Γραμμικός Προγραμματισμός

ΕΝΟΤΗΤΑ 1η
Εισαγωγή & Παραδείγματα Μοντελοποίησης

Μιχάλης Δούμπος, 2018

Μαθηματικός προγραμματισμός

$$\begin{array}{lll} \max/\min & f(\mathbf{x}) & \\ \text{Υπό περιορισμούς:} & g_i(\mathbf{x}) \leq = \geq b_i, & i = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$: διάνυσμα-στήλη των μεταβλητών απόφασης (decision variables)
  - Τα άγνωστα στοιχεία που πρέπει να υπολογιστούν
- $f(\mathbf{x})$: αντικειμενική συνάρτηση (objective function)
  - Το κριτήριο επιλογής της καλύτερης λύσης
- m: πλήθος περιορισμών (constraints)
  - Απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιεί κάθε λύση του προβλήματος

Τυπολογία μαθηματικών προγραμμάτων

- Οι περιορισμοί και η αντικειμενική συνάρτηση έχουν γραμμική μορφή (ως προς τις μεταβλητές απόφασης);
  - Εάν όχι, τότε μη γραμμικός προγραμματισμός (non-linear programming)
- Υπάρχουν μεταβλητές απόφασης που πρέπει να είναι ακέραιες;
  - Εάν ναι, τότε (μικτός) ακέραιος προγραμματισμός (integer programming)
- Υπάρχουν στοχαστικές/αβέβαιες παράμετροι στο πρόβλημα;
  - Εάν ναι, τότε στοχαστικός μαθηματικός προγραμματισμός (stochastic programming)
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι μία ή περισσότερες;
  - Εάν υπάρχουν περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις, τότε πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός (multiobjective mathematical programming)

Κυρτά και μη κυρτά προβλήματα

- **Ορισμός 1:** μια συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ είναι κυρτή (convex) εάν

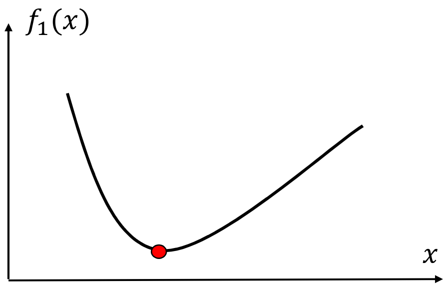
$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2),\ \forall \lambda \in [0,1]$$

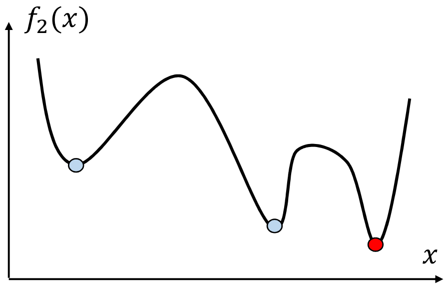
  - Εάν η συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ είναι κοίλη, τότε η $-f(\mathbf{x})$ είναι κυρτή
- **Ορισμός 2:** Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{Υπό:} & g_i(\mathbf{x}) \leq = \geq b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

  είναι κυρτό εάν οι συναρτήσεις f και $g_1, \dots, g_m$ είναι όλες κυρτές
- Τα κυρτά προβλήματα είναι υπολογιστικά εύκολο να λυθούν, ενώ τα μη κυρτά είναι (γενικά) πολύ δύσκολα
- Κάθε γραμμικό πρόγραμμα είναι κυρτό
  - Προβλήματα με ακέραιες μεταβλητές δεν είναι κυρτά (ακόμα και εάν είναι γραμμικά)

