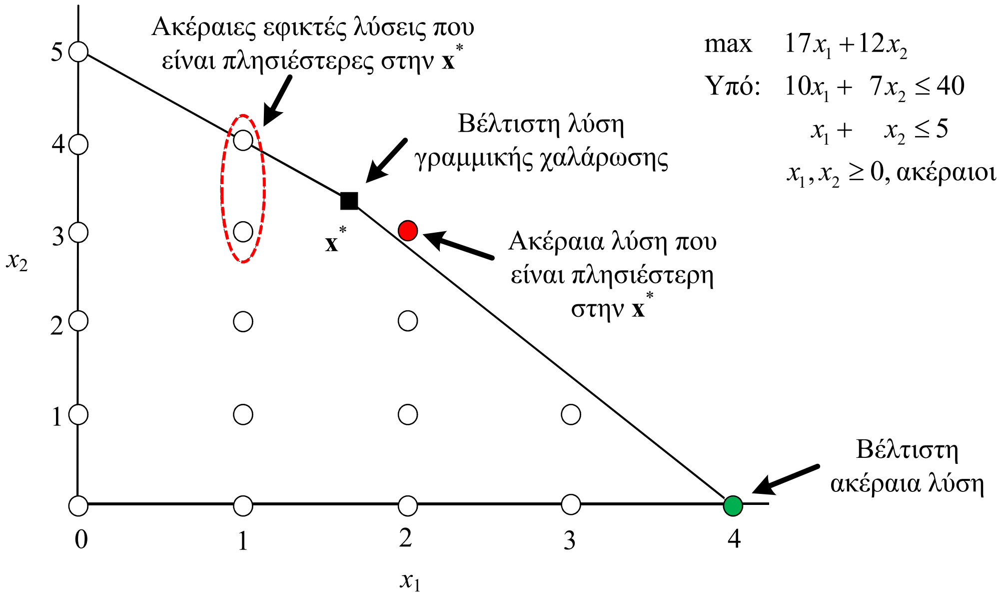
ΕΝΟΤΗΤΑ 5^{η}
Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός

Μιχάλης Δούμπος, 2018

Ακέραιος ΓΠ (integer linear programming)

- ΓΠ που έχουν ακέραιες μεταβλητές απόφασης αναφέρονται ως ακέραια ΓΠ (ή μικτά-ακέραια ΓΠ εάν υπάρχουν και μη ακέραιες μεταβλητές)
- Ενώ το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός ΓΠ είναι κυρτό, το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός ακέραιου ΓΠ δεν είναι κυρτό
  - Σε ένα ΓΠ ο συνδυασμός δύο εφικτών λύσεων είναι επίσης εφικτή λύση
  - Σε ένα ακέραιο ΓΠ ο συνδυασμός δύο εφικτών λύσεων μπορεί να μην είναι εφικτή λύση
- Η λύση ακέραιων ΓΠ απαιτεί η λύση πολλών επιμέρους ΓΠ και είναι υπολογιστικά πολύ πολυπλοκότερη από τη λύση απλών ΓΠ
- **Ορισμός:** το ΓΠ που αντιστοιχεί σε ένα ακέραιο ΓΠ αγνοώντας την απαίτηση οι μεταβλητές να είναι ακέραιες αναφέρεται ως γραμμική χαλάρωση (linear relaxation)

Γραφική αναπαράσταση ακέραιου ΓΠ



$$
\begin{aligned}
\max \quad & 17x_1 + 12x_2 \\
\text{Υπό:} \quad & 10x_1 + 7x_2 \le 40 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1, x_2 \ge 0, \text{ ακέραιοι}
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα του «σακιδίου» (knapsack problem)

- Δεδομένα
  - n αντικείμενα
  - w_i το «βάρος» του αντικειμένου i
  - c_i το κέρδος από τη μεταφορά του αντικειμένου i
  - W η χωρητικότητα του «σακιδίου»
- Στόχος
  - Καθορισμός των αντικειμένων που πρέπει να μεταφερθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος
  - Καθορισμός της ποσότητας που πρέπει να μεταφερθεί από κάθε αντικείμενο ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{Υπό:} \quad & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \le W \\
& \mathbf{x} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Έργα	Απόδοση	Έτος 1	Έτος 2	Έτος 3
E1	10%	0,5	0,3	0,2
E2	12%	1,0	0,8	0,2
E3	25%	1,5	1,5	0,3
E4	3%	0,1	0,4	0,1
Διαθέσιμα		3,1	2,5	0,4

- Τα έργα E3 και E4 είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα
- Πρέπει να υλοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα E1 και E2
- Η υλοποίηση του έργου E1 έχει νόημα μόνο εάν υλοποιηθεί το έργο E4
- Ποια έργα πρέπει να υλοποιηθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί η απόδοση;

Παράδειγμα - Μοντελοποίηση

$$
\begin{array}{ll}
\max & 10x_1 + 12x_2 + 25x_3 + 0{,}3x_4 \\
\text{Υπό:} & 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}1x_4 \le 3{,}1 \\
& 0{,}3x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}4x_4 \le 2{,}5 \\
& 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}1x_4 \le 0{,}4 \\
& x_3 + x_4 \le 1 \\
& x_1 + x_2 \ge 1 \\
& x_1 - x_4 \le 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Χωροθέτηση (facility location)

- Δεδομένα
  - n τοποθεσίες για την εγκατάσταση μονάδων παραγωγής
  - m πελάτες
  - b_i η μέγιστη δυνατότητα παραγωγής για τη μονάδα στην τοποθεσία i
  - d_j η ζήτηση του πελάτη j
  - c_{ij} το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από τη μονάδα στην τοποθεσία i προς τον πελάτη j
  - F_i το σταθερό κόστος εγκατάστασης μονάδας παραγωγής στην τοποθεσία i
- Στόχος
  - Καθορισμός των τοποθεσιών όπου θα εγκατασταθούν οι μονάδες παραγωγής και του πλάνου εξυπηρέτησης των πελατών που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος

Χωροθέτηση (facility location)

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} F_i y_i & \\
\text{Υπό:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j & j = 1, \dots, m \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i b_i & i = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \geq 0 & i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \\
 & y_i \in \{0,1\} & i = 1, \dots, n
\end{array}
$$

Παράδειγμα χωροθέτησης - Άσκηση Β.23

- Κόστη εξυπηρέτησης 3 πελατών (Π1, Π2, Π3) από 3 εργοστάσια (Ε1, Ε2, Ε3) σε χιλιάδες ευρώ:

	Π1	Π2	Π3
Ε1	5	4	2
Ε2	8	7	2
Ε3	3	3	1
Ζήτηση (χιλ.)	20	40	50

- Το κόστος κατασκευής κάθε εργοστασίου είναι 500 χιλ. ευρώ
- Η παραγωγή κάθε εργοστασίου δεν μπορεί να υπερβεί τις 100 χιλ. μονάδες
- Η παραγωγή του Ε1 (εφόσον κατασκευαστεί) πρέπει να είναι τουλάχιστον 30 χιλ. μονάδες

Άσκηση Β.22

- Το κόστος προετοιμασίας της γραμμής παραγωγής είναι €50.000 για το προϊόν Π1 και €80.000 για το Π2
- Τα έσοδα (ανά τεμάχιο) από την παραγωγή κάθε προϊόντος είναι €10 για το προϊόν Π1 και €15 για το Π2
- Η παραγωγή μπορεί να γίνει σε δύο εργοστάσια (Ε1, Ε2):
  - Ε1: 50 τεμάχια/ώρα για το Π1 και 40 τεμάχια/ώρα για το Π2.
  - Ε2: 40 τεμάχια/ώρα από το Π1 και 25 τεμάχια/ώρα από το Π2.
  - 500 ώρες διαθέσιμες στο Ε1, 700 ώρες στο Ε2.
  - Μόνο ένα από τα δύο εργοστάσια μπορεί να χρησιμοποιηθεί

