Γραμμικός Προγραμματισμός

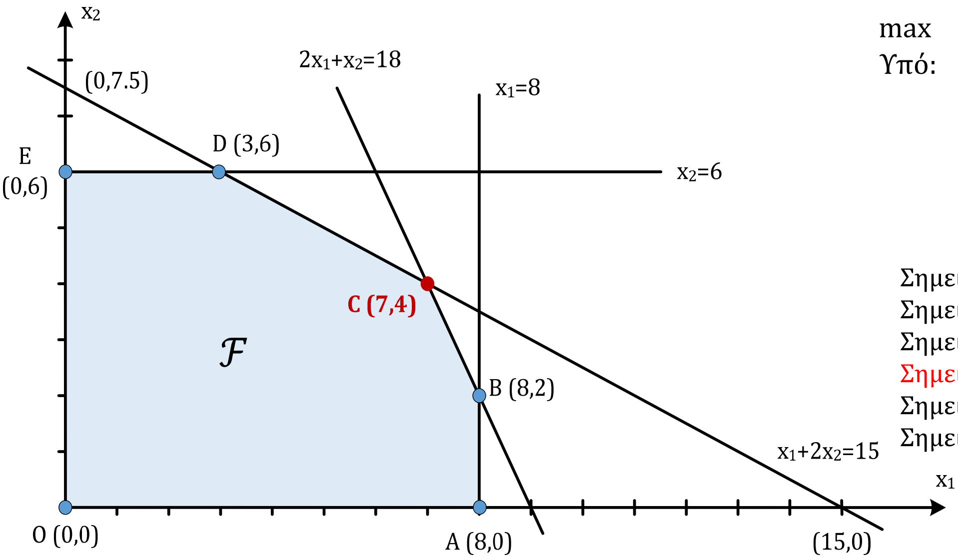
ΕΝΟΤΗΤΑ 2η
Επίλυση Γραμμικών Προγραμμάτων

Μιχάλης Δούμπος, 2018

Η γεωμετρία ενός ΓΠ

- Γραφική αναπαράσταση σε n άξονες ($n \leq 3$), έναν για κάθε μεταβλητή
- Βήματα:
  - Θεώρηση όλων των περιορισμών ως ισότητες
  - Αναπαράσταση των περιορισμών ως ευθείες σε ένα γράφημα n αξόνων
  - Προσδιορισμός της εφικτής περιοχής (σύνολο εφικτών λύσεων)
  - Προσδιορισμός των σημείων τομής των περιορισμών
  - Επιλογή του σημείου τομής που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση

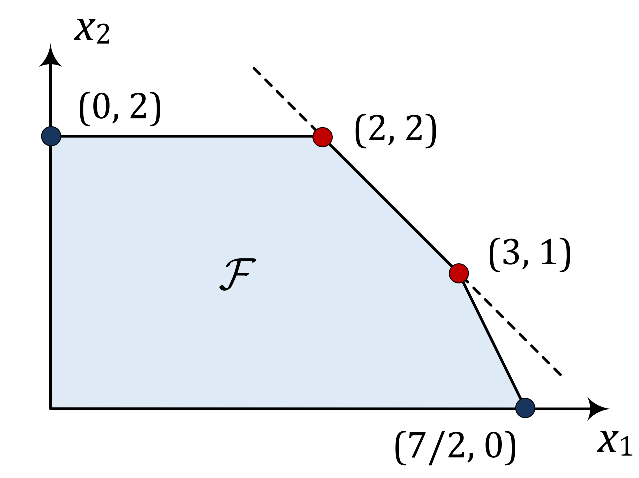
Γραφική αναπαράσταση - Παράδειγμα



$$
\begin{array}{ll}
\max & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{Υπό:} & x_1 \leq 8 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 18 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Σημείο O: $\mathbf{x} = (0,0), f(\mathbf{x}) = 0$
Σημείο A: $\mathbf{x} = (8,0), f(\mathbf{x}) = 32$
Σημείο B: $\mathbf{x} = (8,2), f(\mathbf{x}) = 38$
Σημείο C: $\mathbf{x} = (7,4), f(\mathbf{x}) = 40$
Σημείο D: $\mathbf{x} = (3,6), f(\mathbf{x}) = 30$
Σημείο E: $\mathbf{x} = (0,6), f(\mathbf{x}) = 18$

Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

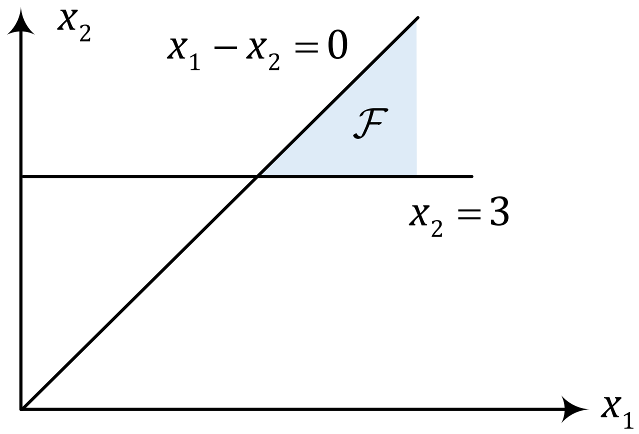


$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{Υπό:} & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$\mathbf{x} = (0,0), f(\mathbf{x}) = 0$
$\mathbf{x} = (0,2), f(\mathbf{x}) = 2$
$\mathbf{x} = (2,2), f(\mathbf{x}) = 4$
$\mathbf{x} = (3,1), f(\mathbf{x}) = 4$
$\mathbf{x} = (7/2,0), f(\mathbf{x}) = 7/2$

Οι λύσεις (2, 2) και (3, 1) είναι βέλτιστες, όπως και κάθε σημείο στο μεταξύ τους ευθύγραμμο τμήμα

Μη φραγμένο ΓΠ



$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + x_2 \\ \text{Υπό:} & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & \quad\quad\; x_2 \geq 3 \\ & x_1 \quad\quad\; \geq 0 \end{array}$$

Σε μορφή μεγιστοποίησης το ΓΠ δεν είναι φραγμένο, αλλά σε μορφή ελαχιστοποίησης είναι

Βασικές λύσεις & βασικές εφικτές λύσεις

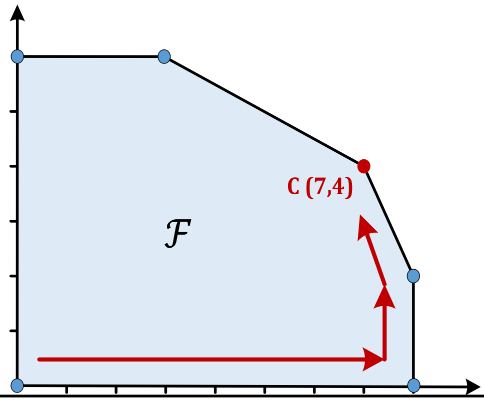
- Οι βέλτιστες λύσεις ενός ΓΠ μπορούν να εντοπιστούν από τα ακραία σημεία του πολυέδρου των εφικτών λύσεων
- **Ορισμός 1:** Βασική λύση (basic solution)
  - Ένα σημείο $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}$ που είναι σημείο τομής τουλάχιστον n περιορισμών
- **Ορισμός 2**: Εκφυλισμένη βασική λύση (degenerate basic solution)
  - Ένα σημείο στο οποίο τέμνονται περισσότεροι από n περιορισμοί
- **Ορισμός 3:** Βασική εφικτή λύση (basic feasible solution)
  - Μια βασική λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του ΓΠ
- Κάθε ΒΕΛ $\mathbf{x}$ είναι ένα ακραίο σημείο (κορυφή) της εφικτής περιοχής
  - Δεν υπάρχουν εφικτές λύσεις $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{x}''$, ώστε :

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'', \text{ όπου } 0 < \lambda < 1$$

- Ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους έχει $n!/[m!\,(n-m!)]$ βασικές λύσεις (για $m = 30$ & $n = 50$ υπάρχουν ~47 τρισ. βασικές λύσεις!!!)

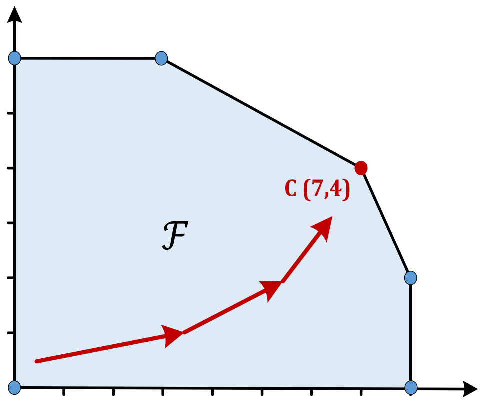
Υπολογιστικές διαδικασίες λύσης ΓΠ

- Μέθοδοι τύπου simplex (George Dantzig, 1947)
    - Dantzig, G. (1949), "Programming in a linear structure", *Econometrica,* vol. 17, 73–74.
    - Dantzig, G. (1963), *Linear Programming and Extensions*, Princeton Univ. Press, Princeton.
  - Ξεκινώντας από μια κορυφή, περιμετρική μετακίνηση μέχρι μια ΒΕΛ (κορυφή) που είναι βέλτιστη



Υπολογιστικές διαδικασίες λύσης ΓΠ

- Μέθοδοι εσωτερικών σημείων (Narendra Karmarkar, 1984)
    - Karmarkar, N. (1984), "A new polynomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica*, vol. 4, no. 4, 373–395
  - Εσωτερική μετακίνηση προς μια βέλτιστη λύση (πιθανόν όχι ΒΕΛ)



Υπολογιστικές διαδικασίες λύσης ΓΠ

- Οι μέθοδοι τύπου simplex είναι υπολογιστικά απλούστερες
  - Όχι ταχύτερες σε μεγάλα προβλήματα
- Παρέχουν περισσότερες πληροφορίες για τη βέλτιστη λύση
- Για να λυθεί ένα ΓΠ με μεθόδους τύπου simplex πρέπει:
  1. Να διαμορφωθεί το ΓΠ σε μορφή κατάλληλη για τον εντοπισμό ακραίων σημείων (ΒΕΛ)
     - Λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων
  2. Να αναπτυχθεί μια αλγεβρική διαδικασία μετάβασης από μια ΒΕΛ (κορυφή) σε μια *καλύτερη* «γειτονική» ΒΕΛ
     - Η μετάβαση δεν πρέπει να γίνεται προς χειρότερες λύσεις (η αντικειμενική συνάρτηση δεν πρέπει να μειώνεται)
  3. Να οριστεί ένα κριτήριο τερματισμού όταν βρεθεί η βέλτιστη λύση
     - Όταν η αντικειμενική συνάρτηση δεν μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω

