Γραμμικός Προγραμματισμός

ΕΝΟΤΗΤΑ 4η
Ανάλυση Ευαισθησίας

Μιχάλης Δούμπος, 2018

Ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis)

- Σε ποια διαστήματα τιμών για τις παραμέτρους του ΓΠ παραμένει μια λύση βέλτιστη;
  1. Συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση
  2. Δεξιά μέλη των περιορισμών
  3. Συντελεστές στους περιορισμούς
- Αλλάζει η βέλτιστη λύση εάν προστεθούν νέα στοιχεία στο ΓΠ;
  1. Προσθήκη μεταβλητών απόφασης
  2. Προσθήκη περιορισμών

Ανάλυση ευαισθησίας
Συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση

- Έχει βρεθεί μια βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$ για ένα ΓΠ
- **Περίπτωση 1:** Ο συντελεστής c_k μιας *μη βασικής μεταβλητής* k στην αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει σε $c_k' = c_k + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
  - Η λύση $\mathbf{x}^*$ παραμένει βέλτιστη εάν το ΟΚΕ της μεταβλητής παραμείνει ≤ 0:

$$\overline{c}_k' = c_k' - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{y}_k \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -\overline{c}_k$$

- **Περίπτωση 2:** Ο συντελεστής c_k μιας *βασικής μεταβλητής* k στην αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει σε $c_k' = c_k + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
  - Η λύση $\mathbf{x}^*$ παραμένει βέλτιστη τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών παραμείνουν ≤ 0:

$$\overline{c}_j' = c_j - \mathbf{c}_B'^\top \mathbf{y}_j \leq 0 \Leftrightarrow \lambda y_{kj} \geq \overline{c}_j, \forall j \notin B \Leftrightarrow \max_{j \notin B, y_{kj} > 0} \left\{ \frac{\overline{c}_j}{y_{kj}} \right\} \leq \lambda \leq \min_{j \notin B, y_{kj} < 0} \left\{ \frac{\overline{c}_j}{y_{kj}} \right\}$$

  - Νέα τιμή αντικειμενικής συνάρτησης: Τρέχουσα τιμή $+ \lambda x_k^*$

Παράδειγμα περίπτωσης 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		4	1	-1,5	0	1	-1	1
2	4		2	0	3	1	-1	2	3
		$\mathbf{c}$	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-12	0	-0,5	0	-1	-1	9

- Έστω ότι ο συντελεστής της μεταβλητής 2 στην αντικειμενική συνάρτηση αλλάξει από $c_2 = 3$ σε $c_2' = 3 + \lambda$

Παράδειγμα περίπτωσης 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3+λ	2		4	1	-1,5	0	1	-1	1
2	4		2	0	3	1	-1	2	3
		c	4	3+λ	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-12-4λ	0	-0,5+1,5λ	0	-1-λ	-1+λ	9+λ

Η λύση παραμένει βέλτιστη εάν

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \bar{c}_1 \le 0 \iff 4\lambda \ge -12 \\ 2)\ \bar{c}_{\bar{1}} \le 0 \iff \lambda \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \ge \max\left\{\frac{-12}{4}, \frac{-1}{1}\right\} \Rightarrow \lambda \ge -1$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \bar{c}_3 \le 0 \iff -1{,}5\lambda \ge -0{,}5 \\ 4)\ \bar{c}_{\bar{2}} \le 0 \iff -\lambda \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \le \min\left\{\frac{-0{,}5}{-1{,}5}, \frac{-1}{-1}\right\} \Rightarrow \lambda \le 1/3$$

Παράδειγμα περίπτωσης 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		4	1	-1,5	0	1	-1	1
2	4		2	0	3	1	-1	2	3
		c	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-12	0	-0,5	0	-1	-1	9

Άμεση χρήση του τύπου για το ΚΦ

(Ο υπολογισμός γίνεται για τη βασική μεταβλητή 2)

Διαιρούνται τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών με τα στοιχεία της 1ης γραμμής (που αντιστοιχεί στη μεταβλητή 2) κάνοντας διαιρέσεις μόνο με αυστηρά θετικούς παρονομαστές

- Το ***μέγιστο*** από τα πηλίκα είναι η μέγιστη μείωση

$$\lambda \ge \max\left\{\frac{-12}{4}, \frac{-1}{1}\right\} \Rightarrow \lambda \ge -1$$

