Γραμμικός Προγραμματισμός

ΕΝΟΤΗΤΑ 3η
Δυϊκότητα

Μιχάλης Δούμπος, 2018

Δυϊκότητα (duality): μια εναλλακτική οπτική

- Μια επιχείρηση Α παράγει δύο προϊόντα από 4 πρώτες ύλες με σκοπό τη μεγιστοποίηση του κέρδους

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{Υπό:} \quad & x_1 \leq 8 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Μία επιχείρηση Β θέλει να αγοράσει τις πρώτες ύλες από την Α σε τιμές $u_1, u_2, u_3 \geq 0$, ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος:

$$\min 8u_1 + 6u_2 + 15u_3 + 18u_4$$

  - Οι τιμές που θα αποδεχτεί η Α θα είναι τέτοιες ώστε:

$$u_1 + u_3 + 2u_4 \geq 4 \text{ και } u_2 + 2u_3 + u_4 \geq 3$$

Δυϊκότητα (duality): μια εναλλακτική οπτική

Επιχείρηση A

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{Υπό:} & x_1 \leq 8 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_1, \; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Επιχείρηση B

$$\begin{array}{ll} \min & 8u_1 + 6u_2 + 15u_3 + 18u_4 \\ \text{Υπό:} & u_1 + u_3 + 2u_4 \geq 4 \\ & u_2 + 2u_3 + u_4 \geq 3 \\ & u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{array}$$

- Σε κάθε ΓΠ (πρωτεύον) αντιστοιχεί ένα *δυϊκό* ΓΠ (dual linear program)
  - Για την επιχείρηση A, το αριστερό ΓΠ είναι το πρωτεύον και το δεξιό το δυϊκό
  - Για την επιχείρηση B, το δεξιό ΓΠ είναι το πρωτεύον και το αριστερό το δυϊκό

Ερμηνεία δυϊκών μεταβλητών

- Δυϊκές μεταβλητές = πολλαπλασιαστές Lagrange περιορισμών
- Ερμηνεία ως «σκιώδεις τιμές» (shadow prices)
  - Οριακό όφελος (marginal utility) από την χαλάρωση των απαιτήσεων/περιορισμών ή οριακό κόστος (marginal cost) από την αυστηροποίησή τους
  - $u_i \longrightarrow$ μεταβολή Δf στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για «οριακή» μεταβολή Δb_i του β΄ μέρους του περιορισμού i: $\Delta f = u_i \Delta b_i$

	ΓΠ σε μορφή max	**ΓΠ σε μορφή min**
Περιορισμός ≤	$\Delta b_i > 0 \Rightarrow \Delta f \geq 0 \Rightarrow u_i \geq 0$	$\Delta b_i > 0 \Rightarrow \Delta f \leq 0 \Rightarrow u_i \leq 0$
	$\Delta b_i < 0 \Rightarrow \Delta f \leq 0 \Rightarrow u_i \geq 0$	$\Delta b_i < 0 \Rightarrow \Delta f \geq 0 \Rightarrow u_i \leq 0$
Περιορισμός ≥	$\Delta b_i > 0 \Rightarrow \Delta f \leq 0 \Rightarrow u_i \leq 0$	$\Delta b_i > 0 \Rightarrow \Delta f \geq 0 \Rightarrow u_i \geq 0$
	$\Delta b_i < 0 \Rightarrow \Delta f \geq 0 \Rightarrow u_i \leq 0$	$\Delta b_i < 0 \Rightarrow \Delta f \leq 0 \Rightarrow u_i \geq 0$

  - *Προσοχή στην ερμηνεία όταν η λύση του δυϊκού δεν είναι μοναδική*

Η λύση του δυϊκού στις αναφορές του Excel

Αναφορά ευαισθησίας (sensitivity report)

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
F2	x1	7	0	4	2	2.5
F3	x2	4	0	3	5	1

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
J2	1ος περιορισμός	7	0	8	1E+30	1
J3	2ος περιορισμός	4	0	6	1E+30	2
J4	3ος περιορισμός	15	0.666666667	15	3	3
J5	4ος περιορισμός	18	1.666666667	18	1.5	6

Λύση πρωτεύοντος

Λύση δυϊκού

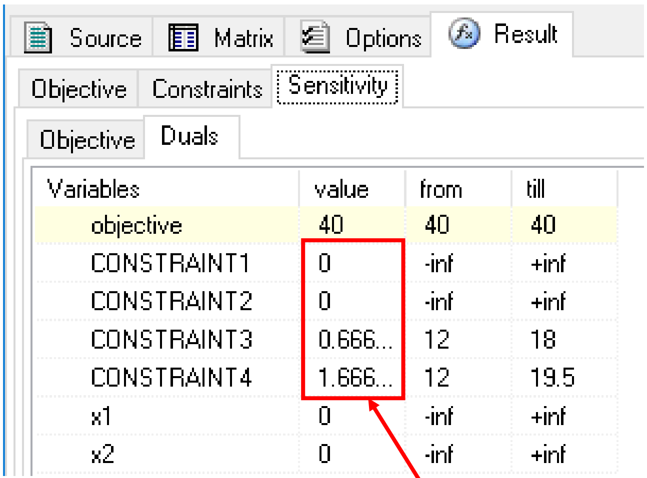
Η λύση του δυϊκού στην αναφορά του LINGO

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              40.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2

Model Class:                                        LP

Total variables:                  2
Nonlinear variables:              0
Integer variables:                0