Πρότυπη μορφή

- Ένα ΓΠ είναι σε πρότυπη μορφή (standard form) εάν είναι διατυπωμένο ως εξής:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{Υπό:} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  - Η αντικειμενική συνάρτηση είναι σε μορφή μεγιστοποίησης
  - Οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικά δεξιά μέρη
  - Οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές
- Η χρήση της πρότυπης μορφής διευκολύνει τον αλγεβρικό υπολογισμό ΒΕΛ
  - Κάθε λύση $\mathbf{x}$ του συστήματος εξισώσεων $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ που δεν έχει αρνητικά στοιχεία ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$) είναι μια ΒΕΛ

Πρότυπη μορφή - Κανόνες μετατροπής

- Εάν η αντικειμενική συνάρτηση είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε την πολλαπλασιάζουμε με -1
$$\min\ f(\mathbf{x}) \rightarrow \max\ -f(\mathbf{x})$$
- Αλλάζουμε τα πρόσημα σε περιορισμούς με αρνητικά δεξιά μέρη
- Οι περιορισμοί διατυπώνονται σε μορφή εξισώσεων
  - Σε κάθε περιορισμό i της μορφής '≤' προσθέτουμε μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{\imath}}$
  - Σε κάθε περιορισμό i της μορφής '≥' αφαιρούμε μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{\imath}}$
- Όλες οι μεταβλητές απόφασης πρέπει να είναι ≥0
  - Αντικαθιστούμε κάθε μεταβλητή $x_j \leq 0$ με την $x_j' = -x_j \geq 0$
  - Αντικαθιστούμε κάθε μεταβλητή $x_j \in \mathbb{R}$ με τη διαφορά $x_j' - x_j''$, όπου $x_j', x_j'' \geq 0$

Πρότυπη μορφή - Παράδειγμα 1

$$\begin{array}{ll}
\max & x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \geq -7 \\
& 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 \leq 21 \\
& 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 \\
& 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 - 21x_4 \geq 0 \\
& x_1 \quad x_2 \quad \geq 0 \\
& x_3 \quad x_4 \leq 0
\end{array}$$

Πρότυπη μορφή - Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrl}
\max & x_1 + 2x_2 + 4x_3' + x_4' & \\
\text{Υπό:} & -2x_1 + 9x_2 - 9x_3' + x_4' & \geq -7 \\
& 6x_1 - 9x_2 - 4x_3' + 7x_4' & \leq 21 \\
& 6x_1 - 2x_2 + 6x_3' - x_4' & = 3 \\
& 7x_1 + 11x_2 + 9x_3' + 21x_4' & \geq 0 \\
& x_1 \quad x_2 \quad x_3' \quad x_4' & \geq 0
\end{array}
$$

Οι μεταβλητές x_3 και x_4 είναι μη θετικές, οπότε αντικαθίστανται από τις $x_3' = -x_3$ και $x_4' = -x_4$

Πρότυπη μορφή - Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrl}
\max & x_1 + 2x_2 + 4x_3' + x_4' & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 - 9x_2 + 9x_3' - x_4' & \leq 7 \\
& 6x_1 - 9x_2 - 4x_3' + 7x_4' & \leq 21 \\
& 6x_1 - 2x_2 + 6x_3' - x_4' & = 3 \\
& 7x_1 + 11x_2 + 9x_3' + 21x_4' & \geq 0 \\
& x_1 \quad x_2 \quad x_3' \quad x_4' & \geq 0
\end{array}
$$

Ο 1ος περιορισμός πολλαπλασιάζεται με -1 ώστε να μην έχει αρνητικό δεξιό μέρος

Πρότυπη μορφή - Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\max & x_1 + & 2x_2 + & 4x_3' + & x_4' & & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 - & 9x_2 + & 9x_3' - & x_4' & {\color{red}+\, x_{\bar{1}}} & = 7 \\
 & 6x_1 - & 9x_2 - & 4x_3' + & 7x_4' & & \leq 21 \\
 & 6x_1 - & 2x_2 + & 6x_3' - & x_4' & & = 3 \\
 & 7x_1 + & 11x_2 + & 9x_3' + & 21x_4' & & \geq 0 \\
 & x_1 & x_2 & x_3' & x_4' & {\color{red}x_{\bar{1}}} & \geq 0
\end{array}
$$

Ο 1ος περιορισμός είναι της μορφής ‘≤’ οπότε προστίθεται η μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{1}}$ και ο περιορισμός μετατρέπεται σε μορφή ‘=‘

Πρότυπη μορφή - Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\max & x_1 + & 2x_2 + & 4x_3' + & x_4' & & & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 - & 9x_2 + & 9x_3' - & x_4' & +\, x_{\bar{1}} & & = 7 \\
 & 6x_1 - & 9x_2 - & 4x_3' + & 7x_4' & & {\color{red}+\, x_{\bar{2}}} & = 21 \\
 & 6x_1 - & 2x_2 + & 6x_3' - & x_4' & & & = 3 \\
 & 7x_1 + & 11x_2 + & 9x_3' + & 21x_4' & & & \geq 0 \\
 & x_1 & x_2 & x_3' & x_4' & x_{\bar{1}} & {\color{red}x_{\bar{2}}} & \geq 0
\end{array}
$$

Ο 2ος περιορισμός είναι της μορφής ‘≤’ οπότε προστίθεται η μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{2}}$ και ο περιορισμός μετατρέπεται σε μορφή ‘=‘

Πρότυπη μορφή - Παράδειγμα 1

$$
\begin{array}{lrl}
\max & x_1 + 2x_2 + 4x_3' + x_4' & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 - 9x_2 + 9x_3' - x_4' + x_{\overline{1}} & = 7 \\
 & 6x_1 - 9x_2 - 4x_3' + 7x_4' + x_{\overline{2}} & = 21 \\
 & 6x_1 - 2x_2 + 6x_3' - x_4' & = 3 \\
 & 7x_1 + 11x_2 + 9x_3' + 21x_4' \color{red}{- x_{\overline{4}}} & = 0 \\
 & x_1 \quad x_2 \quad x_3' \quad x_4' \quad x_{\overline{1}} \quad x_{\overline{2}} \quad \color{red}{x_{\overline{4}}} & \geq 0
\end{array}
$$

Ο 4ος περιορισμός είναι της μορφής ‘≥’ οπότε αφαιρείται η μεταβλητή απόκλισης $x_{\overline{4}}$ και ο περιορισμός μετατρέπεται σε μορφή ‘=‘

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{lrl}
\min & 2x_1 + x_2 - 3x_3 & \\
\text{Υπό:} & x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq 11 \\
 & x_1 - x_2 + x_3 & = -1 \\
 & -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & \geq 8 \\
 & 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 & \geq 0 \\
 & x_1 & \geq 0 \\
 & x_2 & \leq 0 \\
 & x_3 & \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{llrrrl}
\min & 2x_1 & - & x_2' & -\ 3x_3 & \\
\text{Υπό:} & x_1 & - & 2x_2' & -\ \ x_3 & \leq 11 \\
 & x_1 & + & x_2' & +\ \ x_3 & = -1 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2' & +\ 4x_3 & \geq 8 \\
 & 7x_1 & - & 11x_2' & -\ 9x_3 & \geq 0 \\
 & x_1 & & x_2' & & \geq 0 \\
 & & & & x_3 & \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Η μεταβλητή x_2 είναι μη θετική, οπότε αντικαθίστανται από την $x_2' = -x_2$

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{llrrrrl}
\min & 2x_1 & - & x_2' & -\ 3x_3' & +\ 3x_3'' & \\
\text{Υπό:} & x_1 & - & 2x_2' & -\ \ x_3' & +\ \ x_3'' & \leq 11 \\
 & x_1 & + & x_2' & +\ \ x_3' & -\ \ x_3'' & = -1 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2' & +\ 4x_3' & -\ 4x_3'' & \geq 8 \\
 & 7x_1 & - & 11x_2' & -\ 9x_3' & +\ 9x_3'' & \geq 0 \\
 & x_1 & & x_2' & x_3' & x_3'' & \geq 0
\end{array}
$$

Η μεταβλητή x_3 είναι ελεύθερη προσήμου, οπότε αντικαθίστανται από τη διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών $x_3' - x_3''$

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 - x_2' - 3x_3' + 3x_3'' \\
\text{Υπό:} & x_1 - 2x_2' - x_3' + x_3'' \leq 11 \\
& -x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' = 1 \\
& -2x_1 + 3x_2' + 4x_3' - 4x_3'' \geq 8 \\
& 7x_1 - 11x_2' - 9x_3' + 9x_3'' \geq 0 \\
& x_1 \quad x_2' \quad x_3' \quad x_3'' \geq 0
\end{array}
$$

Ο 2ος περιορισμός πολλαπλασιάζεται με -1 ώστε να μην έχει αρνητικό δεξιό μέρος

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{ll}
\max & -2x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' \\
\text{Υπό:} & x_1 - 2x_2' - x_3' + x_3'' \leq 11 \\
& -x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' = 1 \\
& -2x_1 + 3x_2' + 4x_3' - 4x_3'' \geq 8 \\
& 7x_1 - 11x_2' - 9x_3' + 9x_3'' \geq 0 \\
& x_1 \quad x_2' \quad x_3' \quad x_3'' \geq 0
\end{array}
$$

Η αντικειμενική συνάρτηση μετατρέπεται σε μορφή μεγιστοποίησης με αλλαγή προσήμων

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{ll}
\max & -2x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' \\
\text{Υπό:} & x_1 - 2x_2' - x_3' + x_3'' \color{red}{+ x_{\bar{1}} =} 11 \\
& -x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' = 1 \\
& -2x_1 + 3x_2' + 4x_3' - 4x_3'' \geq 8 \\
& 7x_1 - 11x_2' - 9x_3' + 9x_3'' \geq 0 \\
& x_1 \quad x_2' \quad x_3' \quad x_3'' \quad \color{red}{x_{\bar{1}}} \geq 0
\end{array}
$$

Ο 1ος περιορισμός είναι της μορφής '≤' οπότε προτίθεται η μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{1}}$ και ο περιορισμός μετατρέπεται σε μορφή '='

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{ll}
\max & -2x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' \\
\text{Υπό:} & x_1 - 2x_2' - x_3' + x_3'' + x_{\bar{1}} = 11 \\
& -x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' = 1 \\
& -2x_1 + 3x_2' + 4x_3' - 4x_3'' \color{red}{- x_{\bar{3}} =} 8 \\
& 7x_1 - 11x_2' - 9x_3' + 9x_3'' \geq 0 \\
& x_1 \quad x_2' \quad x_3' \quad x_3'' \quad x_{\bar{1}} \quad \color{red}{x_{\bar{3}}} \geq 0
\end{array}
$$

Ο 3ος περιορισμός είναι της μορφής '≥' οπότε αφαιρείται η μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{3}}$ και ο περιορισμός μετατρέπεται σε μορφή '='

Πρότυπη μορφή – Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
\max & -2x_1 + & x_2' + & 3x_3' - & 3x_3'' & & & & \\
\text{Υπό:} & x_1 - & 2x_2' - & x_3' + & x_3'' + & x_{\bar{1}} & & & = 11 \\
 & -\ x_1 - & x_2' - & x_3' + & x_3'' & & & & = 1 \\
 & -2x_1 + & 3x_2' + & 4x_3' - & 4x_3'' & & - x_{\bar{3}} & & = 8 \\
 & 7x_1 - & 11x_2' - & 9x_3' + & 9x_3'' & & & \color{red}{- x_{\bar{4}}} & = 0 \\
 & x_1 & x_2' & x_3' & x_3'' & x_{\bar{1}} & x_{\bar{3}} & \color{red}{x_{\bar{4}}} & \geq 0
\end{array}
$$