Το c_2 μπορεί να μειωθεί το πολύ κατά 1, δηλαδή $c_2 \ge 2$

Παράδειγμα περίπτωσης 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		4	1	-1,5	0	1	-1	1
2	4		2	0	3	1	-1	2	3
		c	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-12	0	-0,5	0	-1	-1	9

Άμεση χρήση του τύπου για το ΑΦ

(*Ο υπολογισμός γίνεται για τη βασική μεταβλητή 2*)

Διαιρούνται τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών με τα στοιχεία της 1ης γραμμής (που αντιστοιχεί στη μεταβλητή 2) κάνοντας διαιρέσεις μόνο με αυστηρά αρνητικούς παρονομαστές

- Το ***ελάχιστο*** από τα πηλίκα είναι η μέγιστη αύξηση

$$\lambda \leq \min\left\{\frac{-0{,}5}{-1{,}5}, \frac{-1}{-1}\right\} \Longrightarrow \lambda \leq 1/3$$

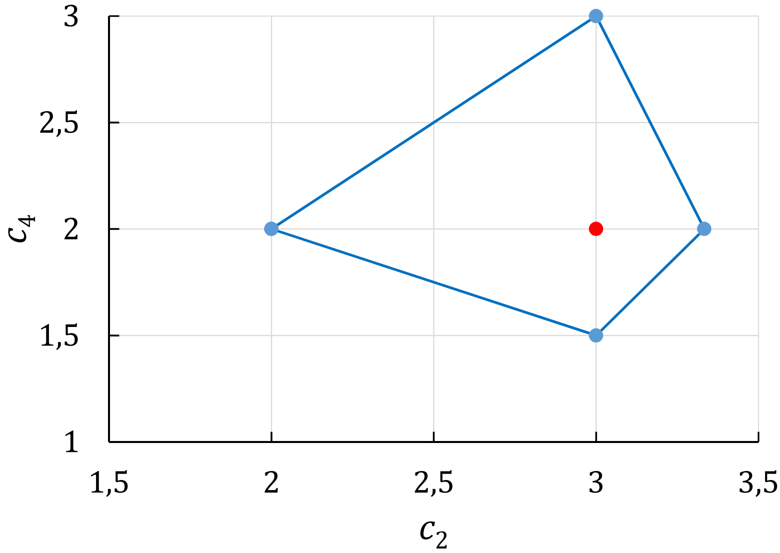
Το c_2 μπορεί να αυξηθεί το πολύ κατά 1/3, δηλαδή $c_2 \leq 3{,}33$

Ταυτόχρονες αλλαγές στους συντελεστές

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		4	1	-1,5	0	1	-1	1
2	4		2	0	3	1	-1	2	3
		c	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-12	0	-0,5	0	-1	-1	9

- Όρια για τα c_2 και c_4: $2 \leq c_2 \leq 3{,}33$ και $1{,}5 \leq c_4 \leq 3$
- Τι γίνεται εάν μεταβληθούν ταυτόχρονα και τα δύο;
- **Κανόνας 100%:** εάν οι μεταβολές εκφρασμένες ως % των μέγιστων επιτρεπτών μεταβολών δεν υπερβαίνουν αθροιστικά το 100%, τότε η ΒΕΛ δεν αλλάζει, διαφορετικά *ίσως δεν είναι πλέον βέλτιστη*

Ταυτόχρονες αλλαγές στους συντελεστές



Ταυτόχρονες αλλαγές στους συντελεστές

- Όρια για τα c_2 και c_4: $2 \leq c_2 = 3 \leq 3{,}33$ και $1{,}5 \leq c_4 = 2 \leq 3$
- Τι γίνεται εάν το c_2 αυξηθεί κατά 0,2 και το c_4 μειωθεί κατά 0,4;
- Ποσοστιαία αύξηση c_2:

$$\frac{\text{Αύξηση } c_2}{\text{Επιτρεπτή αύξηση } c_2} = \frac{0{,}2}{0{,}33} = 60\%$$

- Ποσοστιαία μείωση c_4:

$$\frac{\text{Μείωση } c_4}{\text{Επιτρεπτή μείωση } c_4} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 80\%$$

- Η συνολική ποσοστιαία μεταβολή είναι $140\% > 100\%$, άρα η υπάρχουσα ΒΕΛ ίσως δεν είναι πλέον βέλτιστη