Άσκηση B.22 – Μοντελοποίηση

- Μεταβλητές απόφασης
  - x_1 = ποσότητα παραγωγής Π1
  - x_2 = ποσότητα παραγωγής Π2
  - $y_1 = 1$ εάν παραχθεί το Π1 ($x_1 > 0 \Rightarrow y_1 = 1$)
  - $y_2 = 1$ εάν παραχθεί το Π2 ($x_2 > 0 \Rightarrow y_2 = 1$)
  - $z = 0$ εάν χρησιμοποιηθεί το Ε1, αλλιώς $z = 1$

Άσκηση B.22 – Μοντελοποίηση

$$
\begin{array}{ll}
\max & 10x_1 + 15x_2 - 50000y_1 - 80000y_2 \\
\text{Υπό:} & x_1 - My_1 \leq 0 \\
& x_2 - My_2 \leq 0 \\
& \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{40}x_2 - Mz \leq 500 \qquad \text{(A)} \\
& \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{25}x_2 - M(1-z) \leq 700 \ \text{(B)} \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad y_1, y_2, z \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Ερμηνεία: εάν $z = 0$, τότε ενεργοποιείται ο περιορισμός (A) και αγνοείται ο (B), αλλιώς εάν $z = 1$, τότε αγνοείται ο (A) και ενεργοποιείται ο (B)

Άσκηση Β.18

Μια εταιρία ηλεκτρισμού σκοπεύει να εγκαταστήσει αυτόματους μετρητές κατανάλωσης ρεύματος στους πελάτες της. Οι μετρητές αυτοί μεταδίδουν ασύρματα τα στοιχεία της κατανάλωσης σε κατάλληλους δέκτες, οι οποίοι με τη σειρά τους είναι συνδεδεμένοι με το κεντρικό σύστημα της εταιρίας για την έκδοση των λογαριασμών. Σε μια συγκεκριμένη περιοχή, υπάρχουν 10 καταναλωτές σε καθέναν από τους οποίους αντιστοιχεί ένας μετρητής. Για την κάλυψη της περιοχής αυτής, η εταιρία μπορεί να τοποθετήσει δέκτες σε 8 προκαθορισμένα σημεία, τα οποία επικοινωνούν με τους μετρητές ως εξής:

Δέκτες	1	2	3	4	5	6	7	8
Μετρητές	1, 2, 3	2, 3, 9	5, 6, 7, 8	7, 9, 10	1, 3, 6, 8	1, 4, 7, 9	4, 5, 9	1, 4, 8

$$\begin{array}{lll} \min & y_1 + \cdots + y_8 & \\ \text{υ.π.} & \sum_{i \in A_j} x_{ij} \le 3 y_j, & j = 1, \ldots, 8 \\ & \sum_{j \in B_i} x_{ij} \ge 1, & i = 1, \ldots, 10 \\ & x_{ij}, y_i \in \{0,1\} & \end{array}$$

A_j = σύνολο μετρητών με τους οποίους μπορεί να επικοινωνήσει ο δέκτης j

B_i = σύνολο δεκτών που μπορούν να δεχτούν δεδομένα από το μετρητή i

Άσκηση Β.20

- L περιοχές πληθυσμού $p_1, \ldots, p_L$
- Κατασκευή κέντρων υγείας σε J σημεία
- d_{ij} = απόσταση περιοχής i από το σημείο j
- Το κόστος κατασκευής κέντρου υγείας στο σημείο j που θα εξυπηρετεί πληθυσμό s_j είναι $1000 s_j$
- B = διαθέσιμος προϋπολογισμός

Άσκηση Β.20

$$
\begin{array}{lll}
\min & D & \\
\text{Υπό:} & x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{iJ} = 1 & i = 1, 2, \ldots, L \\
& (x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{Lj}) - L y_j \leq 0 & j = 1, 2, \ldots, J \\
& (x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{Lj}) - y_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, J \\
& D - (d_{i1} x_{i1} + d_{i2} x_{i2} + \ldots + d_{iJ} x_{iJ}) \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, L \\
& s_j - (p_1 x_{1j} + p_2 x_{2j} + \ldots + p_L x_{Lj}) = 0 & j = 1, 2, \ldots, J \\
& 1000 s_1 + 1000 s_2 + \ldots + 1000 s_J \leq B & \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\},\ D, s_j \geq 0 & i = 1, \ldots, L,\ j = 1, \ldots, J
\end{array}
$$

Μη γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις

- Διαφημιστικός προϋπολογισμός €20.000
- Αποδέκτες από τις διαφημιστικές καταχωρήσεις σε ένα περιοδικό Β
  - 1-6 καταχωρήσεις: 10.000 αποδέκτες/καταχώρηση
  - Κάθε μία από τις επόμενες 4: επιπλέον 3.000 αποδέκτες/καταχώρηση
  - Καταχωρήσεις 11–15: επιπλέον 2.500 αποδέκτες/καταχώρηση
  - Επιπλέον καταχωρήσεις δεν θα έχουν παραπάνω αποδέκτες
- Αποδέκτες από τις καταχωρήσεις σε ένα περιοδικό Β
  - 1–4 καταχωρήσεις: 8.000 αποδέκτες/καταχώρηση
  - 5–12 καταχωρήσεις: 6.000 επιπλέον αποδέκτες/καταχώρηση
  - 13–15 καταχωρήσεις: 2.000 επιπλέον αποδέκτες/καταχώρηση
  - Επιπλέον καταχωρήσεις δεν θα έχουν παραπάνω αποδέκτες
- Μεγιστοποίηση του αριθμού των αποδεκτών, δεδομένου ότι κάθε καταχώρηση κοστίζει €1.000

Μη γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις

- Μοντελοποίηση (ειδική περίπτωση)
  - x_{Ai} = πλήθος καταχωρήσεων στο περιοδικό Α με αποδέκτες/καταχώρηση: 10.000 ($i = 1$), 3.000 ($i = 2$), 2.500 ($i = 3$)
  - x_{Bi} = πλήθος καταχωρήσεων στο περιοδικό Β με αποδέκτες/καταχώρηση: 8.000 ($i = 1$), 6.000 ($i = 2$), 2.000 ($i = 3$)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 10000x_{A1} + 3000x_{A2} + 2500x_{A3} + 8000x_{B1} + 6000x_{B2} + 2000x_{B3} \\
\text{Υπό:} \quad & x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 20 \\
& x_{A1} \leq 6 \quad x_{B1} \leq 4 \\
& x_{A2} \leq 4 \quad x_{B2} \leq 8 \\
& x_{A3} \leq 5 \quad x_{B3} \leq 3 \\
& x_{Ai}, x_{Bi} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

Μη γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις

- Μοντελοποίηση (γενική περίπτωση)
  - Εκτός των προηγούμενων, ορίζονται δυαδικές μεταβλητές

$$
\begin{aligned}
y_{A1} = 1 \Rightarrow x_{A1} = 6 \quad & y_{B1} = 1 \Rightarrow x_{B1} = 4 \\
y_{A2} = 1 \Rightarrow x_{A2} = 4 \quad & y_{B2} = 1 \Rightarrow x_{B2} = 8
\end{aligned}
$$

  - Εισάγονται οι περιορισμοί

$$
\begin{aligned}
6y_{A1} \leq x_{A1} \leq 6 \qquad & 4y_{B1} \leq x_{B1} \leq 4 \\
4y_{A2} \leq x_{A2} \leq 4y_{A1} \quad & 8y_{B2} \leq x_{B2} \leq 8y_{B1} \\
0 \leq x_{A3} \leq 5y_{A2} \quad & 0 \leq x_{B3} \leq 3y_{B2}
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (travelling salesman problem, TSP)

- Δεδομένα
  - $N = \{1, 2, \dots, n\}$ σύνολο προορισμών
  - c_{ij} «κόστος» μετακίνησης από τον προορισμό i στον προορισμό j
- Στόχος
  - Εύρεση της καλύτερης διαδρομής για τη μετακίνηση σε όλους τους προορισμούς
- Εφαρμογές (http://www.math.uwaterloo.ca/tsp)
  - Μεταφορές
  - Εφοδιαστική αλυσίδα
  - Σχεδιασμός ηλεκτρονικών κυκλωμάτων
  - Βιοπληροφορική & γενετική έρευνα
  - ……………….