Ο 4ος περιορισμός είναι της μορφής ‘≥’ οπότε αφαιρείται η μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{4}}$ και ο περιορισμός μετατρέπεται σε μορφή ‘=‘

Βασικές εφικτές λύσεις

- Το σύστημα εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ της πρότυπης μορφής έχει (γενικά) περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις $(n > m)$
- Λύση ως προς ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ από m μεταβλητές απόφασης
  - Οι στήλες του $\mathbf{A}$ που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του συνόλου $\mathcal{B}$ πρέπει να διαμορφώνουν έναν αντιστρέψιμο πίνακα $\mathbf{B}$ διαστάσεων $m \times m$
  - Οι υπόλοιπες $n - m$ μεταβλητές τίθενται ίσες με μηδέν
- Οι μεταβλητές του συνόλου $\mathcal{B}$ αναφέρονται ως βασικές (basic variables) και ο πίνακας $\mathbf{B}$ αναφέρεται ως πίνακας της βάσης (basis)
- Η λύση $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ είναι μια βασική λύση
- Εάν $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$, τότε η λύση $\mathbf{x}_B$ είναι μια ΒΕΛ
- Εάν το διάνυσμα $\mathbf{x}_B$ έχει μηδενικά στοιχεία, τότε η λύση είναι εκφυλισμένη

Βασικές λύσεις & Βασικές εφικτές λύσεις

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{Υπό:} & x_1 \le 8 \\ & x_2 \le 6 \\ & x_1 + 2x_2 \le 15 \\ & 2x_1 + x_2 \le 18 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{Υπό:} & x_1 + x_{\bar{1}} = 8 \\ & x_2 + x_{\bar{2}} = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_{\bar{3}} = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + x_{\bar{4}} = 18 \\ & x_1,\ x_2\ x_{\bar{1}}\ x_{\bar{2}}\ x_{\bar{3}}\ x_{\bar{4}} \ge 0 \end{array}$$

- Λύση του συστήματος εξισώσεων της πρότυπης μορφής ως προς τις μεταβλητές $x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}, x_{\bar{4}}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \rightarrow \begin{cases} x_{\bar{1}} = 8 \\ x_{\bar{2}} = 6 \\ x_{\bar{3}} = 15 \\ x_{\bar{4}} = 18 \end{cases}$$

ΒΕΛ

Βασικές λύσεις & Βασικές εφικτές λύσεις

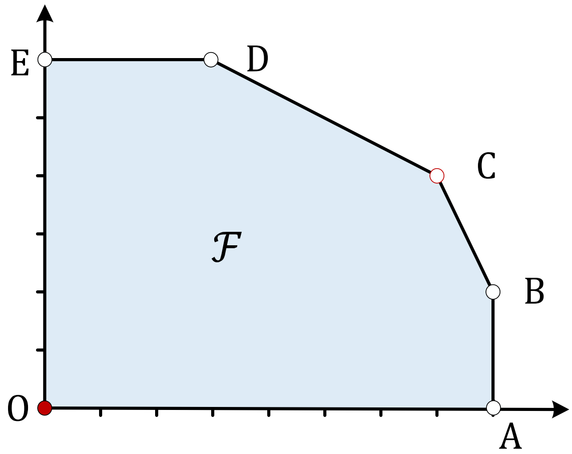
$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{Υπό:} & x_1 \le 8 \\ & x_2 \le 6 \\ & x_1 + 2x_2 \le 15 \\ & 2x_1 + x_2 \le 18 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{Υπό:} & x_1 + x_{\bar{1}} = 8 \\ & x_2 + x_{\bar{2}} = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_{\bar{3}} = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + x_{\bar{4}} = 18 \\ & x_1,\ x_2\ x_{\bar{1}}\ x_{\bar{2}}\ x_{\bar{3}}\ x_{\bar{4}} \ge 0 \end{array}$$

- Λύση του συστήματος εξισώσεων της πρότυπης μορφής ως προς τις μεταβλητές $x_1, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_{\bar{1}} = -1 \\ x_{\bar{2}} = 6 \\ x_{\bar{3}} = 6 \end{cases}$$

Βασική λύση, αλλά όχι ΒΕΛ

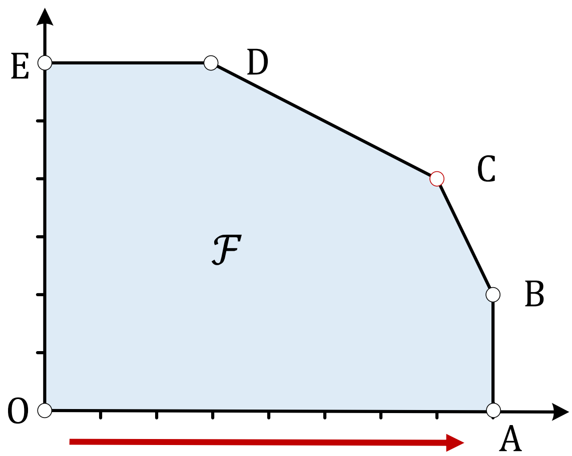
Γειτονικές ΒΕΛ



	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$
O	**0** ×	**0** ×	**8** ✓	**6** ✓	**15** ✓	**18** ✓

Στο σημείο O βασικές είναι οι 4 μη μηδενικές μεταβλητές

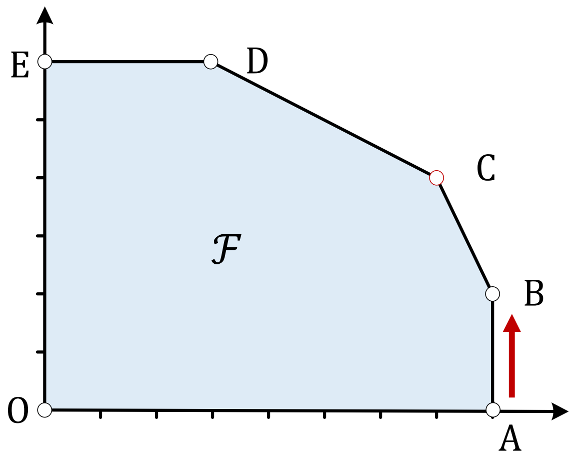
Γειτονικές ΒΕΛ



	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$
O	**0** ×	**0** ×	**8** ✓	**6** ✓	**15** ✓	**18** ✓
A	**8** ✓	**0** ×	**0** ×	**6** ✓	**7** ✓	**2** ✓

Στη γειτονική κορυφή A η x_1 είναι βασική, αντικαθιστώντας την $x_{\bar{1}}$

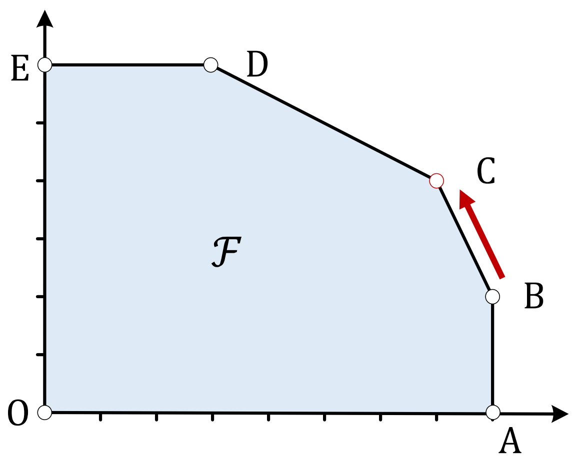
Γειτονικές ΒΕΛ



	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$
O	**0** ×	**0** ×	**8** ✓	**6** ✓	**15** ✓	**18** ✓
A	**8** ✓	**0** ×	**0** ×	**6** ✓	**7** ✓	**2** ✓
B	**8** ✓	**2** ✓	**0** ×	**4** ✓	**3** ✓	0 ×

Πηγαίνοντας από την A στη B, η x_2
γίνεται βασική, αντικαθιστώντας την $x_{\bar{4}}$

Γειτονικές ΒΕΛ



	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$
O	**0** ×	**0** ×	**8** ✓	**6** ✓	**15** ✓	**18** ✓
A	**8** ✓	**0** ×	**0** ×	**6** ✓	**7** ✓	**2** ✓
B	**8** ✓	**2** ✓	**0** ×	**4** ✓	**3** ✓	**0** ×
C	**7** ✓	**4** ✓	**1** ✓	**2** ✓	**0** ×	**0** ×

Πηγαίνοντας από τη B στη C, η $x_{\bar{1}}$
γίνεται βασική, αντικαθιστώντας την $x_{\bar{3}}$

Τα βήματα της μεθόδου simplex

1. Διαμόρφωση μίας αρχικής ΒΕΛ
   - Για ΓΠ με περιορισμούς $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$, με $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$, η αρχική ΒΕΛ διαμορφώνεται από τις μεταβλητές απόκλισης
   - Για άλλα ΓΠ απαιτείται ένα αρχικό στάδιο επιλογής μιας ΒΕΛ
2. Έκφραση των βασικών μεταβλητών συναρτήσει των μη βασικών μεταβλητών
3. Έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει των μη βασικών μεταβλητών
4. Εφόσον η τρέχουσα λύση δεν είναι βέλτιστη:
   4.1. Επιλογή μίας μη βασικής μεταβλητής η αύξηση στην τιμή της οποίας αυξάνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
   4.2. Προσδιορισμός της μέγιστης δυνατής αύξησης στην τιμή της επιλεγμένης μη βασικής μεταβλητής
   4.3. Ενημέρωση των τιμών όλων των μεταβλητών
   4.4. Συνέχεια από το βήμα 2

Αλγεβρική διαδικασία Ι

- **ΒΗΜΑ 1:** Έστω μια ΒΕΛ $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ για δεδομένο πίνακα βάσης $\mathbf{B}$
- **ΒΗΜΑ 2:** Έκφραση των βασικών μεταβλητών συναρτήσει των μη βασικών μεταβλητών
  $$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \widetilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{x}} \quad \text{όπου } \widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}$$
  - $\widetilde{\mathbf{A}}$ είναι το μέρος (στήλες) του πίνακα $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στις μη βασικές μεταβλητές
- **ΒΗΜΑ 3:** Έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μη βασικές μεταβλητές $\tilde{\mathbf{x}}$
  $$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + (\tilde{\mathbf{c}}^\top - \mathbf{c}_B^\top \widetilde{\mathbf{Y}})\tilde{\mathbf{x}}$$
  Τα στοιχεία του διανύσματος $\tilde{\mathbf{c}}^\top - \mathbf{c}_B^\top \widetilde{\mathbf{Y}}$, αναφέρονται ως *οριακά καθαρά εισοδήματα* (ΟΚΕ) των μη βασικών μεταβλητών