Ταυτόχρονες αλλαγές στους συντελεστές

- Όρια για τα c_2 και c_4: $2 \leq c_2 = 3 \leq 3{,}33$ και $1{,}5 \leq c_4 = 2 \leq 3$
- Τι γίνεται εάν το c_2 μειωθεί κατά 0,4 και το c_4 αυξηθεί κατά 0,3;
- Ποσοστιαία μείωση c_2:

$$\frac{\text{Μείωση } c_2}{\text{Επιτρεπτή μείωση } c_2} = \frac{0{,}4}{1} = 40\%$$

- Ποσοστιαία αύξηση c_4:

$$\frac{\text{Αύξηση } c_4}{\text{Επιτρεπτή αύξηση } c_4} = \frac{0{,}3}{1} = 30\%$$

- Η συνολική ποσοστιαία μεταβολή είναι $70\% < 100\%$, άρα η υπάρχουσα ΒΕΛ παραμένει βέλτιστη

Ανάλυση ευαισθησίας
Δεξιά μέρη περιορισμών

- Έχει βρεθεί μια βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$ για ένα ΓΠ
- Το δεξιό μέρος του περιορισμού k αλλάζει σε $b_k' = b_k + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
  - Οι τιμές των βασικών μεταβλητών αλλάζουν: $\mathbf{x}_B' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' = \mathbf{x}_B + \lambda \mathbf{b}_k^{-1}$, όπου $\mathbf{b}_k^{-1}$ είναι η k στήλη του $\mathbf{B}^{-1}$
    - Εάν ο περιορισμός k είναι της μορφής $\leq$, τότε $\mathbf{b}_k^{-1} = \mathbf{y}_{\bar{k}}$
    - Εάν ο περιορισμός k είναι της μορφής $\geq$, τότε $\mathbf{b}_k^{-1} = -\mathbf{y}_{\bar{k}}$
    - Εάν ο περιορισμός k είναι της μορφής $=$, τότε $\mathbf{b}_k^{-1} = \mathbf{y}_{\bar{\bar{k}}}$
  - Η ΒΕΛ δεν αλλάζει εάν (περίπτωση περιορισμού $\leq$):

$$\mathbf{x}_B' \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{y}_{\bar{k}} \geq -\mathbf{x}_B \Leftrightarrow \max_{y_{i\bar{k}}>0} \left\{ \frac{-x_{B_i}}{y_{i\bar{k}}} \right\} \leq \lambda \leq \min_{y_{i\bar{k}}<0} \left\{ \frac{-x_{B_i}}{y_{i\bar{k}}} \right\}$$

  - Για μεταβολές εντός αυτού του διαστήματος η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάξει (μειώνεται/αυξάνεται) κατά λu_k (u_k=δυϊκή μεταβλητή του περιορισμού k)

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

- Πόσο μπορεί μεταβληθεί το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού ($b_3 = 15$) χωρίς να αλλάξει η παραπάνω βέλτιστη ΒΕΛ;
  - Ο περιορισμός είναι της μορφής $\leq$, οπότε θα χρησιμοποιηθεί η στήλη $\bar{3}$ ($\mathbf{b}_3^{-1} = \mathbf{y}_{\bar{3}}$)

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

ΑΦ, γιατί τα στοιχεία της στήλης $\bar{3}$ είναι <0

ΚΦ, γιατί τα στοιχεία της στήλης $\bar{3}$ είναι >0

- Διαιρούμε τα $\mathbf{x}_B$ (με αντίθετα πρόσημα) με τη στήλη $\bar{3}$
  - Για το ΚΦ μόνο πηλίκα με παρονομαστές >0: $\lambda \geq \max\{-1/(1/3), -4/(2/3)\} \Rightarrow \lambda \geq -3$
  - Για το ΑΦ μόνο πηλίκα με παρονομαστές <0: $\lambda \leq \min\{-7/(-1/3), -2/(-2/3)\} \Rightarrow \lambda \leq 3$
- Άρα, το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού ($b_3 = 15$) μπορεί να μειωθεί το πολύ κατά 3 ή να αυξηθεί το πολύ κατά 3: $b_3 \in [12, 18]$
- Για κάθε $-3 \leq \lambda \leq 3$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάξει κατά $\lambda(2/3)$ (η δυϊκή μεταβλητή του 3ου περιορισμού είναι $u_3 = -\bar{c}_{\bar{3}} = 2/3$)

Παράδειγμα 2

max $\quad -8x_1 - 12x_2$
Υπό: $\quad x_1 + 3x_2 \geq 9$
$\quad 2x_1 + 2x_2 \geq 10$
$\quad 6x_1 + 2x_2 \geq 18$
$\quad x_1, \quad x_2 \geq 0$