Total constraints:                5
Nonlinear constraints:            0

Total nonzeros:                   8
Nonlinear nonzeros:               0

                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1        7.000000            0.000000
                           X2        4.000000            0.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1        40.00000            1.000000
                  CONSTRAINT1        1.000000            0.000000
                  CONSTRAINT2        2.000000            0.000000
                  CONSTRAINT3        0.000000           0.6666667
                  CONSTRAINT4        0.000000            1.666667
```

Λύση πρωτεύοντος

Λύση δυϊκού

Η λύση του δυϊκού στο LP_Solve



Variables	value	from	till
objective	40	40	40
CONSTRAINT1	0	-inf	+inf
CONSTRAINT2	0	-inf	+inf
CONSTRAINT3	0.666...	12	18
CONSTRAINT4	1.666...	12	19.5
x1	0	-inf	+inf
x2	0	-inf	+inf

Λύση δυϊκού

Η διαμόρφωση του δυϊκού

Πρωτεύον (primal)		Δυϊκό (dual)
max $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ Υπό: $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$		min $\mathbf{b}^\top\mathbf{u}$ Υπό: $\mathbf{A}^\top\mathbf{u} \ge \mathbf{c}$ $\mathbf{u} \ge \mathbf{0}$
Περιορισμός i τύπου $\le$	$\longrightarrow$	Μεταβλητή $u_i \ge 0$
Περιορισμός i τύπου $\ge$	$\longrightarrow$	Μεταβλητή $u_i \le 0$
Περιορισμός i τύπου $=$	$\longrightarrow$	Μεταβλητή $u_i \in \mathbb{R}$
Μεταβλητή $x_j \ge 0$	$\longrightarrow$	Περιορισμός j τύπου $\ge$
Μεταβλητή $x_j \le 0$	$\longrightarrow$	Περιορισμός j τύπου $\le$
Μεταβλητή $x_j \in \mathbb{R}$	$\longrightarrow$	Περιορισμός j τύπου $=$

- **Για ένα ΓΠ σε μορφή μεγιστοποίησης, οι αντιστοιχίες ορίζονται από αριστερά προς δεξιά**
- **Για ένα ΓΠ σε μορφή ελαχιστοποίησης, οι αντιστοιχίες ορίζονται από δεξιά προς αριστερά**

Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\max & x_1 + & 2x_2 - & 4x_3 - & x_4 & \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + & 9x_2 + & 9x_3 - & x_4 & \geq -7 \\
 & 6x_1 - & 9x_2 + & 4x_3 - & 7x_4 & \leq 21 \\
 & 6x_1 - & 2x_2 - & 6x_3 + & x_4 & = 3 \\
 & 7x_1 + & 11x_2 - & 9x_3 - & 21x_4 & \geq 0 \\
 & x_1 & x_2 & & & \geq 0 \\
 & & & x_3 & x_4 & \leq 0
\end{array}
$$

- Το ΓΠ έχει 4 μεταβλητές και 4 περιορισμούς
  - Σε κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού
  - Σε κάθε περιορισμό αντιστοιχεί μια δυϊκή μεταβλητή

Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrrrrll}
\boxed{\max} & x_1 + & 2x_2 - & 4x_3 - & x_4 & & \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + & 9x_2 + & 9x_3 - & x_4 & \geq -7 & \color{red}{(u_1)} \\
 & 6x_1 - & 9x_2 + & 4x_3 - & 7x_4 & \leq 21 & \color{red}{(u_2)} \\
 & 6x_1 - & 2x_2 - & 6x_3 + & x_4 & = 3 & \color{red}{(u_3)} \\
 & 7x_1 + & 11x_2 - & 9x_3 - & 21x_4 & \geq 0 & \color{red}{(u_4)} \\
 & x_1 & x_2 & & & \geq 0 & \\
 & & & x_3 & x_4 & \leq 0 &
\end{array}
$$

Πρωτεύον (Π)

- Η αντικειμενική συνάρτηση του (Δ) είναι min, γιατί το (Π) είναι max
- Οι συντελεστές στη συνάρτηση του (Δ) είναι τα β΄ μέρη στους περιορισμούς του (Π)

$$\boxed{\min} \quad \boxed{-7u_1 + 21u_2 + 3u_3 + \ 0u_4}$$

Δυϊκό (Δ)

Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \geq -7 \quad (u_1) \\
& 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 \leq 21 \quad (u_2) \\
& 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 \quad (u_3) \\
& 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 - 21x_4 \geq 0 \quad (u_4) \\
& x_1 \quad x_2 \geq 0 \\
& x_3 \quad x_4 \leq 0
\end{array}
$$

Πρωτεύον (Π)

1ος περιορισμός (Δ)

- Στα αριστερά οι συντελεστές της x_1 στους περιορισμούς του (Π)
- Το β΄ μέρος είναι ο συντελεστής της x_1 στη συνάρτηση του (Π)
- Ο περιορισμός είναι $\geq$ γιατί $x_1 \geq 0$

$$
\begin{array}{ll}
\min & -7u_1 + 21u_2 + 3u_3 + 0u_4 \\
\text{Υπό:} & -2u_1 + 6u_2 + 6u_3 + 7u_4 \geq 1 \quad (x_1)
\end{array}
$$

Δυϊκό (Δ)

Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \geq -7 \quad (u_1) \\
& 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 \leq 21 \quad (u_2) \\
& 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 \quad (u_3) \\
& 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 - 21x_4 \geq 0 \quad (u_4) \\
& x_1 \quad x_2 \geq 0 \\
& x_3 \quad x_4 \leq 0
\end{array}
$$

Πρωτεύον (Π)

2ος περιορισμός (Δ)

- Στα αριστερά οι συντελεστές της x_2 στους περιορισμούς του (Π)