Αλγεβρική διαδικασία ΙΙ

- **ΒΗΜΑ 4:** Εάν υπάρχει μη βασική μεταβλητή με θετικό ΟΚΕ, τότε η λύση δεν είναι βέλτιστη
  - **Βήμα 4.1:** Επιλογή της μη βασικής μεταβλητής j με το μεγαλύτερο ΟΚΕ
  - **Βήμα 4.2:** Η αύξηση της μη βασικής μεταβλητής j θα οδηγήσει σε μία νέα ΒΕΛ $\mathbf{x}'_B$. Η νέα τιμή x'_j της μεταβλητής θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε:

$$\mathbf{x}'_B \geq \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x}_B - \tilde{\mathbf{y}}_j x'_j \geq \mathbf{0}$$

1. Εάν $\tilde{\mathbf{y}}_j \leq \mathbf{0}$ τότε $x'_j = +\infty$. Το ΓΠ *δεν είναι φραγμένο* και η διαδικασία περατώνεται.
2. Διαφορετικά:

$$x'_j = \min_{\tilde{y}_{ij}>0} \left\{ \frac{x_{B_i}}{\tilde{y}_{ij}} \right\}$$

Αλγεβρική διαδικασία ΙΙΙ

- **ΒΗΜΑ 4:** (*Συνέχεια*)
  - **Βήμα 4.3:** Έστω ότι $k = \arg\min_{\tilde{y}_{ij}>0} \{x_{B_i} / \tilde{y}_{ij}\}$. Τότε:

1. Η νέα τιμή της βασικής μεταβλητής k είναι: $\tilde{x}'_{B_k} = x_{B_k} - \tilde{y}_{kj} x'_j = 0$
2. Οι νέες τιμές των υπόλοιπων βασικών μεταβλητών είναι: $\tilde{x}'_{B_i} = x_{B_i} - \tilde{y}_{ij} x'_j, \forall i \neq k$

- **Βήμα 4.4:** Ενημερώνεται ο πίνακας της βάσης και το σύνολο των βασικών μεταβλητών εισάγοντας τη μεταβλητή j στη θέση της k. Συνέχεια από το βήμα 2

Παράδειγμα αλγεβρικών υπολογισμών

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 4x_1 + 3x_2 & & & & & & \\
\text{Υπό:} & x_1 & & + x_{\bar{1}} & & & & = 8 \\
 & & x_2 & & + x_{\bar{2}} & & & = 6 \\
 & x_1 + 2x_2 & & & & + x_{\bar{3}} & & = 15 \\
 & 2x_1 + & x_2 & & & & + x_{\bar{4}} & = 18 \\
 & x_1, & x_2 & x_{\bar{1}} & x_{\bar{2}} & x_{\bar{3}} & x_{\bar{4}} & \geq 0
\end{array}$$

Έστω ότι βασικές είναι οι μεταβλητές $1, 2, \overline{2}, \overline{3}$

- **ΒΗΜΑ 2:** Λύση των εξισώσεων ως προς τις βασικές μεταβλητές

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= 8 - x_{\bar{1}} \\
x_2 &= 2 + 2x_{\bar{1}} - x_{\bar{4}} \\
x_{\bar{2}} &= 4 - 2x_{\bar{1}} + x_{\bar{4}} \\
x_{\bar{3}} &= 3 - 3x_{\bar{1}} + 2x_{\bar{4}}
\end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{\bar{2}} \\ x_{\bar{3}} \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}} - \underset{\tilde{\mathbf{Y}}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}} \underset{\tilde{\mathbf{x}}}{\begin{bmatrix} x_{\bar{1}} \\ x_{\bar{4}} \end{bmatrix}}$$

Παράδειγμα αλγεβρικών υπολογισμών

- **ΒΗΜΑ 3:** Έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μη βασικές μεταβλητές

$$4x_1 + 3x_2 = 4(8 - x_{\bar{1}}) + 3\left(2 + 2x_{\bar{1}} - x_{\bar{4}}\right) = 38 + \underset{\textbf{ΟΚΕ}}{[2 \quad -3]} \begin{bmatrix} x_{\bar{1}} \\ x_{\bar{4}} \end{bmatrix}$$

- **ΒΗΜΑ 4.1:** Η μεταβλητή $\overline{1}$ έχει θετικό ΟΚΕ ($\bar{c}_{\bar{1}} = 2$)
- **ΒΗΜΑ 4.2:** Η νέα τιμή $x'_{\bar{1}}$ της $\overline{1}$ πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$\left.\begin{aligned}
x'_1 &= 8 - x'_{\bar{1}} \geq 0 \\
x'_2 &= 2 + 2x'_{\bar{1}} \geq 0 \\
x'_{\bar{2}} &= 4 - 2x'_{\bar{1}} \geq 0 \\
x'_{\bar{3}} &= 3 - 3x'_{\bar{1}} \geq 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\mathbf{x}_B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}} \geq \underset{\tilde{\mathbf{y}}_{\bar{1}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} x'_{\bar{1}} \Rightarrow x'_{\bar{1}} = \min \begin{Bmatrix} 8/1 \\ 4/2 \\ 3/3 \end{Bmatrix} = 1$$

Παράδειγμα αλγεβρικών υπολογισμών

- **ΒΗΜΑ 4.3:** Η $\bar{1}$ γίνεται πλέον βασική με τιμή $x'_{\bar{1}} = 1$ και ενημερώνονται οι τιμές των άλλων μεταβλητών

$$x'_1 = 8 - \quad x'_{\bar{1}} = 7$$
$$x'_2 = 2 + 2x'_{\bar{1}} = 4$$
$$x'_{\bar{2}} = 4 - 2x'_{\bar{1}} = 2$$
$$x'_{\bar{3}} = 3 - 3x'_{\bar{1}} = 0$$

Η $\bar{1}$ αντικατέστησε την $\bar{3}$ στο σύνολο των βασικών μεταβλητών

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το βήμα 2, λύνοντας το σύστημα εξισώσεων της πρότυπης μορφής ξανά, αυτή τη φορά ως προς τις $1, 2, \bar{2}, \bar{1}$

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
			$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
		$\mathbf{c}$		
		$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{Y}$	$\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B$

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση	Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
		$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	$\mathbf{c}$		
	$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{Y}$	$\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B$

Στήλη στην οποία σημειώνονται οι βασικές μεταβλητές

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση	Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
		$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	$\mathbf{c}$		
	$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{Y}$	$\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B$

Συντελεστές βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

Τιμές των βασικών μεταβλητών

$\mathbf{c}_B$ Βάση	Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
	$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\boxed{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}$
$\mathbf{c}$		
$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top\mathbf{Y}$	$\mathbf{c}_B^\top\mathbf{x}_B$

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

$\mathbf{c}_B$ Βάση	Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
	$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}$		
$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top\mathbf{Y}$	$\mathbf{c}_B^\top\mathbf{x}_B$

Το κεντρικό μέρος του πίνακα υπολογίζεται αλγεβρικά (*οι βασικές μεταβλητές στον κεντρικό πίνακα σχηματίζουν πάντα τον μοναδιαίο πίνακα*)

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
			$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
		$\mathbf{c}$		
		$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{Y}$	$\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B$

Συντελεστές μεταβλητών απόφασης στην αντικειμενική συνάρτηση (από το ΓΠ)

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
			$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
		$\mathbf{c}$		
		$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{Y}$	$\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B$

Τα ΟΚΕ

Υλοποίηση της simplex μέσω πινάκων

- Γενική μορφή ενός πίνακα simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		Μεταβλητές απόφασης	$\mathbf{x}_B$
			$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
		$\mathbf{c}$		
		$\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^\top - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{Y}$	$\boxed{\mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B}$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
για τη λύση του πίνακα

Μέθοδος simplex
Αρχικοποίηση – 1[ος] πίνακας

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 4x_1 + 3x_2 & & & & & & \\
\text{υ.π.} & x_1 & + x_{\bar{1}} & & & & = 8 \\
& \quad x_2 & & + x_{\bar{2}} & & & = 6 \\
& x_1 + 2x_2 & & & + x_{\bar{3}} & & = 15 \\
& 2x_1 + \; x_2 & & & & + x_{\bar{4}} & = 18 \\
& x_1 \;,\; x_2 & , x_{\bar{1}} & , x_{\bar{2}} & , x_{\bar{3}} & , x_{\bar{4}} & \geqslant 0
\end{array}
$$

Η διαδικασία ξεκινά έχοντας ως βασικές μεταβλητές τις αποκλίσεις, οι οποίες συμμετέχουν στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς συντελεστές

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$	1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$	2	1	0	0	0	1	18
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Μέθοδος simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{υ.π.} & \boxed{\begin{array}{llllll} x_1 & & +x_{\bar{1}} & & & \\ & x_2 & & +x_{\bar{2}} & & \\ x_1 + 2x_2 & & & & +x_{\bar{3}} & \\ 2x_1 + & x_2 & & & & +x_{\bar{4}} \end{array}} & \begin{array}{l} = 8 \\ = 6 \\ = 15 \\ = 18 \end{array} \\
& x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_{\bar{1}}\ ,\ x_{\bar{2}}\ ,\ x_{\bar{3}}\ ,\ x_{\bar{4}} \geqslant 0
\end{array}$$

Στον 1ο πίνακα, το κεντρικό μέρος είναι οι συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$	1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$	2	1	0	0	0	1	18
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Μέθοδος simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{υ.π.} & x_1 & & +x_{\bar{1}} & & & & = \boxed{8} \\
& & x_2 & & +x_{\bar{2}} & & & = \boxed{6} \\
& x_1 + 2x_2 & & & & +x_{\bar{3}} & & = \boxed{15} \\
& 2x_1 + & x_2 & & & & +x_{\bar{4}} & = \boxed{18} \\
& x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_{\bar{1}}\ ,\ x_{\bar{2}}\ ,\ x_{\bar{3}}\ ,\ x_{\bar{4}} \geqslant 0
\end{array}$$

Στον 1ο πίνακα, τα $\mathbf{x}_B$ (τιμές βασικών μεταβλητών) είναι τα δεξιά μέρη των περιορισμών

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$	1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$	2	1	0	0	0	1	18
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Μέθοδος simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 4x_1+3x_2 & & \\
\text{υ.π.} & x_1 \quad\quad + x_{\bar{1}} & = & 8 \\
& x_2 \quad\quad + x_{\bar{2}} & = & 6 \\
& x_1+2x_2 \quad\quad + x_{\bar{3}} & = & 15 \\
& 2x_1+\ x_2 \quad\quad + x_{\bar{4}} & = & 18 \\
& x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_{\bar{1}}\ ,\ x_{\bar{2}}\ ,\ x_{\bar{3}}\ ,\ x_{\bar{4}} & \geqslant & 0
\end{array}
$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$		2	1	0	0	0	1	18
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

1. Στη γραμμή **c** σημειώνονται οι συντελεστών των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση
2. Στη γραμμή $\bar{\mathbf{c}}$ σημειώνονται τα ΟΚΕ (για ΓΠ με περιορισμούς $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, στον 1ο πίνακα είναι $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$)