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
-12	2	0	1	-0,5	0,25	0	2
0	$\bar{3}$	0	0	2	-4	1	4
-8	1	1	0	0,5	-0,75	0	3
	$\mathbf{c}$	-8	-12	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-2	-3	0	-48

- Πόσο μπορεί μεταβληθεί το δεξιό μέρος του 1ου περιορισμού ($b_1 = 9$) χωρίς να αλλάξει η παραπάνω βέλτιστη ΒΕΛ;
  - Ο περιορισμός είναι της μορφής ≥, οπότε θα χρησιμοποιηθεί η στήλη $\bar{1}$ με αντίθετα πρόσημα ($\mathbf{b}_1^{-1} = -\mathbf{y}_{\bar{1}}$)

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$	
-12	2	0	1	-0,5	0,25	0	2	} ΚΦ
0	$\bar{3}$	0	0	2	-4	1	4	} ΑΦ
-8	1	1	0	0,5	-0,75	0	3	
	$\mathbf{c}$	-8	-12	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-2	-3	0	-48	

- Διαιρούμε τα $\mathbf{x}_B$ (με αντίθετα πρόσημα) με τη στήλη $\bar{1}$ (με αντίθετα πρόσημα)
  - Για το ΚΦ μόνο πηλίκα με παρονομαστές >0: $\lambda \geq \max\{-2/0{,}5\} \Rightarrow \lambda \geq -4$
  - Για το ΑΦ μόνο πηλίκα με παρονομαστές <0: $\lambda \leq \min\{-4/-2, -3/-0{,}5\} \Rightarrow \lambda \leq 2$
- Άρα, το δεξιό μέρος του 1ου περιορισμού ($b_1 = 9$) μπορεί να μειωθεί το πολύ κατά 4 ή να αυξηθεί το πολύ κατά 2: $b_1 \in [5, 11]$
- Για $-4 \leq \lambda \leq 2$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάζει κατά -2λ (επειδή ο περιορισμός 1 είναι της μορφής ≥, η δυϊκή μεταβλητή είναι $u_1 = \bar{c}_{\bar{1}} = -2$)

Αναφορά ευαισθησίας Excel

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
F2	x1	7	0	4	2	2.5
F3	x2	4	0	3	5	1

Μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
J2	1ος περιορισμός	7	0	8	1E+30	1
J3	2ος περιορισμός	4	0	6	1E+30	2
J4	3ος περιορισμός	15	0.666666667	15	3	3
J5	4ος περιορισμός	18	1.666666667	18	1.5	6

Μεταβολές στα β΄ μέρη των περιορισμών

Ανάλυση ευαισθησίας στο LINGO

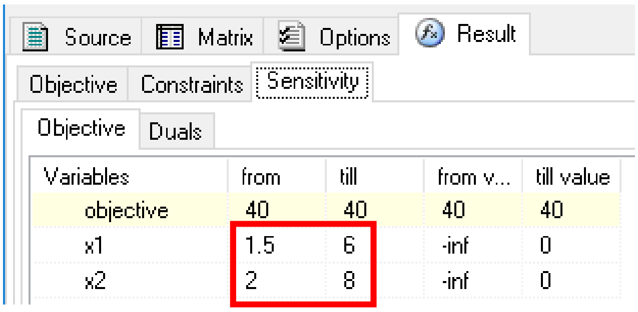
1. Menu LINGO → Options → Καρτέλα General Solver → επιλογή Prices & Ranges στο πεδίο Dual Computations
2. Λύση από το menu LINGO → Solve
3. Αναφορά ευαισθησίας από το menu LINGO → Range

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                              Objective Coefficient Ranges:

                               Current        Allowable        Allowable
           Variable          Coefficient       Increase         Decrease
                 X1             4.000000        2.000000         2.500000
                 X2             3.000000        5.000000         1.000000

                                 Righthand Side Ranges:

                               Current        Allowable        Allowable
                Row              RHS           Increase         Decrease
        CONSTRAINT1             8.000000       INFINITY         1.000000
        CONSTRAINT2             6.000000       INFINITY         2.000000
        CONSTRAINT3             15.00000       3.000000         3.000000
        CONSTRAINT4             18.00000       1.500000         6.000000
```

Μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης

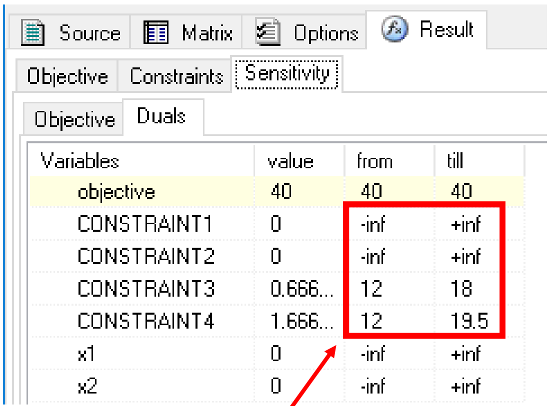
Μεταβολές στα β΄ μέρη των περιορισμών

Ανάλυση ευαισθησίας στο LP_Solve



Variables	from	till	from v...	till value
objective	40	40	40	40
x1	1.5	6	-inf	0
x2	2	8	-inf	0

Όρια για τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης



Variables	value	from	till
objective	40	40	40
CONSTRAINT1	0	-inf	+inf
CONSTRAINT2	0	-inf	+inf
CONSTRAINT3	0.666...	12	18
CONSTRAINT4	1.666...	12	19.5
x1	0	-inf	+inf
x2	0	-inf	+inf

Όρια για τα β΄ μέρη των περιορισμών

Αλλαγές εκτός ορίων – Άσκηση Γ.12

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + x_2 - 12x_3 \\ \text{Υπό:} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	2	0	1	5	-3	2
5	1	1	0	-3	2	2
	$\mathbf{c}$	5	1	-12	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-2	-7	12

- Πώς αλλάζει η βέλτιστη λύση εάν το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού αυξηθεί σε 17 (μεταβολή $\lambda = 1$);

Αλλαγές εκτός ορίων – Άσκηση Γ.12

$$\begin{array}{lrl} \max & 5x_1 + \ \ x_2 - 12x_3 & \\ \text{Υπό:} & 3x_1 + 2x_2 + \ \ \ x_3 & = 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 \qquad\quad & \leq 16 \\ & x_1 \quad x_2 \quad\quad x_3 & \geq 0 \end{array}$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	2		0	1	5	-3	2
5	1		1	0	-3	2	2
		$\mathbf{c}$	5	1	-12	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-2	-7	12

- Ο 2ος περιορισμός είναι $\leq$, άρα στην ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί η στήλη $\bar{2}$
- Για να μην αλλάξει η ΒΕΛ, η αύξηση στο δεξιό μέρους του 2ου περιορισμού θα πρέπει να είναι $\lambda \leq \min\{-2/-3\}$
- Η δεδομένη αλλαγή υπερβαίνει το όριο
- Η νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \lambda \mathbf{y}_{\bar{2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Αλλαγές εκτός ορίων – Άσκηση Γ.12

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	2		0	1	5	-3	-1
5	1		1	0	-3	2	4
		$\mathbf{c}$	5	1	-12	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-2	-7	19

- Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής του δυϊκού αλγορίθμου
  - Υπάρχει βασική μεταβλητή με αρνητική τιμή και τα ΟΚΕ δεν είναι θετικά
- Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη μεταβλητή την 2 και εισερχόμενη την $\bar{2}$

Αλλαγές εκτός ορίων – Άσκηση Γ.12

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	2		0	1	5	-3	-1
5	1		1	0	-3	2	4
		c	5	1	-12	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-2	-7	19

- Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής του δυϊκού αλγορίθμου
  - Υπάρχει βασική μεταβλητή με αρνητική τιμή και τα όχι δεν είναι θετικά
- Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη μεταβλητή την 2 και εισερχόμενη την $\bar{2}$
  - Οδηγό στοιχείο είναι το $(2, \bar{2}) = -3$

Αλλαγές εκτός ορίων – Άσκηση Γ.12

- Νέα βέλτιστη λύση (μετά από 1 επανάληψη του δυϊκού αλγορίθμου):

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{2}$		0	-0,33	1,67	1	0,33
5	1		1	0,67	0,33	0	3,33
		c	5	1	-12	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-2,33	-13,67	0	16,67

Προσθήκη νέας μεταβλητής

- Έχει βρεθεί μια βέλτιστη ΒΕΛ $\mathbf{x}^*$ για ένα ΓΠ με n μεταβλητές απόφασης
- Προστίθεται μία νέα μεταβλητή $n+1$, η οποία συμμετέχει στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή c_{n+1} και στους περιορισμούς με συντελεστές

$$\mathbf{a}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & \cdots & a_{m,n+1} \end{pmatrix}^\top$$

- **Βήματα:**
  1. Εισάγεται στον πίνακα simplex μια επιπλέον στήλη $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{n+1}$