- Το β΄ μέρος είναι ο συντελεστής της x_2 στη συνάρτηση του (Π)
- Ο περιορισμός είναι $\geq$ γιατί $x_2 \geq 0$

$$
\begin{array}{ll}
\min & -7u_1 + 21u_2 + 3u_3 + 0u_4 \\
\text{Υπό:} & -2u_1 + 6u_2 + 6u_3 + 7u_4 \geq 1 \quad (x_1) \\
& 9u_1 - 9u_2 - 2u_3 + 11u_4 \geq 2 \quad (x_2)
\end{array}
$$

Δυϊκό (Δ)

Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{llr}
\max & x_1 + 2x_2 \boxed{- 4x_3} - x_4 & \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \geq -7 & \color{red}{(u_1)} \\
& 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 \leq 21 & \color{red}{(u_2)} \\
& 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 & \color{red}{(u_3)} \\
& 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 - 21x_4 \geq 0 & \color{red}{(u_4)} \\
& x_1 \quad x_2 \geq 0 & \\
& x_3 \quad x_4 \leq 0 &
\end{array}
$$

Πρωτεύον (Π)

3ος περιορισμός (Δ)

- Στα αριστερά οι συντελεστές της x_3 στους περιορισμούς του (Π)
- Το β΄ μέρος είναι ο συντελεστής της x_3 στη συνάρτηση του (Π)
- Ο περιορισμός είναι ≤ γιατί $x_3 \leq 0$

$$
\begin{array}{llr}
\min & -7u_1 + 21u_2 + 3u_3 + 0u_4 & \\
\text{Υπό:} & -2u_1 + 6u_2 + 6u_3 + 7u_4 \geq 1 & (x_1) \\
& 9u_1 - 9u_2 - 2u_3 + 11u_4 \geq 2 & (x_2) \\
& \boxed{9u_1 + 4u_2 - 6u_3 - 9u_4} \leq \boxed{-4} & (x_3)
\end{array}
$$

Δυϊκό (Δ)

Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{llr}
\max & x_1 + 2x_2 - 4x_3 \boxed{- x_4} & \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \geq -7 & \color{red}{(u_1)} \\
& 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 \leq 21 & \color{red}{(u_2)} \\
& 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 & \color{red}{(u_3)} \\
& 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 - 21x_4 \geq 0 & \color{red}{(u_4)} \\
& x_1 \quad x_2 \geq 0 & \\
& x_3 \quad x_4 \leq 0 &
\end{array}
$$

Πρωτεύον (Π)

4ος περιορισμός (Δ)

- Στα αριστερά οι συντελεστές της x_4 στους περιορισμούς του (Π)
- Το β΄ μέρος είναι ο συντελεστής της x_4 στη συνάρτηση του (Π)
- Ο περιορισμός είναι ≤ γιατί $x_4 \leq 0$

$$
\begin{array}{llr}
\min & -7u_1 + 21u_2 + 3u_3 + 0u_4 & \\
\text{Υπό:} & -2u_1 + 6u_2 + 6u_3 + 7u_4 \geq 1 & (x_1) \\
& 9u_1 - 9u_2 - 2u_3 + 11u_4 \geq 2 & (x_2) \\
& 9u_1 + 4u_2 - 6u_3 - 9u_4 \leq -4 & (x_3) \\
& \boxed{-u_1 - 7u_2 + u_3 - 21u_4} \leq \boxed{-1} & (x_4)
\end{array}
$$

Δυϊκό (Δ)

Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrl}
\max & x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 & \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \geq -7 & (u_1) \\
 & 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 \leq 21 & (u_2) \\
 & 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 & (u_3) \\
 & 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 - 21x_4 \geq 0 & (u_4) \\
 & x_1 \quad x_2 \quad \geq 0 & \\
 & x_3 \quad x_4 \leq 0 &
\end{array}
$$

Πρωτεύον (Π)

- Οι u_1, u_4 είναι $\leq$ γιατί οι περιορισμοί 1 & 4 του (Π) είναι $\geq$
- Η u_2 είναι $\geq$ γιατί ο περιορισμός 2 του (Π) είναι $\leq$
- Η u_3 είναι ελεύθερη προσήμου γιατί ο περιορισμός 3 του (Π) είναι $=$

$$
\begin{array}{lrl}
\min & -7u_1 + 21u_2 + 3u_3 + 0u_4 & \\
\text{Υπό:} & -2u_1 + 6u_2 + 6u_3 + 7u_4 \geq 1 & (x_1) \\
 & 9u_1 - 9u_2 - 2u_3 + 11u_4 \geq 2 & (x_2) \\
 & 9u_1 + 4u_2 - 6u_3 - 9u_4 \leq -4 & (x_3) \\
 & -u_1 - 7u_2 + u_3 - 21u_4 \leq -1 & (x_4) \\
 & \boxed{u_1, u_4 \leq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \in \mathbb{R}} &
\end{array}
$$

Δυϊκό (Δ)

Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{lrl}
\min & 2x_1 + x_2 - 3x_3 & \\
\text{Υπό:} & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 11 & \\
 & x_1 - x_2 + x_3 = -1 & \\
 & -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 8 & \\
 & 7x_1 + 11x_2 \geq 3 & \\
 & x_1 \geq 0 & \\
 & x_2 \leq 0 & \\
 & x_3 \in \mathbb{R} &
\end{array}
$$

- Το ΓΠ έχει 3 μεταβλητές και 4 περιορισμούς, οπότε το δυϊκό θα έχει
  - 3 περιορισμούς (έναν για κάθε μεταβλητή)
  - 4 μεταβλητές (μία για κάθε περιορισμό)

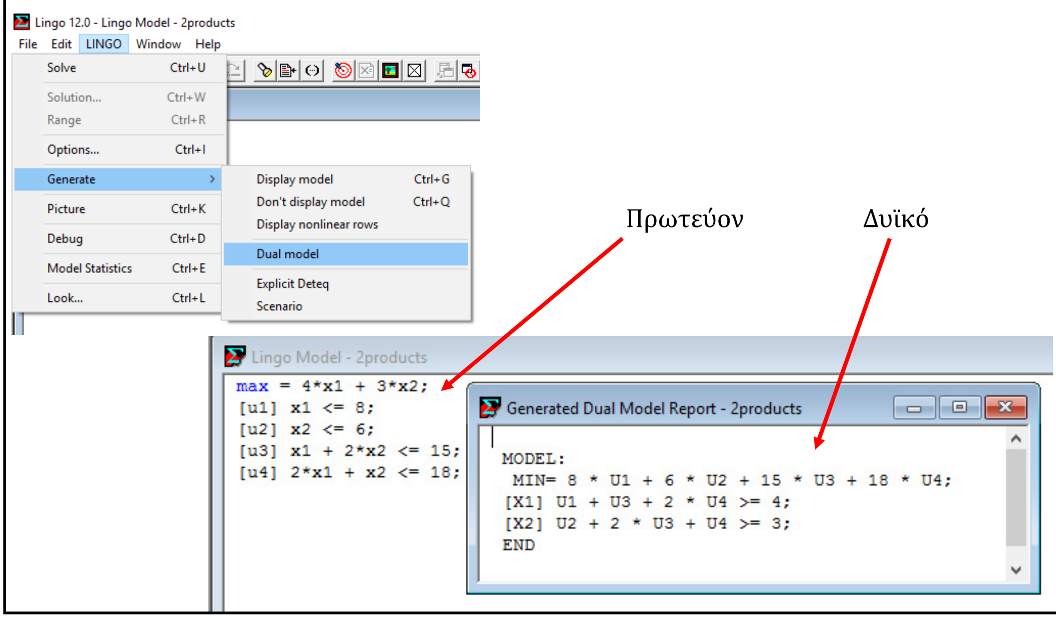
Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
\text{Υπό:} & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 11 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\
& -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 8 \\
& 7x_1 + 11x_2 \geq 3 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \in \mathbb{R}
\end{array}