Μέθοδος simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 4x_1+3x_2 & & \\
\text{υ.π.} & x_1 \quad\quad + x_{\bar{1}} & = & 8 \\
& x_2 \quad\quad + x_{\bar{2}} & = & 6 \\
& x_1+2x_2 \quad\quad + x_{\bar{3}} & = & 15 \\
& 2x_1+\ x_2 \quad\quad + x_{\bar{4}} & = & 18 \\
& x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_{\bar{1}}\ ,\ x_{\bar{2}}\ ,\ x_{\bar{3}}\ ,\ x_{\bar{4}} & \geqslant & 0
\end{array}
$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$		2	1	0	0	0	1	18
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης (άθροισμα γινομένων $\mathbf{c}_B$ με $\mathbf{x}_B$)

Μέθοδος simplex
$1^{ος}$ πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$		2	1	0	0	0	1	18
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Η λύση δεν είναι βέλτιστη, γιατί υπάρχουν θετικά ΟΚΕ

Μέθοδος simplex
Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$		2	1	0	0	0	1	18
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Εισέρχεται η μεταβλητή 1, γιατί έχει το μεγαλύτερο ΟΚΕ ($\bar{c}_1 = 4$)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_1$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	8	8/1
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6	-
0	$\bar{3}$	1	2	0	0	1	0	15	15/1
0	$\bar{4}$	2	1	0	0	0	1	18	18/2
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Διαιρέσεις μόνο με ***αυστηρά θετικούς*** παρονομαστές (όχι ≤0)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_1$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	8	8/1
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6	-
0	$\bar{3}$	1	2	0	0	1	0	15	15/1
0	$\bar{4}$	2	1	0	0	0	1	18	18/2
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Μέθοδος simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_1$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8	8/1
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6	-
0	$\bar{3}$		1	2	0	0	1	0	15	15/1
0	$\bar{4}$		2	1	0	0	0	1	18	18/2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Το σημείο τομής της στήλης και της γραμμής είναι το ***οδηγό στοιχείο***

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 2 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		1	2	0	0	1	0	15
0	$\bar{4}$		2	1	0	0	0	1	18
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Το οδηγό στοιχείο πρέπει να είναι 1 και τα υπόλοιπα στη στήλη «εισόδου» να είναι 0

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 2 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	8	×(-1)
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6	+
0	$\bar{3}$	1	2	0	0	1	0	15	
0	$\bar{4}$	2	1	0	0	0	1	18	
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0	

Απαλοιφή του 1 στην 3η γραμμή, 1η στήλη: **(γραμμή 1)×(-1) + (γραμμή 3)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 2 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$	**0**	**2**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**7**
0	$\bar{4}$	2	1	0	0	0	1	18
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Απαλοιφή του 1 στην 3η γραμμή, 1η στήλη: **(γραμμή 1)×(-1) + (γραμμή 3)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 2 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8	×(-2)
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6	+
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7	
0	$\bar{4}$		2	1	0	0	0	1	18	
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0	

Απαλοιφή του 2 στην 4η γραμμή, 1η στήλη: **(γραμμή 1)×(-2) + (γραμμή 4)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 2 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$		**0**	**1**	**-2**	**0**	**0**	**1**	**2**
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

Απαλοιφή του 2 στην 4η γραμμή, 1η στήλη: **(γραμμή 1)×(-2) + (γραμμή 4)**

Μέθοδος simplex
Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	4	3	0	0	0	0	0

1. Η μεταβλητή 1 αντικαθιστά την $\bar{1}$
2. Το 1ο στοιχείο του $\mathbf{c}_B$ αλλάζει σε 4 (συντελεστής της μεταβλητής 1 στην αντικειμενική συνάρτηση)

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	0	0	0	0	0

Τα ΟΚΕ της μεταβλητής 1 αντικαθίσταται με το 0, γιατί η μεταβλητή αυτή είναι πλέον βασική
(τα ΟΚΕ των βασικών μεταβλητών είναι εξορισμού 0)

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$	0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$	0	1	-2	0	0	1	2
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	0

ΟΚΕ μεταβλητής 2: $\bar{c}_2 = c_2 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 2^{η} στήλη) = 3 – (4×0 + 0×1 + 0×2 + 0×1) = 3

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$	0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$	0	1	-2	0	0	1	2
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	0

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{1}$: $\bar{c}_{\bar{1}} = c_{\bar{1}} -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 3^{η} στήλη) = 0 – (4×1 + 0×0 + 0×(-1) + 0×(-2)) = -4

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός τιμής αντικειμενικής συνάρτησης

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32

Νέα τιμή αντικειμενική συνάρτησης = άθροισμα γινομένων των στοιχείων του $\mathbf{c}_B$ με τα στοιχεία του $\mathbf{x}_B$

$4\times8 + 0\times6 + 0\times7 + 0\times2 = 32$

Μέθοδος simplex
Πίνακας 2^{ης} επανάληψης

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32

Η λύση δεν είναι βέλτιστη, γιατί υπάρχουν θετικά στοιχεία στη γραμμή των ΟΚΕ ($\bar{\mathbf{c}}$)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32

Εισέρχεται η μεταβλητή 2
(η μοναδική με ΟΚΕ>0: $\bar{c}_2 = 3$)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_2$
4	1		1	0	1	0	0	0	8	-
0	$\bar{2}$		0	1	0	1	0	0	6	6/1
0	$\bar{3}$		0	2	-1	0	1	0	7	7/2
0	$\bar{4}$		0	1	-2	0	0	1	2	2/1
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Διαιρέσεις μόνο με ***αυστηρά θετικούς*** παρονομαστές (όχι ≤0)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_2$
4	1	1	$\boxed{0}$	1	0	0	0	$\boxed{8}$	-
0	$\bar{2}$	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	$\boxed{6}$	6/1
0	$\bar{3}$	0	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	$\boxed{7}$	7/2
0	$\bar{4}$	0	$\boxed{1}$	-2	0	0	1	$\boxed{2}$	2/1
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 3 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_2$
4	1	1	0	1	0	0	0	8	-
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6	6/1
0	$\bar{3}$	0	2	-1	0	1	0	7	7/2
0	$\bar{4}$	0	1	-2	0	0	1	2	2/1
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Το σημείο τομής της στήλης και της γραμμής είναι το ***οδηγό στοιχείο***

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 3 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_2$
4	1	1	0	1	0	0	0	8	-
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6	6/1
0	$\bar{3}$	0	2	-1	0	1	0	7	7/2
0	$\bar{4}$	0	1	-2	0	0	1	2	2/1
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32	

Το οδηγό στοιχείο πρέπει να είναι 1 και τα υπόλοιπα στη στήλη «εισόδου» να είναι 0

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 3 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
4	1	1	0	1	0	0	0	8	
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	0	0	6	+
0	$\bar{3}$	0	2	-1	0	1	0	7	
0	$\bar{4}$	0	1	-2	0	0	1	2	×(-1)
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32	

Απαλοιφή του 1 στην 2η γραμμή, 2η στήλη: **(γραμμή 4)×(-1) + (γραμμή 2)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 3 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	**0**	**0**	**2**	**1**	**0**	**-1**	**4**
0	$\bar{3}$	0	2	-1	0	1	0	7
0	$\bar{4}$	0	1	-2	0	0	1	2
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32

Απαλοιφή του 1 στην 2η γραμμή, 2η στήλη: **(γραμμή 4)×(-1) + (γραμμή 2)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 3 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
4	1	1	0	1	0	0	0	8	
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	0	-1	4	
0	$\bar{3}$	0	2	-1	0	1	0	7	+
0	$\bar{4}$	0	1	-2	0	0	1	2	×(-2)
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32	

Απαλοιφή του 2 στην 3η γραμμή, 2η στήλη: **(γραμμή 4)×(-2) + (γραμμή 3)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 3 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$		**0**	**0**	**3**	**0**	**1**	**-2**	**3**
0	$\bar{4}$		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32

Απαλοιφή του 2 στην 3η γραμμή, 2η στήλη: **(γραμμή 4)×(-2) + (γραμμή 3)**

Μέθοδος simplex
Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	3	-4	0	0	0	32

1. Η μεταβλητή 2 αντικαθιστά την $\bar{4}$
2. Το 4ο στοιχείο του $\mathbf{c}_B$ αλλάζει σε 3 (συντελεστής της μεταβλητής 2 στην αντικειμενική συνάρτηση)

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-4	0	0	0	32

Τα ΟΚΕ της μεταβλητής 2 αντικαθίσταται με το 0, γιατί η μεταβλητή αυτή είναι πλέον βασική
(τα ΟΚΕ των βασικών μεταβλητών είναι εξορισμού 0)

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	0	32

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{1}$: $\bar{c}_{\bar{1}} = c_{\bar{1}} -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με τη στήλη της $\bar{1}$) = 0 – (4×1 + 0×2 + 0×3 + 3×(-2)) = 2

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$	0	0	3	0	1	-2	3
3	2	0	1	-2	0	0	1	2
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	32

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{4}$: $\bar{c}_{\bar{4}} = c_{\bar{4}} -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με τη στήλη της $\bar{4}$) = 0 – (4×0 + 0×0 + 0×(-2) + 3×1) = -3

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός τιμής αντικειμενικής συνάρτησης

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$	0	0	3	0	1	-2	3
3	2	0	1	-2	0	0	1	2
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38

Νέα τιμή αντικειμενική συνάρτησης = άθροισμα γινομένων των στοιχείων του $\mathbf{c}_B$ με τα στοιχεία του $\mathbf{x}_B$
4×8 + 0×4 + 0×3 + 3×2 = 38

Μέθοδος simplex
Πίνακας 3ης επανάληψης

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38

Η λύση δεν είναι βέλτιστη, γιατί υπάρχουν θετικά στοιχεία στη γραμμή των ΟΚΕ ($\bar{\mathbf{c}}$)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38

Εισέρχεται η μεταβλητή $\bar{1}$
(η μοναδική με ΟΚΕ>0: $\bar{c}_{\bar{1}} = 2$)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_{\bar{1}}$
4	1		1	0	1	0	0	0	8	8/1
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4	4/2
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3	3/3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2	-
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Διαιρέσεις μόνο με ***αυστηρά θετικούς*** παρονομαστές (όχι ≤ 0)

Μέθοδος simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_{\bar{1}}$
4	1		1	0	1	0	0	0	8	8/1
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4	4/2
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3	3/3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2	-
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

c_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	x_B	x_B / $y_{\bar{1}}$
4	1	1	0	1	0	0	0	8	8/1
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	0	-1	4	4/2
0	$\bar{3}$	0	0	3	0	1	-2	3	3/3
3	2	0	1	-2	0	0	1	2	-
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{c}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Το σημείο τομής της στήλης και της γραμμής είναι το ***οδηγό στοιχείο***

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

c_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	x_B
4	1	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$	0	0	3	0	1	-2	3
3	2	0	1	-2	0	0	1	2
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	0	2	0	0	-3	38