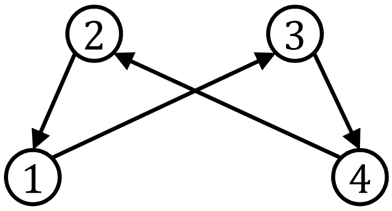
TSP – Μοντελοποίηση Dantzig, Fulkerson, Johnson (DFJ)

- Μεταβλητές:
  - $x_{ij} \in \{0, 1\}$: εάν η μετακίνηση $i \to j$ αποτελεί μέρος της διαδρομής

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{Υπό:} \quad & \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, n \\
& \sum_{i \neq j} x_{ij} = 1 & j = 1, \dots, n \\
& \sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq n_S - 1 & \forall S \subset N, 1 < n_S < n - 1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i, j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα TSP

	1	2	3	4
1		7	3	5
2	7		6	5
3	3	6		1
4	5	5	1	



Ελάχιστο κόστος = 16

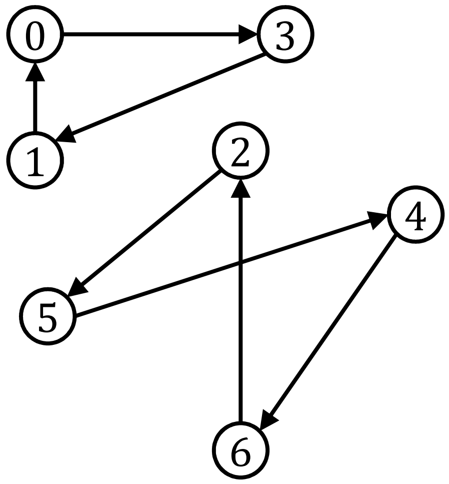
$$
\begin{aligned}
\min\quad & 7(x_{12}+x_{21})+3(x_{13}+x_{31})+5(x_{14}+x_{41})+\\
& 6(x_{23}+x_{32})+5(x_{24}+x_{42})+1(x_{34}+x_{43})\\
\text{s.t.}\quad & x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\
& x_{21}+x_{23}+x_{24}=1\\
& x_{31}+x_{32}+x_{34}=1\\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}=1\\
& x_{21}+x_{31}+x_{41}=1\\
& x_{12}+x_{32}+x_{42}=1\\
& x_{13}+x_{23}+x_{43}=1\\
& x_{14}+x_{24}+x_{34}=1\\
& x_{12}+x_{21}\le 1\\
& x_{13}+x_{31}\le 1\\
& x_{14}+x_{41}\le 1\\
& x_{23}+x_{32}\le 1\\
& x_{24}+x_{42}\le 1\\
& x_{34}+x_{43}\le 1\\
& x_{ij}\in\{0,1\}
\end{aligned}
$$

TSP – Μοντελοποίηση των Miller, Tucker, Zemlin (MTZ)

- Μεταβλητές:
  - $x_{ij} \in \{0,1\}$: εάν η μετακίνηση $i \to j$ αποτελεί μέρος της διαδρομής
  - $t_i \in \{0,1,\dots,n-1\}$: η σειρά του προορισμού i στη διαδρομή

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{Υπό:}\quad & \sum_{j\neq i} x_{ij} = 1 & i = 1,\dots,n\\
& \sum_{i\neq j} x_{ij} = 1 & j = 1,\dots,n\\
& t_j \ge t_i + 1 - n(1 - x_{ij}) & \forall i \neq j\\
& t_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, x_{ij} \in \{0,1\} & i,j = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

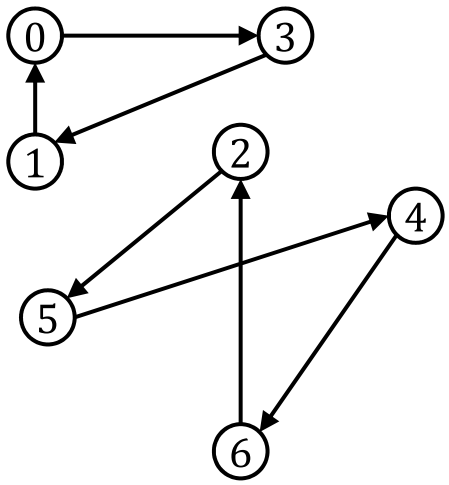
TSP – Μοντελοποίηση των Miller, Tucker, Zemlin (MTZ)



Περιορισμοί για να αποκλειστεί υποδιαδρομή μεταξύ των {2, 4, 5, 6}

$$t_4 \geq t_2 + 1 - 7(1 - x_{24})$$
$$t_2 \geq t_4 + 1 - 7(1 - x_{42})$$
$$t_5 \geq t_2 + 1 - 7(1 - x_{25})$$
$$t_2 \geq t_5 + 1 - 7(1 - x_{52})$$
$$t_6 \geq t_2 + 1 - 7(1 - x_{26})$$
$$t_2 \geq t_6 + 1 - 7(1 - x_{62})$$
$$t_5 \geq t_4 + 1 - 7(1 - x_{45})$$
$$t_4 \geq t_5 + 1 - 7(1 - x_{54})$$
$$t_6 \geq t_4 + 1 - 7(1 - x_{46})$$
$$t_4 \geq t_6 + 1 - 7(1 - x_{64})$$
$$t_6 \geq t_5 + 1 - 7(1 - x_{56})$$
$$t_5 \geq t_6 + 1 - 7(1 - x_{65})$$

TSP – Μοντελοποίηση των Miller, Tucker, Zemlin (MTZ)



Αποκλείεται η υποδιαδρομή

$2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$

από τους περιορισμούς;

$$t_5 \geq t_2 + 1 - 7(1 - x_{25})$$
$$t_4 \geq t_5 + 1 - 7(1 - x_{54})$$
$$t_6 \geq t_4 + 1 - 7(1 - x_{46})$$
$$t_2 \geq t_6 + 1 - 7(1 - x_{62})$$

Αντικατάσταση

$x_{25} = x_{54} = x_{46} = x_{62} = 1$

και πρόσθεση περιορισμών:

$0 \geq 4$

(η υποδιαδρομή αποκλείεται)

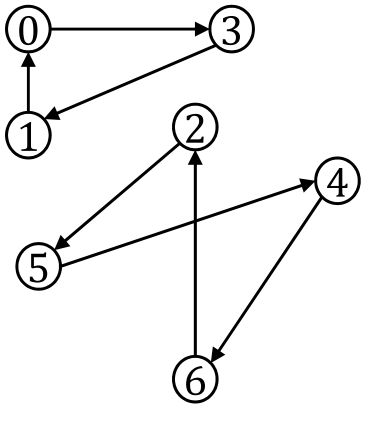
TSP – Σύγκριση μοντελοποιήσεων

	DFJ		MTZ	
Προορισμοί n	Μεταβλητές $n(n-1)$	Περιορισμοί 2^n-2	Μεταβλητές n^2-1	Περιορισμοί n^2+n
10	90	1.022	99	110
20	380	1.048.574	399	420
50	2.450	$> 10^{15}$	2.499	2.550
100	9.900	$> 10^{30}$	9.999	10.100
85.900***	~7,4 δισ.	!!!!......	~7,4 δισ.	~7,4 δισ.