  2. Υπολογίζεται το ΟΚΕ $\bar{c}_{n+1}$ της νέας μεταβλητής
     - **Περίπτωση 1:** Εάν $\bar{c}_{n+1} \le 0$, τότε η ΒΕΛ $\mathbf{x}^*$ παραμένει βέλτιστη
     - **Περίπτωση 2:** Εάν $\bar{c}_{n+1} > 0$, τότε η ΒΕΛ $\mathbf{x}^*$ δεν είναι βέλτιστη
       - Εφαρμογή των βημάτων της simplex με εισαγωγή στη βάση της μεταβλητής $n+1$

Παράδειγμα

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ & 3x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \quad x_2 \ge 0 \end{array}$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	1		1	0	-1	0	-1	1
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	1	1
1	2		0	1	1	0	2	0
		$\mathbf{c}$	1	1	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-1	1

- Θα αλλάξει η λύση με την εισαγωγή μιας μεταβλητής απόφασης (x_3), η οποία συμμετέχει στον 1ο περιορισμό με συντελεστή 1, στον 2ο με 6, στον 3ο με 1 και στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή 0,3;
  - $\mathbf{a}_3 = (a_{13},\ a_{23},\ a_{33})^\top = (1,\ 6,\ 1)^\top$
  - $c_3 = 0{,}3$

Παράδειγμα

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + x_2 + 0{,}3x_3 & & \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + x_2 + 1x_3 & \geq & 2 \\ & 3x_1 + x_2 + 6x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 + x_2 + 1x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 \quad x_2 \quad\quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	1		1	0		-1	0	-1	1
0	$\bar{2}$		0	0		2	1	1	1
1	2		0	1		1	0	2	0
		$\mathbf{c}$	1	1	0,3	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0		0	0	-1	1

- Για την εισαγωγή της μεταβλητής στον πίνακα χρειαζόμαστε τον $\mathbf{B}^{-1}$
  - Ο αντίστροφος της βάσης βρίσκεται στο κεντρικό μέρος κάτω από τις μεταβλητές $\bar{1}$ (με αντίθετο πρόσημο, γιατί ο 1[ος] περιορισμός είναι '≥'), $\bar{2}$ και $\bar{3}$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + x_2 + 0{,}3x_3 & & \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ & 3x_1 + x_2 + 6x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 \quad x_2 \quad\quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	1		1	0	0	-1	0	-1	1
0	$\bar{2}$		0	0	5	2	1	1	1
1	2		0	1	1	1	0	2	0
		$\mathbf{c}$	1	1	0,3	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,7	0	0	-1	1

- Υπολογίζεται η στήλη $\mathbf{y}_3$ και το ΟΚΕ της νέας μεταβλητής

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Επειδή $\bar{c}_{\bar{3}} = -0{,}7 < 0$, η λύση παραμένει βέλτιστη

Προσθήκη νέου περιορισμού

- Έχει βρεθεί μια βέλτιστη ΒΕΛ $\mathbf{x}^*$ για ένα ΓΠ με m περιορισμούς
- Προστίθεται ένας νέος περιορισμός $m+1$ της μορφής
$$\mathbf{a}_{m+1}\mathbf{x} \leq b_{m+1}$$
όπου $\mathbf{a}_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,n} \end{pmatrix}$ είναι οι συντελεστές των μεταβλητών στο νέο περιορισμό
- **Περίπτωση 1:** Η υπάρχουσα λύση $\mathbf{x}^*$ ικανοποιεί τον περιορισμό:
  - Καμία αλλαγή, η λύση $\mathbf{x}^*$ παραμένει βέλτιστη
- **Περίπτωση 2:** Η υπάρχουσα λύση $\mathbf{x}^*$ παραβιάζει τον περιορισμό:
  - Πρέπει να βρεθεί η νέα βέλτιστη λύση (εάν υπάρχει)

Προσθήκη νέου περιορισμού

Περίπτωση 2: Η υπάρχουσα λύση $\mathbf{x}^*$ παραβιάζει τον περιορισμό

- Ο περιορισμός σε πρότυπη μορφή: $\mathbf{a}_{m+1}\mathbf{x} + x_{\overline{m+1}} = b_{m+1}$
- Αφού η $\mathbf{x}^*$ παραβιάζει τον περιορισμό: $x_{\overline{m+1}} = b_{m+1} - \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{x}^* < 0$
- **Βήματα:**
  1. Διαμορφώνεται η βασική (όχι εφικτή λύση)
$$\mathbf{x}'_B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*_B \\ x_{\overline{m+1}} \end{pmatrix}$$
  2. Αναμορφώνεται το κεντρικό μέρος του πίνακα simplex
$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{m+1} - \mathbf{a}^B_{m+1}\mathbf{Y} & 1 \end{bmatrix}$$
  $\mathbf{a}^B_{m+1}$=συντελεστές βασικών μεταβλητών της λύσης $\mathbf{x}^*$ στο νέο περιορισμό
  3. Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη μεταβλητή την $x_{\overline{m+1}}$

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1		1	0	0,4	0	-0,2	2
0	$\bar{2}$		0	0	-1,4	1	0,2	2