\qquad \longrightarrow \qquad
\begin{array}{lll}
\max & -2x_1 - x_2 + 3x_3 & \\
\text{Υπό:} & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 11 & (u_1) \\
& x_1 - x_2 + x_3 = -1 & (u_2) \\
& -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 8 & (u_3) \\
& 7x_1 + 11x_2 \geq 3 & (u_4) \\
& x_1 \geq 0 & \\
& x_2 \leq 0 & \\
& x_3 \in \mathbb{R} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\min & 11u_1 - u_2 + 8u_3 + 3u_4 & \\
\text{Υπό:} & u_1 + u_2 - 2u_3 + 7u_4 \geq -2 & (x_1) \\
& 2u_1 - u_2 - 3u_3 + 11u_4 \leq -1 & (x_2) \\
& -u_1 + u_2 + 4u_3 = 3 & (x_3) \\
& u_1 \geq 0, u_2 \in \mathbb{R}, u_3, u_4 \leq 0 &
\end{array}
$$

Μετατροπή του (Π) σε μορφή max και εφαρμογή των κανόνων όπως προηγούμενα

Αυτόματη διαμόρφωση δυϊκού στο LINGO



Θεωρήματα δυϊκότητας

- **Θεώρημα 1 (ασθενής δυϊκότητα, weak duality):** Εάν $\mathbf{x}$ είναι μια εφικτή λύση του (Π) και $\mathbf{u}$ είναι μια εφικτή λύση του (Δ), τότε:
$$\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top\mathbf{u}$$
  - **Ορισμός:** Η διαφορά $\mathbf{b}^\top\mathbf{u} - \mathbf{c}^\top\mathbf{x} \geq 0$ αναφέρεται ως *duality gap*
  - **Παρατήρηση (έλεγχος βελτιστότητας):** Εάν $\mathbf{x}$ είναι μια εφικτή λύση του (Π), τέτοια ώστε $\mathbf{c}^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}^\top\mathbf{u}$ για κάποια εφικτή λύση $\mathbf{u}$ του (Δ), τότε η $\mathbf{x}$ είναι βέλτιστη στο (Π) και η $\mathbf{u}$ είναι βέλτιστη στο (Δ)
- **Θεώρημα 2 (ισχυρή δυϊκότητα, strong duality):** Εάν το (Π) έχει μια βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$, τότε και το (Δ) έχει βέλτιστη λύση $\mathbf{u}^*$ τέτοια ώστε:
$$\mathbf{c}^\top\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top\mathbf{u}^*$$
  - Η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι $\mathbf{u}^{*\top} = \mathbf{c}_B^\top\mathbf{B}^{-1}$

Θεωρήματα δυϊκότητας

- **Θεώρημα 3 (συμπληρωματική χαλαρότητα, complementary slackness):** Οι εφικτές λύσεις $\mathbf{x}$ (πρωτεύον) και $\mathbf{u}$ (δυϊκό) είναι βέλτιστες εάν και μόνο εάν:

  α) $x_{\bar{i}}u_i = 0, \forall i = 1, \ldots, m$
  - Ερμηνεία: εάν το διαθέσιμο απόθεμα του υλικού/μέσου i δεν αξιοποιείται πλήρως ($x_{\bar{i}} > 0$), τότε η προμήθεια επιπλέον ποσότητας αυτής της πρώτης ύλης δεν έχει καμία αξία ($u_i = 0$)

  β) $x_j u_{\bar{j}} = 0, \forall j = 1, \ldots, n$
  - Ερμηνεία: εάν η αξία των υλικών/μέσων για την παραγωγή του προϊόντος j υπερβαίνει το κέρδος που αποφέρει το προϊόν ($u_{\bar{j}} > 0$), τότε η παραγωγή του προϊόντος είναι ασύμφορη ($x_j = 0$)
- **Παρατήρηση:** το θεώρημα επιτρέπει την εύρεση της λύσης του πρωτεύοντος (δυϊκού) από τη λύση του δυϊκού (πρωτεύοντος)

Σχέσεις πρωτεύοντος - δυϊκού

1. Εάν το ένα ΓΠ (πρωτεύον ή δυϊκό) έχει βέλτιστη λύση, τότε και το άλλο έχει βέλτιστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων είναι ίσες
   α) Εάν το πρωτεύον έχει βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$, τότε το δυϊκό έχει βέλτιστη λύση $\mathbf{u}^*$
   β) Εάν το δυϊκό έχει βέλτιστη λύση $\mathbf{u}^*$, τότε το πρωτεύον έχει βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$
   γ) Οι βέλτιστες λύσεις πάντα ικανοποιηθούν τη σχέση $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{u}^*$
2. Εάν το ένα ΓΠ (πρωτεύον ή δυϊκό) είναι μη φραγμένο, τότε το άλλο είναι αδύνατο
   α) Εάν το πρωτεύον είναι μη φραγμένο, τότε το δυϊκό είναι αδύνατο
   β) Εάν το δυϊκό είναι μη φραγμένο, τότε το πρωτεύον είναι αδύνατο
3. Εάν το ένα ΓΠ (πρωτεύον ή δυϊκό) είναι αδύνατο, τότε το άλλο είναι μη φραγμένο ή αδύνατο
   α) Εάν το πρωτεύον είναι αδύνατο, τότε το δυϊκό είναι μη φραγμένο ή αδύνατο
   β) Εάν το δυϊκό είναι αδύνατο, τότε το πρωτεύον είναι μη φραγμένο ή αδύνατο

Παράδειγμα

$$\begin{array}{ll} \max & 150x_1 + 40x_2 + 20x_3 \\ \text{Υπό:} & x_1 + x_2 \leq -20 \\ & x_1 + x_3 \leq -10 \\ & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

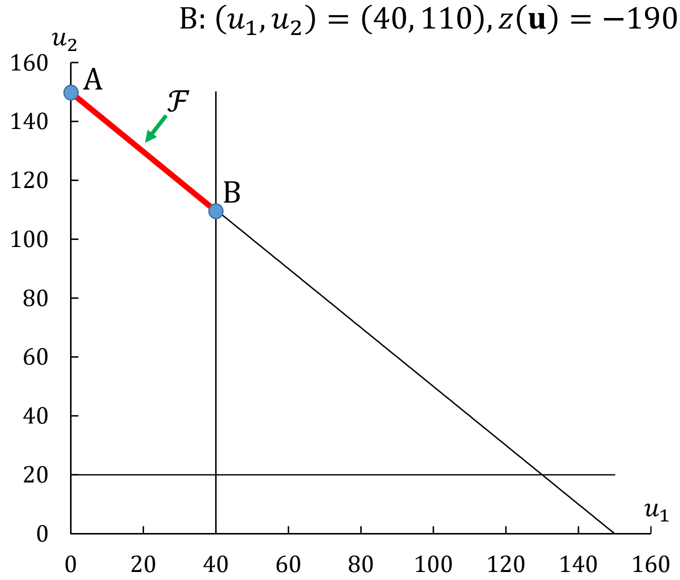
1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ και βρείτε τη βέλτιστη λύση του γραφικά.
2. Βάσει της απάντησής σας στο προηγούμενο ερώτημα για το δυϊκό, βρείτε τη βέλτιστη λύση του δοθέντος ΓΠ.
3. Πώς αλλάζουν οι βέλτιστες λύσεις του δυϊκού και του πρωτεύοντος εάν $x_1 \geq 0$;

Παράδειγμα

A: $(u_1, u_2) = (0, 150), z(\mathbf{u}) = -1500$
B: $(u_1, u_2) = (40, 110), z(\mathbf{u}) = -1900$