*** Η λύση του σε ένα πολύ ισχυρό PC (2017) θα απαιτούσε ~1 χρόνο
Προσεγγιστικές λύσεις (<0,05% του βέλτιστου) ακόμα και σε προβλήματα ~2.000.000 προορισμών

TSP – Σύγκριση μοντελοποιήσεων

- Η μοντελοποίηση MTZ είναι ακατάλληλη για προβλήματα μεγάλων διαστάσεων (λύση μόνο μέσω της *ισχυρότερης* μοντελοποίησης DFJ)



Περιορισμοί MTZ

$$
\begin{aligned}
t_4 &\geq t_2 + 1 - 7(1 - x_{24})\\
t_2 &\geq t_4 + 1 - 7(1 - x_{42})\\
t_5 &\geq t_2 + 1 - 7(1 - x_{25})\\
t_2 &\geq t_5 + 1 - 7(1 - x_{52})\\
t_6 &\geq t_2 + 1 - 7(1 - x_{26})\\
t_2 &\geq t_6 + 1 - 7(1 - x_{62})\\
t_5 &\geq t_4 + 1 - 7(1 - x_{45})\\
t_4 &\geq t_5 + 1 - 7(1 - x_{54})\\
t_6 &\geq t_4 + 1 - 7(1 - x_{46})\\
t_4 &\geq t_6 + 1 - 7(1 - x_{64})\\
t_6 &\geq t_5 + 1 - 7(1 - x_{56})\\
t_5 &\geq t_6 + 1 - 7(1 - x_{65})
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \sum_{i,j \in \{2,4,5,6\}} x_{ij} \leq 12 - \frac{12}{7} \approx 10,3$$

Περιορισμός DFJ:

$$\sum_{i,j \in \{2,4,5,6\}} x_{ij} \leq 3$$

Μέθοδος κλάδου & φράγματος (branch & bound)

Ορισμοί:

- *Άνω φράγμα* (ΑΦ) μιας μη ακέραιας λύσης $\mathbf{x}$: η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στη λύση αυτή
  - Μια «στρογγυλοποίηση» που έχει ως βάση τη λύση $\mathbf{x}$ δεν μπορεί να αποφέρει υψηλότερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση
- *Κάτω φράγμα* (ΚΦ): η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην καλύτερη ακέραια λύση
  - Δεν υπάρχει λόγος «στρογγυλοποίησης» μη ακέραιων λύσεων εάν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στις λύσεις αυτές δεν υπερβαίνει το ΚΦ

- Η μέθοδος κλάδου & φράγματος ξεκινά από τη βέλτιστη λύση της γραμμικής χαλάρωσης
  - Σταδιακή «στρογγυλοποίηση» με την εισαγωγή περιορισμών που οδηγούν σε μη ακέραιες λύσεις με χαμηλότερο ΑΦ και σταδιακά καλύτερες ακέραιες λύσεις (υψηλότερο ΚΦ)
  - Όταν ΑΦ $-$ ΚΦ $\leq \varepsilon$ (πχ. όταν δεν υπάρχει ΑΦ > ΚΦ), τότε η διαδικασία σταματά

Μέθοδος κλάδου & Φράγματος

1. Αρχικοποίηση
   - Βρίσκεται η βέλτιστη λύση $\mathbf{x}_0$ της γραμμικής χαλάρωσης
   - Εάν η λύση $\mathbf{x}_0$ είναι ακέραια, τότε είναι βέλτιστη: ΤΕΛΟΣ
   - Τίθεται ΑΦ$(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0$
   - Προαιρετικά: ορίζεται μια ακέραια εφικτή λύση $\mathbf{x}$ και τίθεται ΚΦ $= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$
2. Διακλάδωση: Επιλέγεται μια μη ακέραια μεταβλητή j και λύνονται τα ΓΠ:

   α) $\{\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, x_j \leq \lfloor x_j \rfloor\} \longrightarrow \mathbf{x}_L$

   β) $\{\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, x_j \geq \lceil x_j \rceil\} \longrightarrow \mathbf{x}_R$
3. Ενημέρωση φραγμάτων και έλεγχος βελτιστότητας:
   - Τίθενται ΑΦ$(\mathbf{x}_L) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_L$ και ΑΦ$(\mathbf{x}_R) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_R$
   - Τίθεται ΚΦ $= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_Z$, όπου $\mathbf{x}_Z$ είναι η καλύτερη μέχρι τώρα ακέραια λύση
   - Εάν δεν υπάρχει ΑΦ$(\mathbf{x}) >$ ΚΦ, τότε ΤΕΛΟΣ: η βέλτιστη λύση είναι η $\mathbf{x}_Z$
   - Επιλέγεται η μη ακέραια λύση με το μεγαλύτερο ΑΦ και συνέχεια από το βήμα 2

Παράδειγμα

Ακέραιο ΓΠ

$$\begin{aligned} \max \quad & 17x_1 + 12x_2 \\ \text{Υπό:} \quad & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Γραμμική χαλάρωση

$$\begin{aligned} \max \quad & 17x_1 + 12x_2 \\ \text{Υπό:} \quad & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Βέλτιστη λύση γραμμικής χαλάρωσης
  - $(x_1, x_2) = (1{,}67,\ 3{,}33)$
  - Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης = ΑΦ$(1{,}67,\ 3{,}33) = 68{,}33$
  - Καμία ακέραια λύση δεν μπορεί να έχει τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση > 68,33
- Μια αρχική (εφικτή) ακέραια λύση
  - $(x_1, x_2) = (1, 3)$
  - Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης = ΚΦ $= 53$

Παράδειγμα

$x_1 = 1{,}67, x_2 = 3{,}33$, ΑΦ=68,33
$x_1 = 1, x_2 = 3$, **ΚΦ=53**

Καμία από τις μεταβλητές δεν είναι ακέραια. Επιλέγεται (αυθαίρετα) η x_1

Παράδειγμα

$x_1 = 1{,}67$, $x_2 = 3{,}33$, ΑΦ=68,33
$x_1 = 1$, $x_2 = 3$, **ΚΦ=53**

$x_1 \leq 1$ $\quad$ $x_1 \geq 2$

Διακλαδώσεις για τη μεταβλητή x_1

Παράδειγμα

$x_1 = 1{,}67$, $x_2 = 3{,}33$, ΑΦ=68,33
$x_1 = 1$, $x_2 = 3$, **ΚΦ=53**

$x_1 \leq 1$ $\quad$ $x_1 \geq 2$

Λύνοντας δύο νέα ΓΠ, ένα για κάθε διακλάδωση

$$\begin{array}{ll} \max & 17x_1 + 12x_2 \\ \text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 17x_1 + 12x_2 \\ \text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Παράδειγμα

$x_1 = 1{,}67$, $x_2 = 3{,}33$, ΑΦ=68,33
$x_1 = 1, x_2 = 3$

$x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$

$x_1 = 1, x_2 = 4$
ΚΦ=65

Το ΓΠ στα δεξιά έχει ακέραια βέλτιστη λύση, καλύτερη από την προηγούμενη
Αλλάζει το ΚΦ

Παράδειγμα

$x_1 = 1{,}67$, $x_2 = 3{,}33$, ΑΦ=68,33
$x_1 = 1, x_2 = 3$

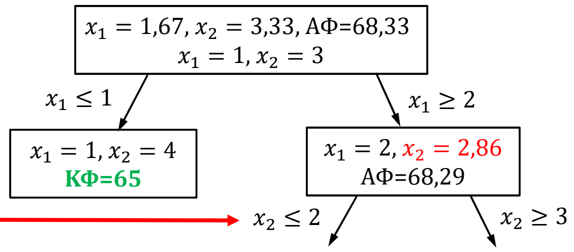
$x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$

$x_1 = 1, x_2 = 4$
ΚΦ=65

$x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}86$
ΑΦ=68,29

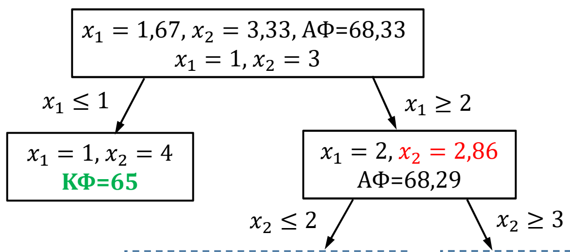
Η λύση του αριστερού ΓΠ δεν είναι ακέραια. Θα διακλαδωθεί η x_2