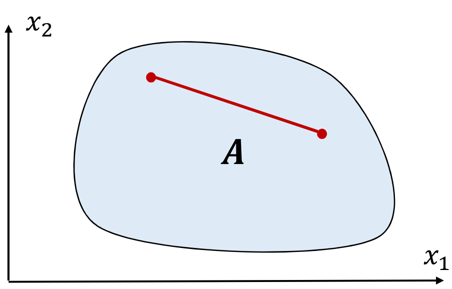
Κυρτά και μη κυρτά προβλήματα

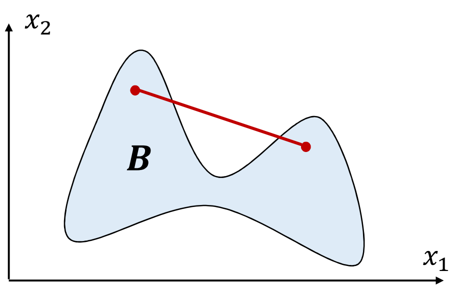




- Η συνάρτηση f_1 είναι κυρτή και έχει ένα ολικό (global) ελάχιστο
- Η συνάρτηση f_2 δεν είναι κυρτή και έχει ένα ολικό ελάχιστο και άλλα δύο τοπικά (local) ελάχιστα
  - Η διάκριση μεταξύ ενός τοπικού και ενός ολικού ακρότατου δεν είναι εύκολη (υπολογιστικά)

Κυρτά και μη κυρτά προβλήματα





- Το $\boldsymbol{A}$ είναι ένα κυρτό σύνολο
  - Κάθε γραμμικός συνδυασμός δύο σημείων του $\boldsymbol{A}$ είναι εντός της περιοχής
- Το $\boldsymbol{B}$ δεν είναι ένα κυρτό σύνολο
  - Ένας γραμμικός συνδυασμός δύο σημείων του $\boldsymbol{B}$ είναι πιθανό να οδηγήσει έξω από το $\boldsymbol{B}$

Γραμμικός προγραμματισμός

- Γενική μορφή ενός γραμμικού προγράμματος (ΓΠ)

$$
\begin{array}{ll}
\max & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{Υπό:} & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{Παράμετροι-δεδομένα (γνωστά στοιχεία)}} \quad \underbrace{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Άγνωστα}}
$$

Ορισμοί

- Σύνολο εφικτών λύσεων: $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$
  - Κάθε συνδυασμός των μεταβλητών απόφασης που ικανοποιεί τους περιορισμούς
- Βέλτιστη λύση: $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* \ge \mathbf{c}^\top \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}$
  - Μια εφικτή λύση που δεν είναι χειρότερη από καμία άλλη
- Μοναδική βέλτιστη λύση: $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* > \mathbf{c}^\top \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}$
  - Μια εφικτή λύση που είναι καλύτερη όλων των άλλων
- Αδύνατο γραμμικό πρόγραμμα: $\mathcal{F} = \emptyset$
  - Αντικρουόμενοι περιορισμοί
- Μη φραγμένο γραμμικό πρόγραμμα: $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = +\infty$
  - Εφικτό ΓΠ για το οποίο ο στόχος δεν έχει άνω φράγμα

Ερμηνεία ως ένα πρόβλημα παραγωγής

- Μεταβλητές απόφασης
  - x_j = ποσότητα παραγωγής προϊόντος j
- Αντικειμενική συνάρτηση
  - Μεγιστοποίηση κέρδους
- Συντελεστές μεταβλητών απόφασης στην αντικειμενική συνάρτηση:
  - c_j = κέρδος από την παραγωγή μίας μονάδας του προϊόντος j
- Περιορισμοί
  - Διαθέσιμοι πόροι (υλικά, ανθρώπινο δυναμικό, κεφάλαια, χρόνος, …)
- Δεξιά μέλη περιορισμών
  - b_i = διαθέσιμη ποσότητα πόρου i
- Συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στους περιορισμούς
  - a_{ij} = μονάδες του πόρου i που απαιτούνται για την παραγωγή μίας μονάδας του προϊόντος j