$$\begin{array}{ll} \max & 150x_1 + 40x_2 + 20x_3 = f(\mathbf{x}) \\ \text{Υπό:} & x_1 + x_2 \leq -20 \\ & x_1 + x_3 \leq -10 \\ & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & -20u_1 - 10u_2 = z(\mathbf{u}) \\ \text{Υπό:} & u_1 + u_2 = 150 \\ & u_1 \leq 40 \\ & u_2 \geq 20 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$



Παράδειγμα

Το δυϊκό με τις μεταβλητές απόκλισης

$$\begin{array}{lllll} \min & -20u_1 - 10u_2 & & & = z(\mathbf{u}) \\ \text{Υπό:} & u_1 + u_2 & & & = 150 \\ & u_1 & + u_{\bar{2}} & & = 40 \\ & u_2 & & - u_{\bar{3}} & = 20 \\ & & & u_1, u_2, u_{\bar{2}}, u_{\bar{3}} & \geq 0 \end{array}$$

Αντικατάσταση λύσης B
$(u_1 = 40, u_2 = 110)$ στους
περιορισμούς:
$u_{\bar{2}} = 0, u_{\bar{3}} = 90$

Άρα η βέλτιστη ΒΕΛ του δυϊκού είναι
$u_1 = 40, u_2 = 110, u_{\bar{3}} = 90$

Συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας

$$\left.\begin{array}{r} u_1 x_{\bar{1}} = 0 \\ u_2 x_{\bar{2}} = 0 \\ x_3 u_{\bar{3}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_{\bar{1}} = 0 \\ x_{\bar{2}} = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Παράδειγμα

- Το πρωτεύον με τις μεταβλητές απόκλισης

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 150x_1 + 40x_2 + 20x_3 & & = f(\mathbf{x}) \\
\text{Υπό:} & x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad + x_1^- & & = -20 \\
& x_1 \qquad\quad + \quad x_3 \qquad + x_2^- & & = -10 \\
& x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \le 0, x_3, x_1^-, x_2^- \ge 0 & &
\end{array}
$$

- Από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας

$$
\left.\begin{array}{r} x_1^- = 0 \\ x_2^- = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = -20 \\ x_1 + x_3 = -10 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -10 \\ x_2 = -10 \\ x_3 = 0 \end{array}
$$

Παράδειγμα

Τι γίνεται εάν $x_1 \ge 0$;

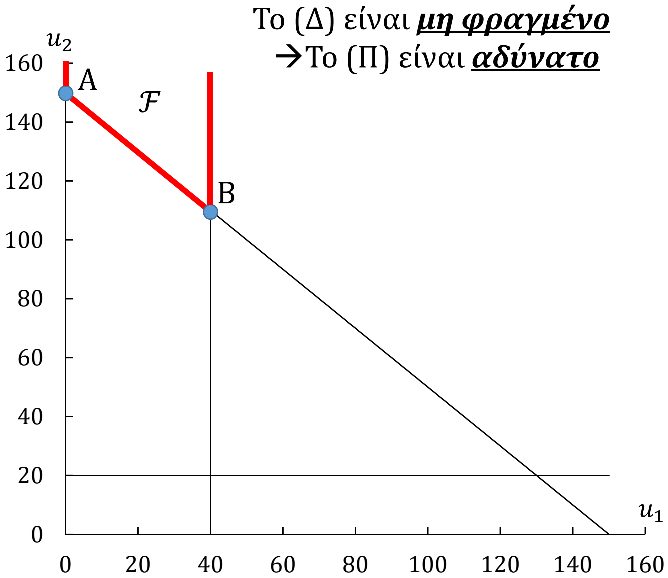
$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 150x_1 + 40x_2 + 20x_3 & = & f(\mathbf{x}) \\
\text{Υπό:} & x_1 + \quad x_2 \qquad & \le & -20 \\
& x_1 \qquad + \quad x_3 & \le & -10 \\
& {\color{red}x_1 \ge 0}, x_2 \le 0, x_3 \ge 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & -20u_1 - 10u_2 & = & z(\mathbf{u}) \\
\text{Υπό:} & u_1 + \quad u_2 & {\color{red}\ge} & {\color{red}150} \\
& u_1 \qquad & \le & 40 \\
& u_2 & \ge & 20 \\
& u_1, u_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Στην περιοχή $\mathcal{F}$: $\min z(\mathbf{u}) = -\infty$

Το (Δ) είναι ***μη φραγμένο***

→Το (Π) είναι ***αδύνατο***



Άσκηση Γ.3

- Η λύση του ΓΠ

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{Υπό:} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{(ΓΠ-Α)} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

με τη διαδικασία του μεγάλου M απαιτεί τη λύση του ακόλουθου ΓΠ

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} - M\mathbf{e}^\top \mathbf{y} \\ \text{Υπό:} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{(ΓΠ-Μ)} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ερώτημα 1: δείξτε ότι το (ΓΠ-Μ) δεν μπορεί να είναι αδύνατο

- Απάντηση: η λύση $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς

Άσκηση Γ.3

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} - M\mathbf{e}^\top \mathbf{y} \\ \text{Υπό:} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{(ΓΠ-Μ)} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ερώτημα 2: γράψτε το δυϊκό του (ΓΠ-Μ)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{u} \\ \text{Υπό:} \quad & \mathbf{A}^\top \mathbf{u} \geq \mathbf{c} \qquad \text{(περιορισμοί για τις μεταβλητές } \mathbf{x}\text{)} \\ & \mathbf{u} \geq -M\mathbf{e}^\top \qquad \text{(περιορισμοί για τις μεταβλητές } \mathbf{y}\text{)} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Σημείωση: Οι περιορισμοί $u_1, u_2, .. \geq -M$ δεν παίζουν κανένα ρόλο

Άσκηση Γ.3

$$\begin{array}{lll} \max & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} & \\ \text{Υπό:} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & (\text{ΓΠ−Α}) \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \max & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} - M\mathbf{e}^\top \mathbf{y} & \\ \text{Υπό:} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} & (\text{ΓΠ-Μ}) \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} & \end{array}$$

- **Ερώτημα 3:** Εάν το (ΓΠ-Μ) είναι μη φραγμένο, τότε τι συμπέρασμα προκύπτει για το (ΓΠ-Α);