Παράδειγμα



Διακλαδώσεις για τη μεταβλητή x_2

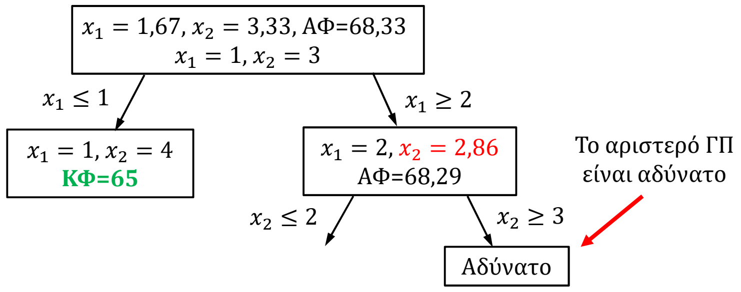
Παράδειγμα



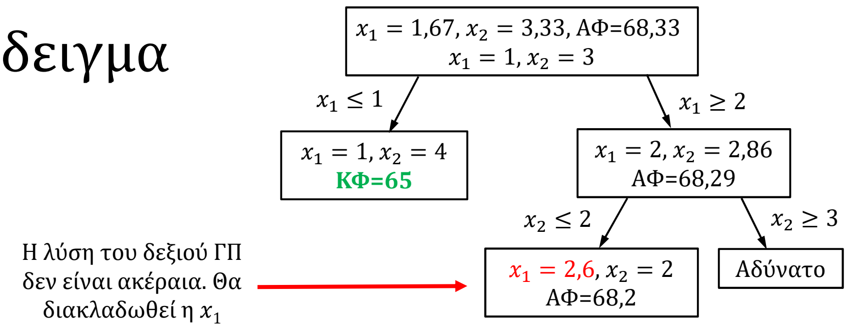
$$
\begin{array}{ll}
\max & 17x_1 + 12x_2 \\
\text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 2 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\max & 17x_1 + 12x_2 \\
\text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 2 \\
& x_2 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Λύνονται δύο νέα ΓΠ, ένα για κάθε διακλάδωση

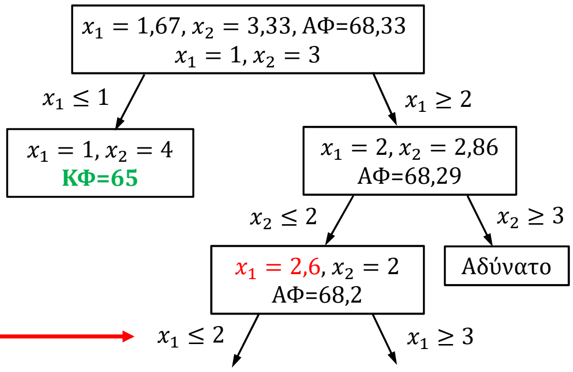
Παράδειγμα



Παράδειγμα

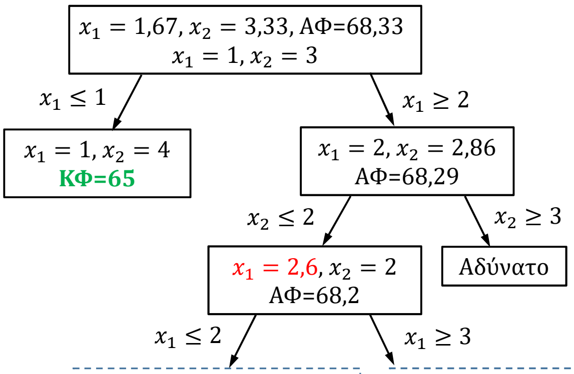


Παράδειγμα



Διακλαδώσεις για τη μεταβλητή x_1

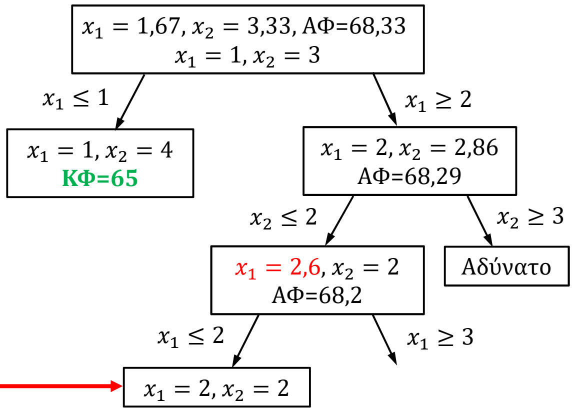
Παράδειγμα



Λύνονται δύο νέα ΓΠ, ένα για κάθε διακλάδωση

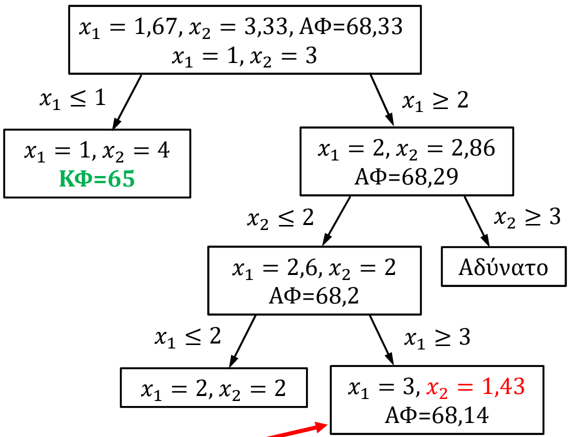
$$
\begin{array}{lrl}
\max & 17x_1 + 12x_2 & \\
\text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 5 \\
 & x_1 & \geq 2 \\
 & x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 & \leq 2 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\max & 17x_1 + 12x_2 & \\
\text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 5 \\
 & x_1 & \geq 2 \\
 & x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 & \geq 3 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Παράδειγμα



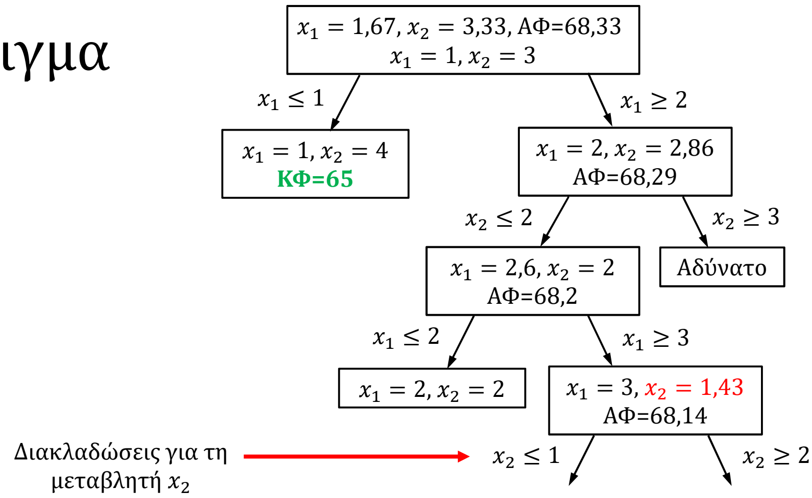
Το δεξιό ΓΠ έχει ακέραια λύση, αλλά με κέρδος 58 < ΚΦ. ***Το ΚΦ δεν αλλάζει***