Το οδηγό στοιχείο πρέπει να είναι 1 και τα υπόλοιπα στη στήλη «εισόδου» να είναι 0

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
4	1		1	0	1	0	0	0	8	
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4	
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	3	÷3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2	
		c	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Διαίρεση της γραμμής 3 με το
οδηγό στοιχείο

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
4	1		1	0	1	0	0	0	8	
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4	
0	$\bar{3}$		**0**	**0**	**1**	**0**	**1/3**	**-2/3**	**1**	÷3
3	2		0	1	-2	0	0	1	2	
		c	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Διαίρεση της γραμμής 3 με το
οδηγό στοιχείο

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
4	1		1	0	1	0	0	0	8	+
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4	
0	$\bar{3}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	1	×(-1)
3	2		0	1	-2	0	0	1	2	
		c	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Απαλοιφή του 1 στην 1η γραμμή, 3η στήλη: **(γραμμή 3)×(-1) + (γραμμή 1)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		**1**	**0**	**0**	**0**	**-1/3**	**2/3**	**7**
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2		0	1	-2	0	0	1	2
		c	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38

Απαλοιφή του 1 στην 1η γραμμή, 3η στήλη: **(γραμμή 3)×(-1) + (γραμμή 1)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
4	1		1	0	0	0	-1/3	2/3	7	
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	4	+
0	$\bar{3}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	1	×(-2)
3	2		0	1	-2	0	0	1	2	
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Απαλοιφή του 2 στην 2η γραμμή, 3η στήλη: **(γραμμή 3)×(-2) + (γραμμή 2)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$		**0**	**0**	**0**	**1**	**-2/3**	**1/3**	**2**
0	$\bar{3}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2		0	1	-2	0	0	1	2
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38

Απαλοιφή του 2 στην 2η γραμμή, 3η στήλη: **(γραμμή 3)×(-2) + (γραμμή 2)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7	
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2	
0	$\bar{3}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1	×2
3	2	0	1	-2	0	0	1	2	+
	c	4	3	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38	

Απαλοιφή του -2 στην 4η γραμμή, 3η στήλη: **(γραμμή 3)×2 + (γραμμή 4)**

Μέθοδος simplex
Μετάβαση στον πίνακα 4 - γραμμοπράξεις

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{3}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	**0**	**1**	**0**	**0**	**2/3**	**-1/3**	**4**
	c	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38

Απαλοιφή του -2 στην 4η γραμμή, 3η στήλη: **(γραμμή 3)×2 + (γραμμή 4)**

Μέθοδος simplex
Ενημέρωση λίστας βασικών μεταβλητών

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$		0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2		0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	2	0	0	-3	38

1. Η μεταβλητή $\bar{1}$ αντικαθιστά την $\bar{3}$
2. Το 3ο στοιχείο του $\mathbf{c}_B$ δεν αλλάζει (η μεταβλητή $\bar{1}$ δεν συμμετέχει στην αντικειμενική συνάρτηση)

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$		0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2		0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	0	-3	38

Τα ΟΚΕ της μεταβλητής $\bar{1}$ αντικαθίσταται με το 0, γιατί η μεταβλητή αυτή είναι πλέον βασική
(τα ΟΚΕ των βασικών μεταβλητών είναι εξορισμού 0)

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-3	38

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{3}$: $\bar{c}_{\bar{3}} = c_{\bar{3}}$ −(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με τη στήλη της $\bar{3}$) =
0 – (4×(-1/3) + 0×(-2/3) + 0×1/3 + 3×2/3) = -2/3

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός νέων ΟΚΕ

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	38

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{4}$: $\bar{c}_{\bar{4}} = c_{\bar{4}}$ −(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με τη στήλη της $\bar{4}$) =
0 – (4×2/3 + 0×1/3 + 0×(-2/3) + 3×(-1/3)) = -5/3

Μέθοδος simplex
Υπολογισμός τιμής αντικειμενικής συνάρτησης

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

Νέα τιμή αντικειμενική συνάρτησης = άθροισμα γινομένων των στοιχείων του $\mathbf{c}_B$ με τα στοιχεία του $\mathbf{x}_B$

$4\times7 + 0\times2 + 0\times1 + 3\times4 = 40$

Μέθοδος simplex
Τελική λύση

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	1/3	-2/3	1
3	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4
	$\mathbf{c}$	4	3	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	-2/3	-5/3	40

1. Η λύση είναι βέλτιστη, γιατί δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ
2. Η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = 7, x_2 = 4, x_{\bar{1}} = 1, x_{\bar{2}} = 2$
3. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 40

Η λύση στο Excel

Αναφορά λύσης (answer report)

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$F$5	Κέρδος	0	40

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$F$2	x1	0	7	Contin
$F$3	x2	0	4	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$J$2	1ος περιορισμός	7	$J$2<=$L$2	Not Binding	1
$J$3	2ος περιορισμός	4	$J$3<=$L$3	Not Binding	2
$J$4	3ος περιορισμός	15	$J$4<=$L$4	Binding	0
$J$5	4ος περιορισμός	18	$J$5<=$L$5	Binding	0

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης

Τιμές μεταβλητών απόφασης

Τιμές μεταβλητών απόκλισης

Αναφορά ευαισθησίας (sensitivity report)

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$F$2	x1	7	0	4	2	2.5
$F$3	x2	4	0	3	5	1

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$J$2	1ος περιορισμός	7	0	8	1E+30	1
$J$3	2ος περιορισμός	4	0	6	1E+30	2
$J$4	3ος περιορισμός	15	0.666666667	15	3	3
$J$5	4ος περιορισμός	18	1.666666667	18	1.5	6

ΟΚΕ

β΄ μέρη περιορισμών

Συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση

Η λύση στο LINGO

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              40.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2

Model Class:                                        LP

Total variables:                      2
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    5
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                       8
Nonlinear nonzeros:                   0