  - Απάντηση:

Δυϊκό (ΓΠ-Α)

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{b}^\top \mathbf{u} \\ \text{Υπό:} & \mathbf{A}^\top \mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R} \end{array}$$

Δυϊκό (ΓΠ-Μ)

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{b}^\top \mathbf{u} \\ \text{Υπό:} & \mathbf{A}^\top \mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \geq -M\mathbf{e}^\top \\ & \mathbf{u} \in \mathbb{R} \end{array}$$

  - Τα δύο δυϊκά είναι τα ίδια, αφού οι περιορισμοί $\mathbf{u} \geq -M\mathbf{e}^\top$ περιττεύουν
  - Αδύνατο δυϊκό (ΓΠ-Μ) ⟶ Αδύνατο δυϊκό (ΓΠ-Α) ⟶ Αδύνατο ή μη φραγμένο (ΓΠ-Α)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

Πρωτεύον

$$\begin{array}{lrcrl} \max & 4x_1 & + & 3x_2 & \\ \text{Υπό:} & x_1 & & & \leq 8 \\ & & & x_2 & \leq 6 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 15 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 18 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Δυϊκό

$$\begin{array}{lrrrrl} \min & 8u_1 + & 6u_2 + & 15u_3 + & 18u_4 & \\ \text{Υπό:} & u_1 & + & u_3 + & 2u_4 & \geq 4 \\ & & u_2 + & 2u_3 + & u_4 & \geq 3 \\ & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \geq 0 \end{array}$$

- Θα γίνει αλλαγή στα πρόσημα της αντικειμενικής του δυϊκού ώστε ο πίνακας του δυϊκού να είναι σε μορφή μεγιστοποίησης

$$\max \quad -8u_1 - 6u_2 - 15u_3 - 18u_4$$

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)									
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$							

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)		3							
		4							
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$							

Στο (Δ) βασικές είναι οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στις μη βασικές του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3							
	-18	4							
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$							

Συμπληρώνονται οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών από στην αντικ. συνάρτηση του (Δ)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3			1	0			
	-18	4			0	1			
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$							

Οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών στον κεντρικό πίνακα διαμορφώνουν τον μοναδιαίο πίνακα

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3			1	0			
	-18	4			0	1			
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$			0	0			

Τα ΟΚΕ των βασικών μεταβλητών είναι εξ'ορισμού 0

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3			1	0			2/3
	-18	4			0	1			5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$			0	0			

Οι τιμές των μεταβλητών του (Δ) αντιστοιχούν στα ΟΚΕ του (Π), με αντίθετα πρόσημα

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3			1	0			2/3
	-18	4			0	1			5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$			0	0			-40

Η τιμή της συνάρτησης του (Δ) είναι ίδια με αυτή του (Π) με αλλαγή προσήμου

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3			1	0			2/3
	-18	4			0	1			5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Τα ΟΚΕ του (Δ) προκύπτουν από τις τιμές των μεταβλητών του (Π) με αλλαγή προσήμου

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	$\boxed{1/3}$	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3	$\boxed{-1/3}$	2/3	1	0			2/3
	-18	4			0	1			5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο (i, j) στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(\bar{j}, \bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	$\boxed{-2/3}$	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3	-1/3	$\boxed{2/3}$	1	0			2/3
	-18	4			0	1			5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο (i, j) στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(\bar{j}, \bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

(Π)

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

(Δ)

$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
-15	3	-1/3	2/3	1	0			2/3
-18	4	2/3		0	1			5/3
	b	-8	-6	-15	-18	0	0	
	$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο (i, j) στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(\bar{j}, \bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

(Π)

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

(Δ)

$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
-15	3	-1/3	2/3	1	0			2/3
-18	4	2/3	-1/3	0	1			5/3