Παράδειγμα



Η λύση του δεξιού ΓΠ δεν είναι ακέραια. Θα διακλαδωθεί η x_2

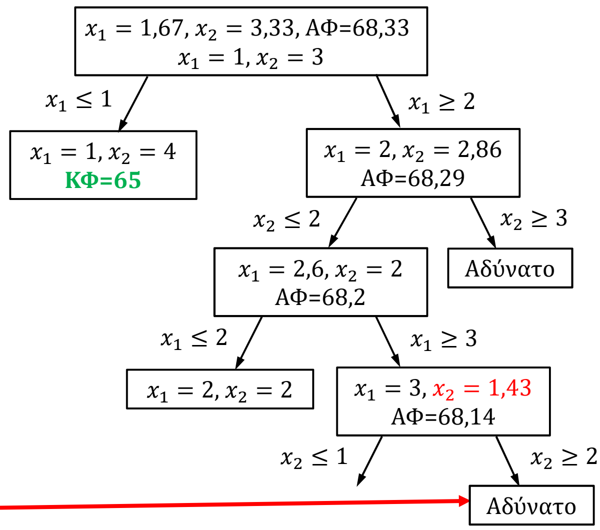
Παράδειγμα



Παράδειγμα

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 17x_1 + 12x_2 & \\
\text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 & \leq 40 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 5 \\
 & x_1 & \geq 2 \\
 & x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 & \geq 3 \\
 & x_2 & \geq 2 \\
 & x_1 \quad x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

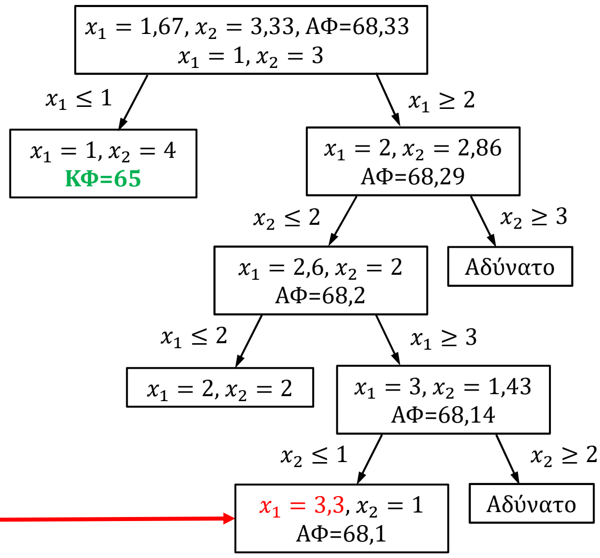
Το ΓΠ στα δεξιά είναι αδύνατο



Παράδειγμα

$$\begin{array}{ll} \max & 17x_1 + 12x_2 \\ \text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

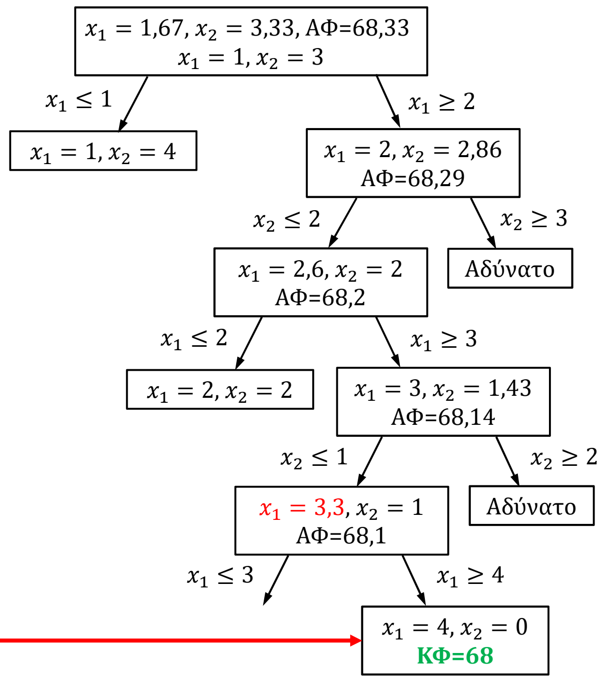
Το ΓΠ στα αριστερά έχει μη ακέραια λύση. Διακλαδώνεται η x_1



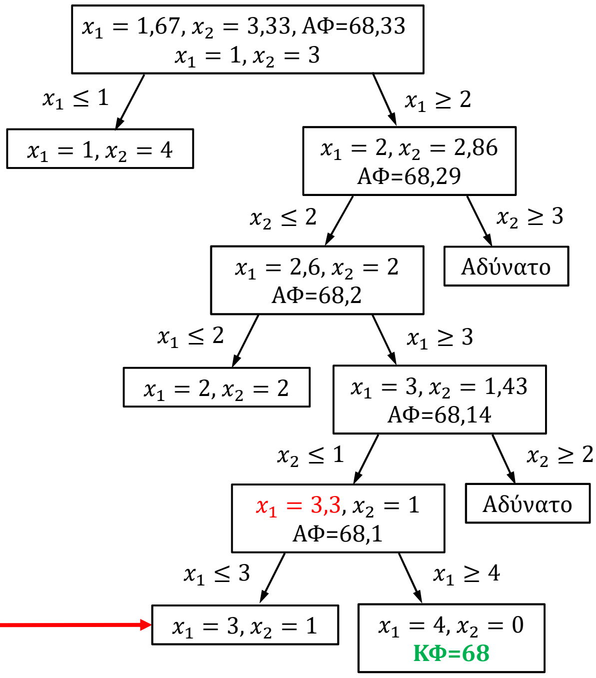
Παράδειγμα

$$\begin{array}{ll} \max & 17x_1 + 12x_2 \\ \text{Υπό:} & 10x_1 + 7x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Το αριστερό ΓΠ έχει ακέραια λύση, με κέρδος 68 > ΚΦ.
Το ΚΦ αλλάζει



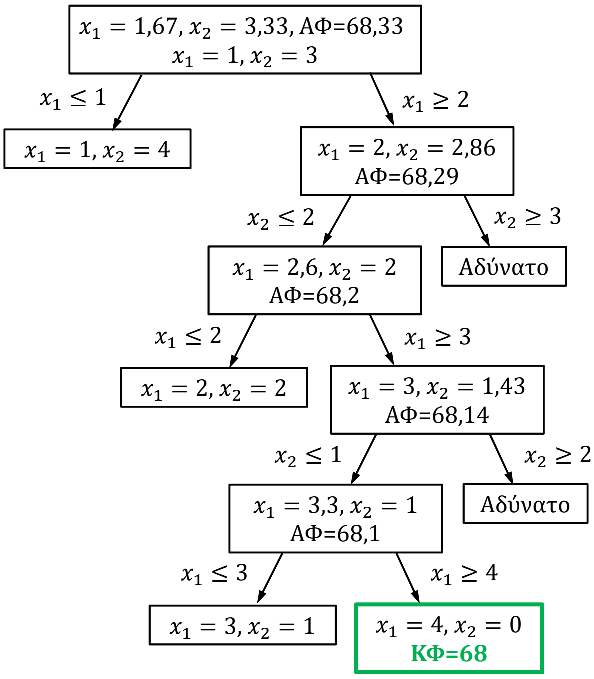
Παράδειγμα



max	$17x_1 + 12x_2$	
Υπό:	$10x_1 + 7x_2$	≤ 40
	$x_1 + x_2$	≤ 5
	x_1	≥ 2
	x_2	≤ 2
	x_1	≥ 3
	x_2	≤ 1
	x_1	≤ 3
	x_1, x_2	≥ 0

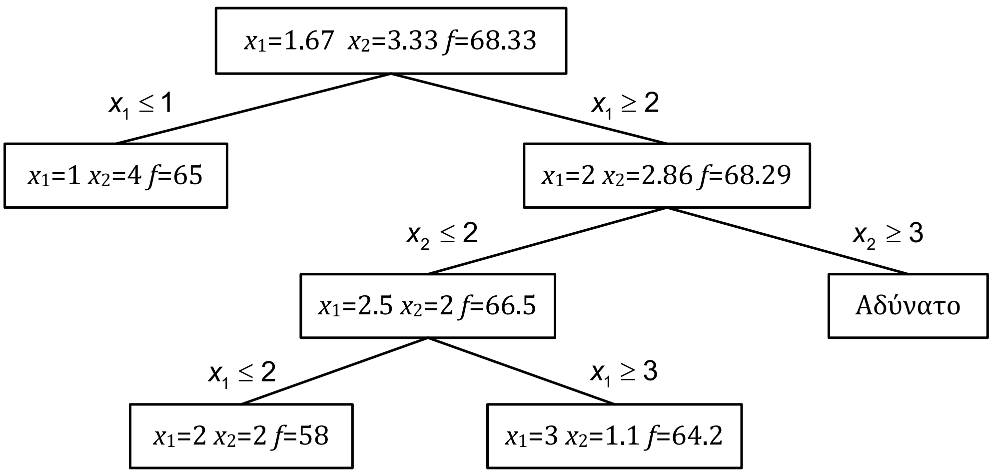
Το δεξιό ΓΠ έχει ακέραια λύση, με κέρδος 63 > ΚΦ.
Το ΚΦ δεν αλλάζει