2	2		0	1	0,6	0	0,2	6
		$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6	10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1		1	0	0,4	0	-0,2	2
0	$\bar{2}$		0	0	-1,4	1	0,2	2
2	2		0	1	0,6	0	0,2	6
		$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6	10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

- Πρότυπη μορφή νέου ($4^{ου}$) περιορισμού: $x_2 + x_{\bar{4}} = 2$
- Στη λύση του πίνακα είναι $x_2 = 6$, άρα ο νέος περιορισμός παραβιάζεται και $x_{\bar{4}} = -4$

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1	1	0	0,4	0	-0,2		2
0	$\bar{2}$	0	0	-1,4	1	0,2		2
2	2	0	1	0,6	0	0,2		6
	$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6		10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

- Στον πίνακα εισάγεται μία επιπλέον γραμμή (για τον νέο περιορισμό) και μια επιπλέον στήλη (για τη νέα μεταβλητή απόκλισης)

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1	1	0	0,4	0	-0,2		2
0	$\bar{2}$	0	0	-1,4	1	0,2		2
2	2	0	1	0,6	0	0,2		6
-0	$\bar{4}$							-4
	$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6	0	10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

- Η μεταβλητής απόκλισης του νέου περιορισμού σημειώνεται ως βασική και ίση με το μέγεθος της παραβίασης του περιορισμού

$$\mathbf{x}'_B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*_B \\ x_{\overline{m+1}} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1	1	0	0,4	0	-0,2	0	2
0	$\bar{2}$	0	0	-1,4	1	0,2	0	2
2	2	0	1	0,6	0	0,2	0	6
0	$\bar{4}$						1	-4
	$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6	0	10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

- Η στήλη της $\bar{4}$ συμπληρώνεται βάζοντας παντού 0 και στην τελευταία γραμμή 1

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{m+1} - \mathbf{a}_{m+1}^B \mathbf{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1	1	0	0,4	0	-0,2	0	2
0	$\bar{2}$	0	0	-1,4	1	0,2	0	2
2	2	0	1	0,6	0	0,2	0	6
0	$\bar{4}$						1	-4
	$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6	0	10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

- Συντελεστές μεταβλητών 1, 2, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ στον 4$^{\text{ο}}$ (νέο) περιορισμό

$$\mathbf{a}_4 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

- Συντελεστές βασικών μεταβλητών 1, $\bar{2}$, 2 στον νέο περιορισμό

$$\mathbf{a}_4^B = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1		1	0	0,4	0	-0,2	0	2
0	$\bar{2}$		0	0	-1,4	1	0,2	0	2
2	2		0	1	0,6	0	0,2	0	6
0	$\bar{4}$		0	0	-0,6	0	-0,2	1	-4
		$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6	0	10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

- Συμπληρώνονται τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής:

$$\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4^B \mathbf{Y} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (0 \quad 0 \quad 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,4 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & -1,4 & 1 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1		1	0	0,4	0	-0,2	0	2
0	$\bar{2}$		0	0	-1,4	1	0,2	0	2
2	2		0	1	0,6	0	0,2	0	6
0	$\bar{4}$		0	0	-0,6	0	-0,2	1	-4
		$\mathbf{c}$	-1	2	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0,8	0	-0,6	0	10

Εισαγωγή περιορισμού $x_2 \leq 2$

- Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την $\bar{4}$, εισερχόμενη την $\bar{1}$ και οδηγό στοιχείο το $(\bar{4}, \bar{1}) = -0,6$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
14	2		0	1	11	19	1,5	-1	0	200
8	1		1	0	-12	-22	-2	2	0	400
0	$\bar{3}$		0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1	20
		$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	6000

Εισαγωγή περιορισμού $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \geq 1500$

- Διατύπωση σε μορφή '≤': $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
14	2		0	1	11	19	1,5	-1	0	200
8	1		1	0	-12	-22	-2	2	0	400
0	$\bar{3}$		0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1	20
		$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	6000

Εισαγωγή περιορισμού $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