	b	-8	-6	-15	-18	0	0	
	$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο (i, j) στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(\bar{j}, \bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3	-1/3	2/3	1	0	1/3		2/3
	-18	4	2/3	-1/3	0	1			5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο $(i, \bar{j})$ στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(j, \bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3	-1/3	2/3	1	0	1/3	-2/3	2/3
	-18	4	2/3	-1/3	0	1			5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο $(i, \bar{j})$ στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(j, \bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3	-1/3	2/3	1	0	1/3	-2/3	2/3
	-18	4	2/3	-1/3	0	1	-2/3		5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο $(i,\bar{j})$ στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(j,\bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
(Π)	4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
	0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
	0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
	3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

	$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
(Δ)	-15	3	-1/3	2/3	1	0	1/3	-2/3	2/3
	-18	4	2/3	-1/3	0	1	-2/3	1/3	5/3
		b	-8	-6	-15	-18	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	-1	-2	0	0	-7	-4	-40

Κάθε στοιχείο $(i,\bar{j})$ στον κεντρικό πίνακα του (Δ) προκύπτει από το $-(j,\bar{i})$ του (Π)

Πίνακας simplex (Δ) από τον πίνακα (Π)

- Όλες οι προσαρμογές από τον πίνακα του (Π) στον πίνακα του (Δ)
  - B_Π: το σύνολο των βασικών μεταβλητών του (Π)
  - B_Δ: το σύνολο των βασικών μεταβλητών του (Δ)

Πίνακας (Π)	**Πίνακας (Δ)**
$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^*$	$-\mathbf{b}^\top \mathbf{u}^*$
$j \in B_\Pi, j \notin B_\Pi$	$\bar{j} \in B_\Delta, \bar{j} \notin B_\Delta$
$\bar{j} \in B_\Pi, \bar{j} \notin B_\Pi$	$j \in B_\Delta, j \notin B_\Delta$
$x_j^*, x_{\bar{j}}^*$	$-\bar{b}_{\bar{j}}, -\bar{b}_j$
$\bar{c}_j, \bar{c}_{\bar{j}}$	$-u_{\bar{j}}^*, -u_j^*$
$y_{ij}, y_{i\bar{j}}, y_{\bar{i}j}, y_{\bar{i}\bar{j}}$	$-y_{\bar{j}\bar{i}}, -y_{j\bar{i}}, -y_{\bar{j}i}, -y_{ij}$

Δυϊκός αλγόριθμος simplex (dual simplex)

- Ο δυϊκός αλγόριθμος (ΔΑ) είναι μια εναλλακτική διαδικασία που βασίζεται στις αρχές της simplex
  - Ο ΔΑ είναι διαφορετικός αλγόριθμος από την simplex
  - Ο ΔΑ προσομοιώνει την εφαρμογή της simplex στο δυϊκό
  - **Ο ΔΑ εφαρμόζεται στο πρωτεύον (δεν χρειάζεται ο πίνακας του δυϊκού)**
- Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή του ΔΑ
  - Να υπάρχει μια βασική λύση που δεν είναι εφικτή στο (Π), αλλά η αντίστοιχή της να είναι ΒΕΛ στο (Δ), δηλαδή:

    α) Τουλάχιστον μία βασική μεταβλητή στο (Π) να έχει αρνητική τιμή

    β) Τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών στον πίνακα (Π) να είναι ≤ 0

Δυϊκός αλγόριθμος simplex

- Στον ΔΑ πρώτα επιλέγεται η εξερχόμενη μεταβλητή και στη συνέχεια η εισερχόμενη
  1. Εξέρχεται η βασική μεταβλητή με την πλέον αρνητική τιμή
  2. Τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών διαιρούνται με τα στοιχεία της εξερχόμενης γραμμής
     - Διαιρέσεις μόνο με αυστηρά αρνητικούς παρονομαστές
  3. Εισερχόμενη μεταβλητή είναι αυτή με το μικρότερο πηλίκο
- Ο ΔΑ τερματίζεται όταν
  - α) Βρεθεί βέλτιστη λύση (εάν οι τιμές όλων των βασικών μεταβλητών γίνουν μη αρνητικές, δηλαδή $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$) ή
  - β) Βρεθεί ότι το ΓΠ είναι αδύνατο (εάν δεν υπάρχει πηλίκο με αυστηρά αρνητικό παρονομαστή στο βήμα 2)

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

- **Άσκηση Γ.1:** Να βρεθεί η λύση του παρακάτω ΓΠ χωρίς να χρησιμοποιηθούν τεχνητές μεταβλητές

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{Υπό:} & x_1 & \leq & 4 \\
& x_1 + 3x_2 & \leq & 15 \\
& 2x_1 + x_2 & \geq & 10 \\
& x_1, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

- Διατυπώνεται το ΓΠ στην ακόλουθη μορφή

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & -3x_1 - 2x_2 & & \\
\text{Υπό:} & x_1 \phantom{{}+3x_2} & \le & 4 \\
 & x_1 + 3x_2 & \le & 15 \\
 & -2x_1 - x_2 & \le & -10 \\
 & x_1, \quad x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & -3x_1 - 2x_2 & & \\
\text{Υπό:} & x_1 \phantom{{}+3x_2} + x_{\bar{1}} & = & 4 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_{\bar{2}} & = & 1 \\