Παράδειγμα



Βρέθηκε βέλτιστη λύση $x_1 = 4, x_2 = 0$ με κέρδος 68
Δεν υπάρχει άλλη διακλάδωση να εξεταστεί

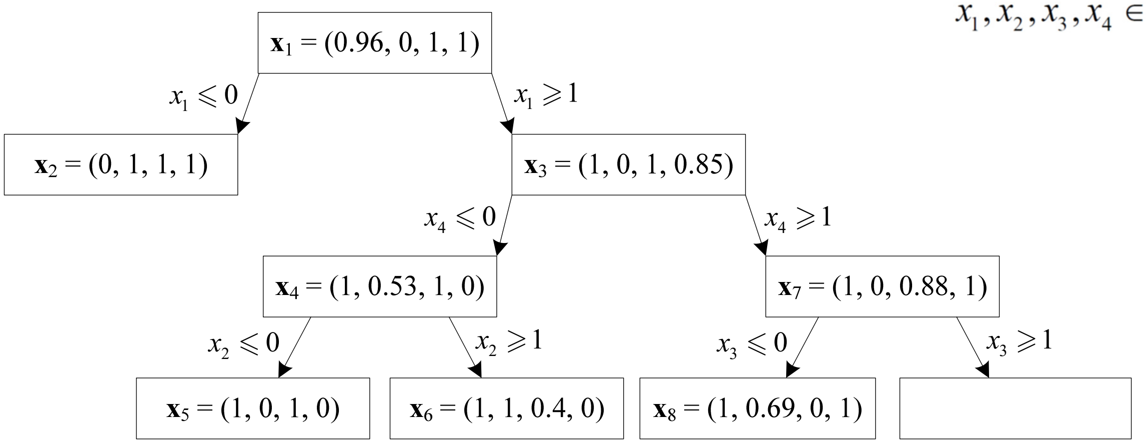
Άσκηση Β.9



Είναι δυνατός ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης βάσει του παραπάνω δέντρου; Εάν ναι, τότε προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση, διαφορετικά εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να συνεχιστεί η διαδικασία επίλυσης.

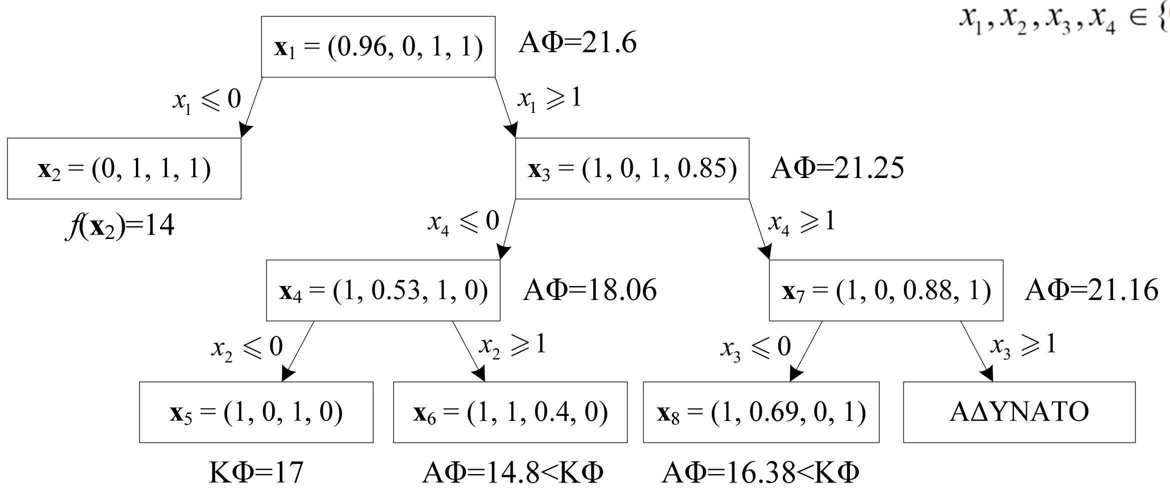
Άσκηση Β.14

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ \text{υ.π.} \quad & 97x_1 + 32x_2 + 25x_3 + 20x_4 \leqslant 139 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{aligned}$$



Άσκηση Β.14

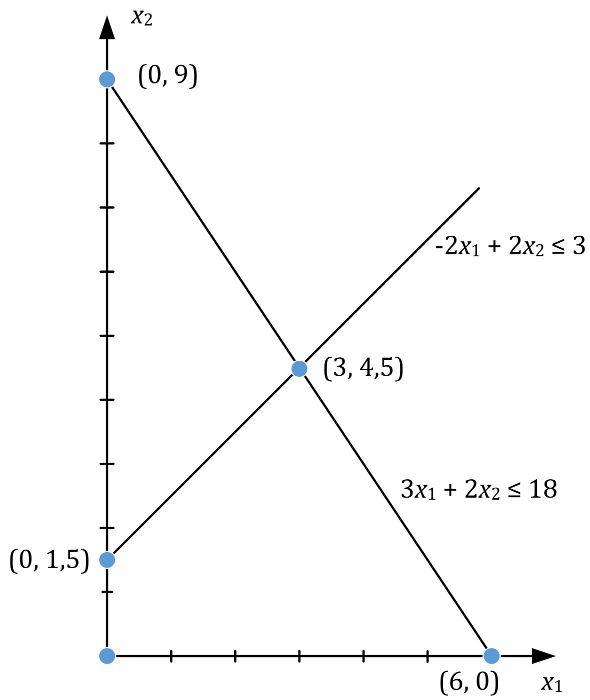
$$\begin{array}{ll} \max & 10x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ \text{υ.π.} & 97x_1 + 32x_2 + 25x_3 + 20x_4 \leqslant 139 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{array}$$



Άσκηση Β.10

- Να βρεθεί η λύση του ακέραιου ΓΠ

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 5x_2 \\ \text{Υπό:} & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$



Άσκηση Β.10

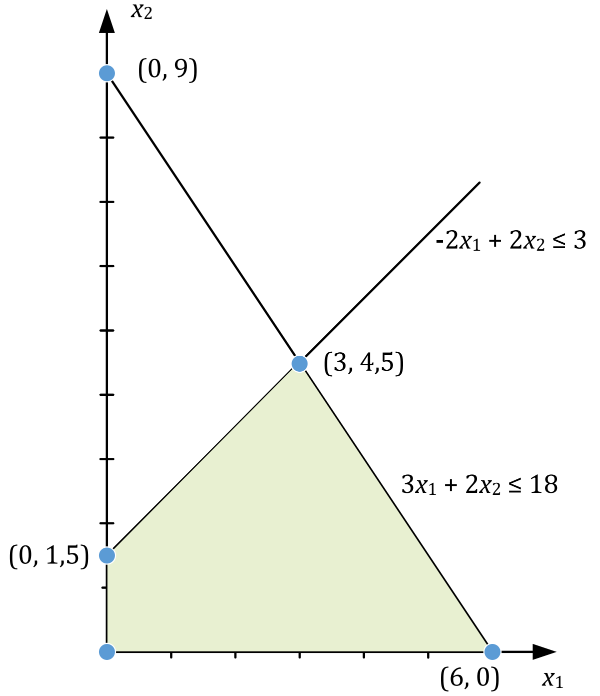
- Γραμμική χαλάρωση

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 5x_2 \\ \text{Υπό:} & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