Διαδικασία μοντελοποίησης

- **Βήμα 1:** Τι αντιπροσωπεύει η αντικειμενική συνάρτηση;
- **Βήμα 2:** Ορισμός (αρχικών) μεταβλητών απόφασης
  - Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία που χρειάζονται για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης;
- **Βήμα 3:** Αντικειμενική συνάρτηση
  - Έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης βάσει των μεταβλητών απόφασης
  - Σύνθετες σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών δεν είναι καλό να ενσωματώνονται στην αντικειμενική συνάρτηση
- **Βήμα 4:** Περιορισμοί
  - Ποιες απαιτήσεις πρέπει να ικανοποιούν οι μεταβλητές απόφασης;
  - Πώς λειτουργεί το υπό μελέτη σύστημα, ποιοι πόροι και μέσα χρησιμοποιούνται, ποιες είναι οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών;
  - Εισαγωγή επιπλέον μεταβλητών, εφόσον χρειαστεί

Παράδειγμα παραγωγής

- Μία επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα Π1 και Π2 από πρώτες ύλες Υ1, Υ2, Υ3, Υ4 ως εξής:

	Π1	Π2	Απόθεμα
Υ1	1	-	8
Υ2	-	1	6
Υ3	1	2	15
Υ4	2	1	18
Κέρδος	4	3	

- Ποια είναι η ποσότητα παραγωγής των δύο προϊόντων που μεγιστοποιεί το κέρδος;

Παράδειγμα παραγωγής - Μοντελοποίηση

- Μεταβλητές απόφασης
  - x_1 = ποσότητα παραγωγής προϊόντος Π1
  - x_2 = ποσότητα παραγωγής προϊόντος Π2
- Αντικειμενική συνάρτηση
  - Μεγιστοποίηση κέρδους: $\max f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 3x_2$
- Περιορισμοί
  - Η ποσότητα των πρώτων υλών δεν πρέπει να υπερβαίνει τα αποθέματα
    - Πρώτη ύλη Υ1: $x_1 \leq 8$
    - Πρώτη ύλη Υ2: $x_2 \leq 6$
    - Πρώτη ύλη Υ3: $x_1 + 2x_2 \leq 15$
    - Πρώτη ύλη Υ4: $2x_1 + x_2 \leq 18$
  - Η παραγωγή δεν μπορεί να είναι αρνητική: $x_1, x_2 \geq 0$

Το ΓΠ του παραδείγματος

$$
\begin{array}{ll}
\max & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{Υπό:} & x_1 \leq 8 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 18 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

Παράδειγμα μείξης

- Μια επιχείρηση προμηθεύεται 4 τύπους ελαιόλαδου ($Λ_1$, ..., $Λ_4$) και πουλά τους ίδιους τύπους καθώς και 2 μείγματα με την εξής σύνθεση:
  - Μείγμα 1: 50% Λ1, 30% Λ2, 20% Λ4
  - Μείγμα 2: ≤40% Λ1, ≥20% Λ2, ≥ 20% Λ3
- Το κόστος αγοράς του ελαιόλαδου i είναι c_i (€/lt), η τιμή πώλησής του είναι p_i (€/lt), ενώ η τιμή πώλησης των δύο μειγμάτων είναι μ_1 και μ_2 (€/lt)
- Οι διαθέσιμες ποσότητες από τα ελαιόλαδα είναι $a_1, \dots, a_4$

Παράδειγμα μείξης – Μοντελοποίηση

- Μεταβλητές απόφασης
  - $x_1, \dots, x_4$ = ποσότητες ελαιόλαδων για πώληση
  - y_{ij} = ποσότητα ελαιόλαδου i για την παραγωγή του μείγματος j
- Αντικειμενική συνάρτηση = μεγιστοποίηση κέρδους
  - Κέρδος = κέρδος από πώληση ελαιόλαδων
    + έσοδα από πώληση μειγμάτων
    − κόστος ελαιόλαδων για την παραγωγή μειγμάτων

$$\max \sum_{i=1}^{4}(p_i - c_i)x_i + \sum_{j=1}^{2}\mu_j\left(y_{1j} + y_{2j} + y_{3j} + y_{4j}\right) - \sum_{i=1}^{4}c_i(y_{i1} + y_{i2}) =$$

$$\sum_{i=1}^{4}(p_i - c_i)x_i + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}(\mu_j - c_i)y_{ij}$$