 & -2x_1 - x_2 + x_{\bar{3}} & = & -10 \\
 & x_1 \quad x_2 \quad x_{\bar{1}} \quad x_{\bar{2}} \quad x_{\bar{3}} & \ge & 0
\end{array}
$$

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$		1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$		-2	-1	0	0	1	$\boxed{-10}$
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-3	-2	0	0	0	0

Η λύση δεν είναι εφικτή, γιατί $x_{\bar{3}} = -10$

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$	1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$	-2	-1	0	0	1	-10
	$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	-3	-2	0	0	0	0

Η αντίστοιχη λύση είναι εφικτή στο δυϊκό, γιατί όλα τα ΟΚΕ είναι ≤ 0

Η λύση δεν είναι εφικτή, γιατί $x_{\bar{3}} = -10$

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$	1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$	-2	-1	0	0	1	-10
	$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	-3	-2	0	0	0	0

Η αντίστοιχη λύση είναι εφικτή στο δυϊκό, γιατί όλα τα ΟΚΕ είναι ≤ 0

Η λύση δεν είναι εφικτή, γιατί $x_{\bar{3}} = -10$

Οι προϋποθέσεις για τον ΔΑ ικανοποιούνται

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$	1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$	-2	-1	0	0	1	-10
	$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	-3	-2	0	0	0	0

Από τη βάση εξάγεται η $\bar{3}$ που έχει αρνητική τιμή

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$	1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$	-2	-1	0	0	1	-10
	$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	-3	-2	0	0	0	0

-3/-2 -2/-1

Διαιρούνται τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών με τα στοιχεία της εξερχόμενης γραμμής (μόνο με αυστηρά αρνητικούς παρονομαστές)

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$		1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$		-2	-1	0	0	1	-10
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-3	-2	0	0	0	0
			-3/-2	-2/-1				

Εισέρχεται η μεταβλητή της στήλης με το μικρότερο πηλίκο

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$		1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$		-2	-1	0	0	1	-10
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-3	-2	0	0	0	0

Εισερχόμενη στήλη

Οδηγό στοιχείο

Εξερχόμενη γραμμή

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	-0,5	1	0	0,5	-1
0	$\bar{2}$		0	2,5	0	1	0,5	10
-3	1		1	0,5	0	0	-0,5	5
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-0,5	0	0	-1,5	-15

Μετάβαση στον επόμενο πίνακα simplex με τους ίδιους ακριβώς υπολογισμούς και γραμμοπράξεις όπως και στη μέθοδο simplex

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	-0,5	1	0	0,5	-1
0	$\bar{2}$		0	2,5	0	1	0,5	10
-3	1		1	0,5	0	0	-0,5	5
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-0,5	0	0	-1,5	-15

Η λύση δεν είναι εφικτή, γιατί $x_{\bar{1}} = -1$
Από τη βάση εξάγεται η $\bar{1}$ που έχει αρνητική τιμή

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	-0,5	1	0	0,5	-1
0	$\bar{2}$		0	2,5	0	1	0,5	10
-3	1		1	0,5	0	0	-0,5	5
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-0,5	0	0	-1,5	-15
				-0,5/-0,5			-	

Διαιρούνται τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών με τα στοιχεία της εξερχόμενης γραμμής (μόνο με αυστηρά αρνητικούς παρονομαστές)

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	-0,5	1	0	0,5	-1
0	$\bar{2}$		0	2,5	0	1	0,5	10
-3	1		1	0,5	0	0	-0,5	5
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-0,5	0	0	-1,5	-15
				-0,5/-0,5			-	

Εισέρχεται η μεταβλητή της στήλης με το μικρότερο πηλίκο

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	-0,5	1	0	0,5	-1
0	$\bar{2}$		0	2,5	0	1	0,5	10
-3	1		1	0,5	0	0	-0,5	5
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-0,5	0	0	-1,5	-15

Εισερχόμενη στήλη

Οδηγό στοιχείο

Εξερχόμενη γραμμή

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
-2	2		0	1	-2	0	-1	2
0	$\bar{2}$		0	0	5	1	3	5
-3	1		1	0	1	0	0	4
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-1	0	-2	-16

Μετάβαση στον επόμενο πίνακα simplex με τους ίδιους ακριβώς υπολογισμούς και γραμμοπράξεις όπως και στη μέθοδο simplex

Δυϊκός αλγόριθμος – Παράδειγμα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
-2	2		0	1	-2	0	-1	2
0	$\bar{2}$		0	0	5	1	3	5
-3	1		1	0	1	0	0	4
		$\mathbf{c}$	-3	-2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-1	0	-2	-16

Η λύση αυτή είναι βέλτιστη, γιατί $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$