↓

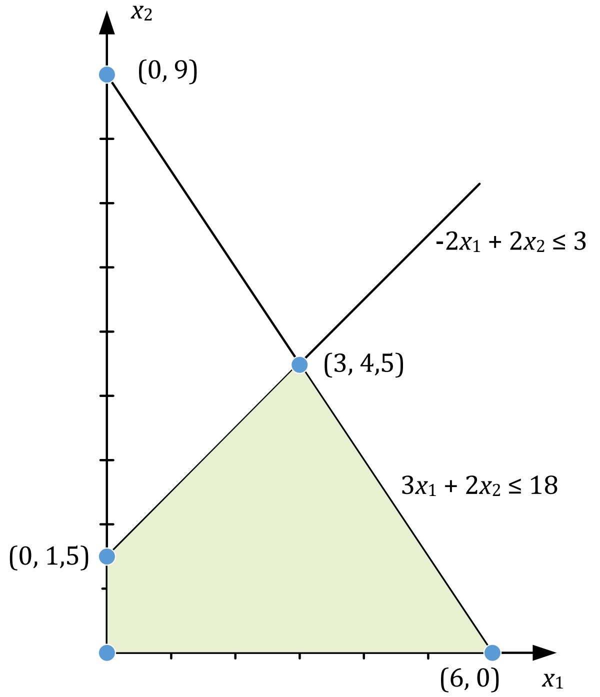
Βέλτιστη λύση
$(x_1, x_2) = (3, 4{,}5)$

Μια (εφικτή) ακέραια λύση
$(x_1, x_2) = (3, 4)$



Άσκηση Β.10

$x_1 = 3$, $x_2 = 4{,}5$, ΑΦ=25,5
$x_1 = 3$, $x_2 = 4$, **ΚΦ=23**



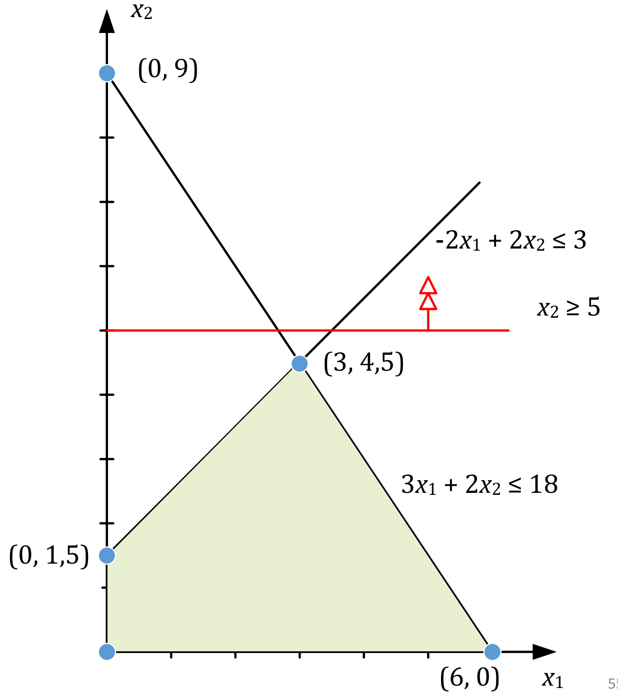
Άσκηση Β.10

$x_1 = 3, x_2 = 4{,}5$, ΑΦ=25,5
$x_1 = 3, x_2 = 4$, **ΚΦ=23**

$x_2 \leq 4$

$x_2 \geq 5$

Αδύνατο



Άσκηση Β.10

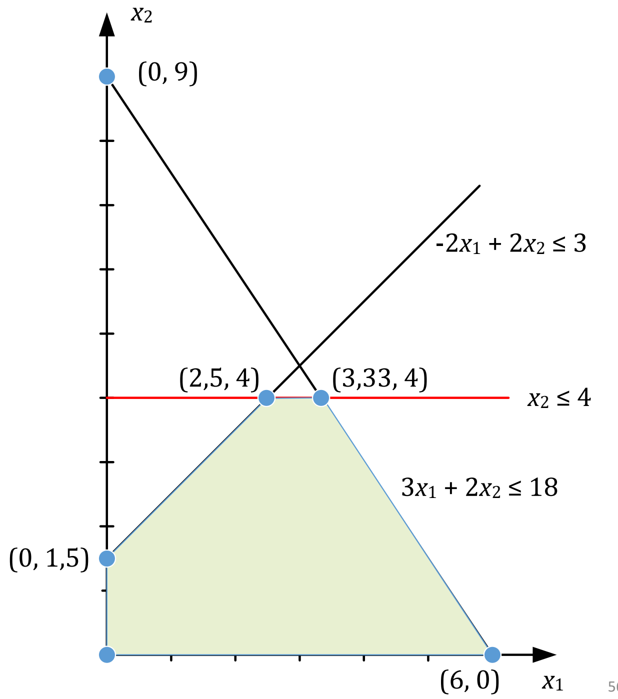
$x_1 = 3, x_2 = 4{,}5$, ΑΦ=25,5
$x_1 = 3, x_2 = 4$, **ΚΦ=23**

$x_2 \leq 4$

$x_1 = 3{,}33, x_2 = 4$
ΑΦ=23,33

$x_2 \geq 5$

Αδύνατο



Άσκηση Β.10

$x_1 = 3, x_2 = 4{,}5$, ΑΦ=25,5
$x_1 = 3, x_2 = 4$, **ΚΦ=23**

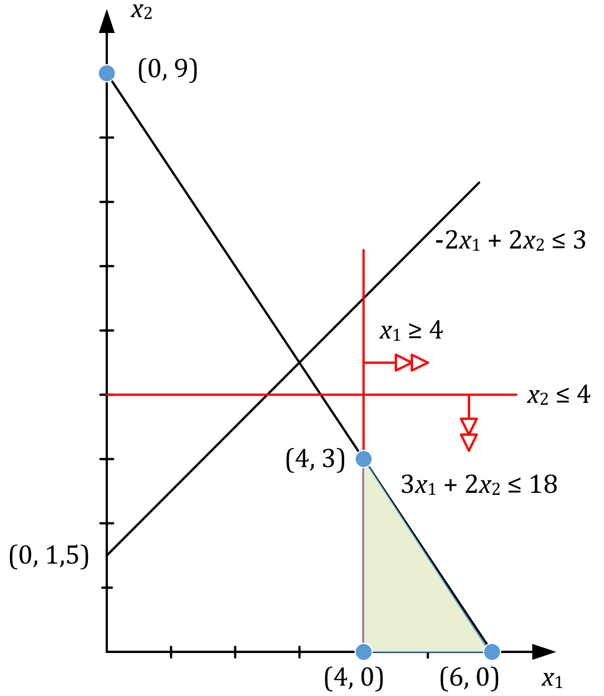
$x_2 \leq 4$ | $x_2 \geq 5$

$x_1 = 3{,}33, x_2 = 4$
ΑΦ=23,33

Αδύνατο

$x_1 \leq 3$ | $x_1 \geq 4$

$x_1 = 4, x_2 = 3$
$f(\mathbf{x}) = 19 <$ ΚΦ



Άσκηση Β.10

$x_1 = 3, x_2 = 4{,}5$, ΑΦ=25,5
$x_1 = 3, x_2 = 4$, **ΚΦ=23**

$x_2 \leq 4$ | $x_2 \geq 5$

$x_1 = 3{,}33, x_2 = 4$
ΑΦ=23,33

Αδύνατο

$x_1 \leq 3$ | $x_1 \geq 4$

$x_1 = 3, x_2 = 4$
$f(\mathbf{x}) = 23 =$ ΚΦ

$x_1 = 4, x_2 = 3$
$f(\mathbf{x}) = 19 <$ ΚΦ