                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1        7.000000            0.000000
                           X2        4.000000            0.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1        40.00000            1.000000
                  CONSTRAINT1        1.000000            0.000000
                  CONSTRAINT2        2.000000            0.000000
                  CONSTRAINT3        0.000000           0.6666667
                  CONSTRAINT4        0.000000            1.666667
```

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης

Τιμές μεταβλητών απόφασης

Τιμές μεταβλητών απόκλισης

ΟΚΕ

Η λύση στο LP_Solve

Source | Matrix | Options | Result

Objective | Constraints | Sensitivity

Variables	result
	40
x1	7
x2	4

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης

Τιμές μεταβλητών απόφασης

Source | Matrix | Options | Result

Objective | Constraints | Sensitivity

Constraints	result
	40
CONSTRAINT1	7
CONSTRAINT2	4
CONSTRAINT3	15
CONSTRAINT4	18

Αριστερά μέρη περιορισμών στη βέλτιστη λύση
(μεταβλητές απόκλισης = |δεξιά μέρη – αριστερά μέρη|)

Source | Matrix | Options | Result

Objective | Constraints | Sensitivity

Objective | Duals

Variables	value	from	till
objective	40	40	40
CONSTRAINT1	0	-inf	+inf
CONSTRAINT2	0	-inf	+inf
CONSTRAINT3	0.666...	12	18
CONSTRAINT4	1.666...	12	19.5
x1	0	-inf	+inf
x2	0	-inf	+inf

ΟΚΕ

Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

- Εάν η αντικειμενική συνάρτηση αλλάξει σε max $4x_1 + \mathbf{2}x_2$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	0	0	-1/3	2/3	7
0	$\bar{2}$		0	0	0	1	-2/3	1/3	2
0	$\bar{1}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	1
2	2		0	1	0	0	2/3	-1/3	4
		$\mathbf{c}$	4	2	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	**0**	-2	36

- Η λύση είναι βέλτιστη γιατί δεν υπάρχει θετικό ΟΚΕ
- Η μεταβλητή $\bar{3}$ έχει μηδενικό ΟΚΕ: $\bar{c}_{\bar{3}} = 0$
  - Η εισαγωγή της δεν θα αλλάξει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

- Εάν εισαχθεί η $\bar{3}$, η τιμή της θα είναι $x_{\bar{3}} = 3$, άρα θα διαμορφωθεί μια διαφορετική βέλτιστη λύση

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_{\bar{3}}$
4	1	1	0	0	0	-1/3	2/3	7	-
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2/3	1/3	2	-
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	**1/3**	-2/3	1	1/(1/3)
2	2	0	1	0	0	2/3	-1/3	4	4/(2/3)
	$\mathbf{c}$	4	2	0	0	0	0		
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	**0**	-2	36	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Οδηγό στοιχείο

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

- Νέος πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1	1	0	1	0	0	0	8
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	0	-1	4
0	$\bar{3}$	0	0	3	0	1	-2	3
2	2	0	1	-2	0	0	1	2
	$\mathbf{c}$	4	2	0	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	0	-2	36

Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

- $1^η$ βέλτιστη λύση: $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}) = (7, 4, 1, 2)$, κέρδος=36
- $2^η$ βέλτιστη λύση: $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_2, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}) = (8, 2, 4, 3)$, κέρδος=36
- Οι δύο παραπάνω βέλτιστες λύσεις είναι γειτονικές κορυφές (ΒΕΛ), γιατί αντιστοιχούν σε διαδοχικούς πίνακες simplex
  - Η λύση $\mathbf{x}_2$ προκύπτει από την $\mathbf{x}_1$, βάζοντας την $\bar{3}$ στη θέση της $\bar{1}$
- Άλλες βέλτιστες λύσεις μπορούν να υπολογιστούν συνδυάζοντας τις λύσεις $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ ως εξής: $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, όπου $0 < \lambda < 1$
  - πχ. για $\lambda = 0{,}5$ προκύπτει μια $3^η$ βέλτιστη λύση (όχι ΒΕΛ)
    $(x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}) = (7{,}5, 3, 0{,}5, 3, 1{,}5)$
- **Γενικά:** Πολλαπλές (άπειρες) βέλτιστες λύσεις υπάρχουν εάν
  1. Υπάρχει μη βασική μεταβλητή με μηδενικό ΟΚΕ, και
  2. Η μεταβλητή αυτή μπορεί να εισαχθεί στη βάση σε μη μηδενική τιμή

Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις
Παράδειγμα 2

- Είναι η βέλτιστη λύση του παρακάτω πίνακα μοναδική;

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_{\bar{3}}$
4	1		1	0	0	0	-1/3	2/3	7	-
0	$\bar{2}$		0	0	0	1	-2/3	1/3	2	-
0	$\bar{1}$		0	0	1	0	1/3	-2/3	0	0/(1/3)
2	2		0	1	0	0	2/3	-1/3	4	4/(2/3)
		$\mathbf{c}$	4	2	0	0	0	0		
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	0	-2	36	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Οδηγό στοιχείο

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις
Παράδειγμα 2

- Νέος πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
4	1		1	0	1	0	0	0	7
0	$\bar{2}$		0	0	2	1	0	-1	2
0	$\bar{3}$		0	0	3	0	1	-2	0
2	2		0	1	-2	0	0	1	4
		$\mathbf{c}$	4	2	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	0	-2	36

- Οι βασικές μεταβλητές άλλαξαν, αλλά οι τιμές τους ($\mathbf{x}_B$) είναι ίδιες
  - Πρόκειται για την ίδια βέλτιστη λύση (η βέλτιστη λύση είναι μοναδική)

Μη φραγμένο ΓΠ

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	-3	-1	-3	1	6	0
2	1		1	3	-1	-6	0	-3	0
		$\mathbf{c}$	2	3	-1	-12	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-3	1	0	0	-6	0

- Η λύση δεν είναι βέλτιστη γιατί υπάρχει θετικό ΟΚΕ ($\bar{c}_3 = 1$)
- Με εισερχόμενη μεταβλητή την 3, δεν υπάρχει πηλίκο $\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_3$ με αυστηρά θετικό παρονομαστή
  - Η μεταβλητή 3 μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα, αυξάνοντας απεριόριστα την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
  - **Συμπέρασμα:** Το ΓΠ δεν είναι φραγμένο

Μέχρι τώρα …

- «Απλό» ΓΠ & η πρότυπη μορφή του

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{Υπό:} & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{Υπό:} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

- Ένα τέτοιο ΓΠ είναι σίγουρα εφικτό (υποθέτοντας ότι $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$)
  - Η λύση $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς
- Η εφαρμογή της simplex ξεκινά έχοντας τις μεταβλητές απόκλισης $\bar{\mathbf{x}}$ ως βασικές στον $1^{\text{ο}}$ πίνακα
- Η simplex τερματίζει όταν βρεθεί μια βέλτιστη λύση ή όταν διαπιστωθεί ότι το ΓΠ δεν είναι φραγμένο
  - Πώς εφαρμόζεται η διαδικασία εάν υπάρχουν περιορισμοί που μπορούν να καταστήσουν το ΓΠ αδύνατο;

Ένα παράδειγμα και μια πρότυπη μορφή του

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 15 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

Αυτό το ΓΠ δεν είναι άμεσα εμφανές εάν είναι εφικτό ή όχι

Εισάγοντας τις μεταβλητές απόκλισης στους περιορισμούς 1 & 2 δεν διαμορφώνεται ένα προφανές σημείο εκκίνησης (δεν εμφανίζεται ο μοναδιαίος πίνακας στους περιορισμούς)

Πρότυπη μορφή:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} = 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}} \ge 0 \end{array}$$

Τεχνητές μεταβλητές (artificial variables)

- Σε κάθε περιορισμό i της μορφής '=' ή '$\geq b_i$' (με $b_i > 0$) εισάγεται μια τεχνητή μεταβλητή $x_{\bar{i}} \geq 0$
- Οι τεχνητές μεταβλητές αναπαριστούν τις παραβιάσεις των περιορισμών
  - Εάν $x_{\bar{i}} > 0$, τότε ο περιορισμός i παραβιάζεται κατά ποσότητα $x_{\bar{i}}$
  - Εάν $x_{\bar{i}} = 0$, τότε ο περιορισμός i ικανοποιείται
- Για να έχει ένα ΓΠ εφικτή λύση θα πρέπει όλες οι τεχνητές μεταβλητές να είναι ίσες με μηδέν

Το ΓΠ του παραδείγματος και η πρότυπη μορφή

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 15 \\
 & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Πρότυπη μορφή (όπως προηγούμενα)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
 & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} = 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}} \geq 0
\end{array}
$$

Το ΓΠ του παραδείγματος και η πρότυπη μορφή

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 15 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Ο 2ος περιορισμός είναι στη μορφή '$\geq b_i$' (με $b_i > 0$), οπότε σε αυτόν προστίθεται η τεχνητή μεταβλητή $x_{\bar{\bar{2}}}$

Πρότυπη μορφή με τεχνητές μεταβλητές:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}} \geq 0 \end{array}$$

Το ΓΠ του παραδείγματος και η πρότυπη μορφή

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 15 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Ο 3ος περιορισμός είναι στη μορφή '=', οπότε σε αυτόν προστίθεται η τεχνητή μεταβλητή $x_{\bar{\bar{3}}}$

Πρότυπη μορφή με τεχνητές μεταβλητές:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \geq 0 \end{array}$$

Η διαδικασία του μεγάλου M

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 & \le 15 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \ge 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 & = 12 \\
& x_1, x_2, x_3 & \ge 0
\end{array}
$$

Οι τεχνητές μεταβλητές εισάγονται στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστές $-M$, όπου M είναι ένας αυθαίρετα μεγάλος θετικός αριθμός

Πρότυπη μορφή με τεχνητές μεταβλητές:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - Mx_{\bar{\bar{2}}} - Mx_{\bar{\bar{3}}} \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \ge 0
\end{array}
$$

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - Mx_{\bar{\bar{2}}} - Mx_{\bar{\bar{3}}} \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \ge 0
\end{array}
$$

Η διαδικασία ξεκινά με βασικές μεταβλητές αυτές που στους περιορισμούς διαμορφώνουν τον μοναδιαίο πίνακα

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-M	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-M	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	c	3	2	1	0	0	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$								

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - Mx_{\bar{\bar{2}}} - Mx_{\bar{\bar{3}}} \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
 & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \geq 0
\end{array}
$$

Στον 1ο πίνακα, το κεντρικό μέρος είναι οι συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-M	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-M	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	c	3	2	1	0	0	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$								

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - Mx_{\bar{\bar{2}}} - Mx_{\bar{\bar{3}}} \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
 & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \geq 0
\end{array}
$$

Στη στήλη $\mathbf{x}_B$ μπαίνουν τα δεξιά μέρη των περιορισμών

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-M	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-M	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	c	3	2	1	0	0	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$								

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1^{ος} πίνακας

$$
\begin{array}{lll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - Mx_{\bar{\bar{2}}} - Mx_{\bar{\bar{\bar{3}}}} & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} & = 15 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} & = 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} & = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} \geq 0 &
\end{array}
$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-M	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-M	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	c	3	2	1	0	0	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$								-17M

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης (άθροισμα γινομένων $\mathbf{c}_B$ με $\mathbf{x}_B$)

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1^{ος} πίνακας

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-M	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-M	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	c	3	2	1	0	0	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$				0		0	0	-17M

Τα ΟΚΕ των βασικών μεταβλητών είναι εξορισμού 0

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
$-M$	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
$-M$	$\bar{\bar{3}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	$-M$	$-M$	
		$\bar{\mathbf{c}}$	$3+2M$			0		0	0	$-17M$

ΟΚΕ μεταβλητής 1: $\bar{c}_1 = c_1 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 1η στήλη) = 3 – (0×1 + (-M)×1 + (-M)×1) = 3+2M

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
$-M$	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
$-M$	$\bar{\bar{3}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	$-M$	$-M$	
		$\bar{\mathbf{c}}$	$3+2M$	$2+5M$		0		0	0	$-17M$

ΟΚΕ μεταβλητής 2: $\bar{c}_2 = c_2 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 2η στήλη) = 2 – (0×4 + (-M)×4 + (-M)×1) = 2+5M

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
-M	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
-M	$\bar{\bar{3}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	-M	-M	
		$\bar{\mathbf{c}}$	3+2M	2+5M	1+4M	0		0	0	-17M

ΟΚΕ μεταβλητής 3: $\bar{c}_3 = c_3 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 3η στήλη) = 1 – (0×1 + (-M)×2 + (-M)×2) = 1+4M