- Πρότυπη μορφή νέου ($4^{ου}$) περιορισμού:
$$-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 + x_{\bar{4}} = -1500$$
- Στη λύση του πίνακα παραβιάζεται τον περιορισμό:
$$-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -2 \times 400 - 3 \times 200 - 5 \times 0 - 7 \times 0 = -1400$$
- Άρα $-1400 + x_{\bar{4}} = -1500 \Longrightarrow x_{\bar{4}} = -100$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
14	2	0	1	11	19	1,5	-1	0		200
8	1	1	0	-12	-22	-2	2	0		400
0	$\bar{3}$	0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1		20
	$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0		6000

Εισαγωγή περιορισμού $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

- Στον πίνακα εισάγεται μία επιπλέον γραμμή (για τον νέο περιορισμό) και μια επιπλέον στήλη (για τη νέα μεταβλητή απόκλισης)

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
14	2	0	1	11	19	1,5	-1	0		200
8	1	1	0	-12	-22	-2	2	0		400
0	$\bar{3}$	0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1		20
0	$\bar{4}$									-100
	$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	0	6000

Εισαγωγή περιορισμού $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

- Η μεταβλητής απόκλισης του νέου περιορισμού σημειώνεται ως βασική και ίση με το μέγεθος της παραβίασης του περιορισμού

$$\mathbf{x}'_B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*_B \\ x_{\overline{m+1}} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
14	2		0	1	11	19	1,5	-1	0	0	200
8	1		1	0	-12	-22	-2	2	0	0	400
0	$\bar{3}$		0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1	0	20
0	$\bar{4}$									1	-100
		$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	0	6000

Εισαγωγή περιορισμού $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

- Η στήλη της $\bar{4}$ συμπληρώνεται βάζοντας παντού 0 και στην τελευταία γραμμή 1

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{matrix}} \\ \mathbf{a}_{m+1} - \mathbf{a}_{m+1}^B \mathbf{Y} & \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
14	2		0	1	11	19	1,5	-1	0	0	200
8	1		1	0	-12	-22	-2	2	0	0	400
0	$\bar{3}$		0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1	0	20
0	$\bar{4}$									1	-100
		$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	0	6000

Εισαγωγή περιορισμού $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

- Συντελεστές μεταβλητών 1, 2, 3, 4, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ στον 4ο περιορισμό

$$\mathbf{a}_4 = (-2 \quad -3 \quad -5 \quad -7 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

- Συντελεστές βασικών μεταβλητών 2, 1, $\bar{3}$ στον νέο περιορισμό

$$\mathbf{a}_4^B = (-3 \quad -2 \quad 0)$$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
14	2		0	1	11	19	1,5	-1	0	0	200
8	1		1	0	-12	-22	-2	2	0	0	400
0	$\bar{3}$		0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1	0	20
0	$\bar{4}$		0	0	4	6	0,5	1	0	1	-100
		$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	0	6000

Εισαγωγή περιορισμού $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

- Συμπληρώνονται τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής:
  $\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4^B \mathbf{Y}$

$$= (-2 \quad -3 \quad -5 \quad -7 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (-3 \quad -2 \quad 0)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & 19 & 1,5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & -22 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 1,6 & 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
14	2		0	1	11	19	1,5	-1	0	0	200
8	1		1	0	-12	-22	-2	2	0	0	400
0	$\bar{3}$		0	0	0,04	1,6	0,1	-0,4	1	0	20
0	$\bar{4}$		0	0	4	6	0,5	1	0	1	-100
		$\mathbf{c}$	8	14	30	50	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	0	6000

Εισαγωγή περιορισμού $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \leq -1500$

- Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την $\bar{4}$
  - Δεν υπάρχει μεταβλητή που μπορεί να εισέλθει στη βάση
  - Άρα, με την εισαγωγή του νέου περιορισμού το ΓΠ είναι αδύνατο