Εφαρμογή simplex
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
-M	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
-M	$\bar{\bar{3}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	-M	-M	
		$\bar{\mathbf{c}}$	3+2M	2+5M	1+4M	0	-M	0	0	-17M

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{2}$: $\bar{c}_{\bar{2}} = c_{\bar{2}} -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με τη στήλη $\bar{2}$) = 0 – (0×0 + (-M)×(-1) + (-M)×0) = -M

Εφαρμογή simplex
Έλεγχος βελτιστότητας

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
$-M$	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	$-M$	$-M$	
	$\bar{\mathbf{c}}$	$3+2M$	$2+5M$	$1+4M$	0	$-M$	0	0	$-17M$

Αρνητικό ΟΚΕ

Η λύση δεν είναι βέλτιστη, γιατί υπάρχουν θετικά ΟΚΕ

<u>Σημείωση</u>: ένα ΟΚΕ της μορφής $\alpha + \beta M$ είναι:
α) θετικό εάν $\beta > 0$,
β) αρνητικό εάν $\beta < 0$,
γ) θετικό ή αρνητικό, αναλόγως της τιμής του α, εάν $\beta = 0$

Εφαρμογή simplex
Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
$-M$	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	$-M$	$-M$	
	$\bar{\mathbf{c}}$	$3+2M$	$2+5M$	$1+4M$	0	$-M$	0	0	$-17M$

Εισέρχεται η
μεταβλητή 2, γιατί έχει
το μεγαλύτερο ΟΚΕ

<u>Σημείωση</u>: μεταξύ διαφορετικών ΟΚΕ, μεγαλύτερο είναι αυτό με τον υψηλότερο συντελεστή του M

Εφαρμογή simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B / \mathbf{y}_2$
0	$\bar{1}$	2	$\boxed{4}$	1	1	0	0	0	$\boxed{15}$	15/4
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	1	$\boxed{4}$	2	0	-1	1	0	$\boxed{5}$	5/4
$-M$	$\bar{\bar{3}}$	1	$\boxed{1}$	2	0	0	0	1	$\boxed{12}$	12/1
	$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	$-M$	$-M$		
	$\bar{\mathbf{c}}$	$3+2M$	$2+5M$	$1+4M$	0	$-M$	0	0	$-17M$	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Διαιρέσεις μόνο με ***αυστηρά θετικούς*** παρονομαστές (όχι ≤0)

Εφαρμογή simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B / \mathbf{y}_2$
0	$\bar{1}$	2	$\boxed{4}$	1	1	0	0	0	$\boxed{15}$	15/4
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	1	$\boxed{4}$	2	0	-1	1	0	$\boxed{5}$	5/4
$-M$	$\bar{\bar{3}}$	1	$\boxed{1}$	2	0	0	0	1	$\boxed{12}$	12/1
	$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	$-M$	$-M$		
	$\bar{\mathbf{c}}$	$3+2M$	$2+5M$	$1+4M$	0	$-M$	0	0	$-17M$	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Εφαρμογή simplex
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B$ / $\mathbf{y}_2$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15	15/4
-M	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5	5/4
-M	$\bar{\bar{3}}$		1	1	2	0	0	0	1	12	12/1
		c	3	2	1	0	0	-M	-M		
		$\bar{\mathbf{c}}$	3+2M	2+5M	1+4M	0	-M	0	0	-17M	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Το σημείο τομής της στήλης και της γραμμής είναι το ***οδηγό στοιχείο***

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Εφαρμογή simplex
Τελικός πίνακας

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
3	1		1	2,33	0	0,67	0	0	-0,33	6
1	3		0	-0,67	1	-0,33	0	0	0,67	3
0	$\bar{2}$		0	-3	0	0	1	-1	1	7
		c	3	2	1	0	0	-M	-M	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-4,33	0	-1,67	0	-M	0,33-M	21

1. Η λύση είναι βέλτιστη, γιατί δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ
2. Η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = 6, x_3 = 3, x_{\bar{2}} = 7$
3. Οι τεχνητές μεταβλητές είναι μηδέν (γιατί δεν είναι βασικές), άρα η λύση είναι εφικτή (και βέλτιστη) για το αρχικό ΓΠ
4. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 21

Διαδικασία των δύο φάσεων

- Διαδικασία παρόμοια του μεγάλου M, αλλά δύο διακριτές φάσεις
- Φάση I: εύρεση μιας ΒΕΛ (εφόσον υπάρχει)
- Φάση II: ξεκινώντας από τη ΒΕΛ της φάσης I (εφόσον το ΓΠ είναι εφικτό), συνεχίζεται η simplex για να βρεθεί η βέλτιστη λύση (εάν το ΓΠ είναι φραγμένο)

Το ΓΠ του παραδείγματος

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 15 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

ΓΠ στη μέθοδο του μεγάλου M:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad - M x_{\bar{\bar{2}}} - M x_{\bar{\bar{3}}} \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \geq 0
\end{array}
$$

Το ΓΠ του παραδείγματος – Διατύπωση φάσης Ι

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 15 \\
 & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

ΓΠ της φάσης Ι

$$
\begin{array}{ll}
\boxed{\text{max} \quad - x_{\bar{\bar{2}}} - x_{\bar{\bar{3}}}} & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
 & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \geq 0
\end{array}
$$

Η αντικειμενική συνάρτηση της φάσης Ι στοχεύει στην εύρεση μιας λύσης που ελαχιστοποιεί τις παραβιάσεις των περιορισμών

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & - x_{\bar{\bar{2}}} - x_{\bar{\bar{3}}} \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
 & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{3}}} = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{3}}} \geq 0
\end{array}
$$

Η διαδικασία ξεκινά με βασικές μεταβλητές αυτές που στους περιορισμούς διαμορφώνουν τον μοναδιαίο πίνακα

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
	$\bar{\mathbf{c}}$								

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$$\begin{array}{lrl}
\max & -x_{\bar{\bar{2}}} - x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} & \\
\text{Υπό:} & \boxed{\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} \end{array}} & \begin{array}{l} = 15 \\ = 5 \\ = 12 \end{array} \\
& x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} \geq 0 &
\end{array}$$

Στον 1ο πίνακα, το κεντρικό μέρος είναι οι συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	c	0	0	0	0	0	-1	-1	
	$\bar{\mathbf{c}}$								

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$$\begin{array}{lrl}
\max & -x_{\bar{\bar{2}}} - x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} & \\
\text{Υπό:} & \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} \end{array} & = \boxed{\begin{array}{l} 15 \\ 5 \\ 12 \end{array}} \\
& x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} \geq 0 &
\end{array}$$

Στη στήλη $\mathbf{x}_B$ μπαίνουν τα δεξιά μέρη των περιορισμών

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	c	0	0	0	0	0	-1	-1	
	$\bar{\mathbf{c}}$								

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$$
\begin{array}{ll}
\max & -x_{\bar{\bar{2}}} - x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = 15 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_{\bar{2}} + x_{\bar{\bar{2}}} = 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{\bar{2}}}, x_{\bar{\bar{\bar{3}}}} \geq 0
\end{array}
$$

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης (άθροισμα γινομένων $\mathbf{c}_B$ με $\mathbf{x}_B$)

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{\bar{3}}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
		$\bar{\mathbf{c}}$								-17

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{\bar{3}}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
		$\bar{\mathbf{c}}$				0		0	0	-17

Τα ΟΚΕ των βασικών μεταβλητών είναι εξορισμού 0

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
	$\bar{\mathbf{c}}$	2			0		0	0	-17

ΟΚΕ μεταβλητής 1: $\bar{c}_1 = c_1 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 1η στήλη) = 0 – (0×1 + (-1)×1 + (-1)×1) = 2

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
	$\bar{\mathbf{c}}$	2	5		0		0	0	-17

ΟΚΕ μεταβλητής 2: $\bar{c}_2 = c_2 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 2η στήλη) = 0 – (0×4 + (-1)×4 + (-1)×1) = 5

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{3}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
		$\bar{\mathbf{c}}$	2	5	4	0		0	0	-17

ΟΚΕ μεταβλητής 3: $\bar{c}_3 = c_3$ −(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 3η στήλη) = 0 – (0×1 + (-1)×2 + (-1)×2) = 4

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Αρχικοποίηση – 1ος πίνακας simplex

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$		1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{3}}$		1	1	2	0	0	0	1	12
		$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
		$\bar{\mathbf{c}}$	2	5	4	0	-1	0	0	-17

ΟΚΕ μεταβλητής $\bar{2}$: $\bar{c}_{\bar{2}} = c_{\bar{2}}$ −(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με τη στήλη $\bar{2}$) = 0 – (0×0 + (-1)×(-1) + (-1)×0) = -1

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Έλεγχος βελτιστότητας

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
	$\bar{\mathbf{c}}$	2	5	4	0	-1	0	0	-17

Η λύση δεν είναι βέλτιστη, γιατί υπάρχουν θετικά ΟΚΕ

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5
-1	$\bar{\bar{3}}$	1	1	2	0	0	0	1	12
	$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
	$\bar{\mathbf{c}}$	2	5	4	0	-1	0	0	-17

Εισέρχεται η
μεταβλητή 2, γιατί έχει
το μεγαλύτερο ΟΚΕ

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B\,/\,\mathbf{y}_2$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15	15/4
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5	5/4
-1	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	1	1	2	0	0	0	1	12	12/1
	$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1		
	$\bar{\mathbf{c}}$	2	5	4	0	-1	0	0	-17	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Διαιρέσεις μόνο με ***αυστηρά θετικούς*** παρονομαστές (όχι ≤0)

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_B\,/\,\mathbf{y}_2$
0	$\bar{1}$	2	4	1	1	0	0	0	15	15/4
-1	$\bar{\bar{2}}$	1	4	2	0	-1	1	0	5	5/4
-1	$\bar{\bar{\bar{3}}}$	1	1	2	0	0	0	1	12	12/1
	$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1		
	$\bar{\mathbf{c}}$	2	5	4	0	-1	0	0	-17	

Στήλη εισερχόμενης μεταβλητής

Το σημείο τομής της στήλης και της γραμμής είναι το ***οδηγό στοιχείο***

Εντοπίζω το μικρότερο πηλίκο

Λύση του ΓΠ της φάσης Ι
Τελικός πίνακας φάσης Ι

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1,5	3,5	0	1	0	0	-0,5	9
0	3		0,5	0,5	1	0	0	0	0,5	6
0	$\bar{2}$		0	-3	0	0	1	-1	1	7
		c	0	0	0	0	0	-1	-1	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	0	-1	-1	0

1. Αυτή είναι η βέλτιστη της ***φάσης Ι***, γιατί δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ
2. Οι τεχνητές μεταβλητές είναι μηδέν (γιατί δεν είναι βασικές), άρα η λύση είναι εφικτή για το αρχικό ΓΠ
3. Αφού το ΓΠ έχει εφικτή λύση, η διαδικασία συνεχίζει με τη φάση ΙΙ

Εάν οι τεχνητές μεταβλητές δεν ήταν όλες μηδέν, τότε η διαδικασία θα σταματούσε εδώ εξάγοντας το συμπέρασμα ότι το ΓΠ είναι αδύνατο

Διαμόρφωση 1^{ου} πίνακα φάσης ΙΙ

1. Διαγράφονται οι τεχνητές μεταβλητές από τον πίνακα

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\cancel{\bar{\bar{2}}}$	$\cancel{\bar{\bar{3}}}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1,5	3,5	0	1	0	$\cancel{0}$	$\cancel{-0,5}$	9
0	3		0,5	0,5	1	0	0	$\cancel{0}$	$\cancel{0,5}$	6
0	$\bar{2}$		0	-3	0	0	1	$\cancel{-1}$	$\cancel{1}$	7
		c	0	0	0	0	0	$\cancel{-1}$	$\cancel{-1}$	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	0	$\cancel{-1}$	$\cancel{-1}$	0

Διαμόρφωση 1ου πίνακα φάσης ΙΙ

2. Αντικαθίσταται η αντικειμενική συνάρτηση της φάσης Ι με την αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού ΓΠ (max $3x_1 + 2x_2 + x_3$)

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
	0	$\bar{1}$	1,5	3,5	0	1	0	9
	1	3	0,5	0,5	1	0	0	6
	0	$\bar{2}$	0	-3	0	0	1	7
$\mathbf{c}$			3	2	1	0	0	
$\bar{\mathbf{c}}$			0	0	0	0	0	0

Διαμόρφωση 1ου πίνακα φάσης ΙΙ

3. Υπολογίζονται εκ νέου τα ΟΚΕ με τη νέα αντικειμενική συνάρτηση

	$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
	0	$\bar{1}$	1,5	3,5	0	1	0	9
	1	3	0,5	0,5	1	0	0	6
	0	$\bar{2}$	0	-3	0	0	1	7
$\mathbf{c}$			3	2	1	0	0	
$\bar{\mathbf{c}}$			2,5	1,5	0	0	0	0

ΟΚΕ μεταβλητής 1: $\bar{c}_1 = c_1 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 1η στήλη) = 3 – (0×1,5 + 1×0,5 + 0×0) = 2,5
ΟΚΕ μεταβλητής 2: $\bar{c}_2 = c_2 -$(άθροισμα γινομένων των $\mathbf{c}_B$ με την 2η στήλη) = 2 – (0×3,5 + 1×0,5 + 0×(-3)) = 1,5

Διαμόρφωση 1^{ου} πίνακα φάσης ΙΙ

4. Υπολογίζεται εκ νέου η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1,5	3,5	0	1	0	9
1	3		0,5	0,5	1	0	0	6
0	$\bar{2}$		0	-3	0	0	1	7
		$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	2,5	1,5	0	0	0	6

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης = άθροισμα γινομένων $\mathbf{c}_B$ με $\mathbf{x}_B$ = 0×9 + 1×6 + 0×7 = 6

Συνέχεια φάσης ΙΙ

Εφαρμόζεται η διαδικασία της simplex
(*σε αυτό το βήμα εισάγεται η 1 στη θέση της* $\bar{1}$)

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1,5	3,5	0	1	0	9
1	3		0,5	0,5	1	0	0	6
0	$\bar{2}$		0	-3	0	0	1	7
		$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	2,5	1,5	0	0	0	6

Φάση ΙΙ
Τελικός πίνακας

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	1		1	2,33	0	0,67	0	6
1	3		0	-0,67	1	-0,33	0	3
0	$\bar{2}$		0	-3	0	0	1	7
		$\mathbf{c}$	3	2	1	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	-4,33	0	-1,67	0	21

1. Η λύση είναι βέλτιστη, γιατί δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ
2. Η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = 6, x_3 = 3, x_{\bar{2}} = 7$
3. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 21