Παράδειγμα μείξης – Μοντελοποίηση

- Περιορισμοί
  - Διαθέσιμες ποσότητες

$$x_i + y_{i1} + y_{i2} \le a_i,\ i = 1, 2, 3, 4$$

  - Αναλογίες 1ου μείγματος:

$$\frac{y_{11}}{y_{11} + y_{21} + y_{41}} = 0{,}5 \qquad \frac{y_{21}}{y_{11} + y_{21} + y_{41}} = 0{,}3$$

  - Αναλογίες 2ου μείγματος:

$$\frac{y_{12}}{y_{12} + y_{22} + y_{32}} \le 0{,}4 \qquad \frac{y_{22}}{y_{12} + y_{22} + y_{32}} \ge 0{,}2 \qquad \frac{y_{32}}{y_{12} + y_{22} + y_{32}} \ge 0{,}2$$

  - Περιορισμοί μη αρνητικότητας: $x_i, y_{ij} \ge 0$

Παράδειγμα μείξης – Μοντελοποίηση ΓΠ

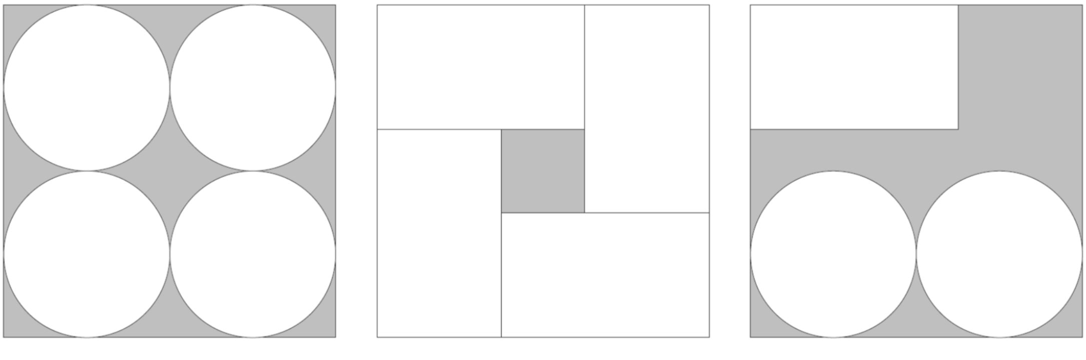
$$\max \quad \sum_{i=1}^{4}(p_i - c_i)x_i + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}(\mu_j - c_i)y_{ij}$$

Υπό:

$$\begin{aligned}
x_1 + y_{11} + y_{12} &\le a_1 \\
x_2 + y_{21} + y_{22} &\le a_2 \\
x_3 + y_{31} + y_{32} &\le a_3 \\
x_4 + y_{41} + y_{42} &\le a_4 \\
0{,}5y_{11} - 0{,}5y_{21} - 0{,}5y_{41} &= 0 \\
-0{,}3y_{11} + 0{,}7y_{21} - 0{,}3y_{41} &= 0 \\
0{,}6y_{12} - 0{,}4y_{22} - 0{,}4y_{32} &\le 0 \\
-0{,}2y_{12} + 0{,}8y_{22} - 0{,}2y_{32} &\ge 0 \\
-0{,}2y_{12} - 0{,}2y_{22} + 0{,}8y_{32} &\ge 0 \\
x_1, \dots, x_4, y_{ij} &\ge 0
\end{aligned}$$

Παράδειγμα κοπής

- 30 μεταλλικά φύλλα διαστάσεων 5×5m πρέπει να κοπούν για την κάλυψη παραγγελιών για 20 κυκλικά φύλλα διαμέτρου 2,5m (τύπος Τ1) και 15 φύλλα διαστάσεων 2×3m (τύπος Τ2)
- Δυνατότητες κοπής



Παράδειγμα κοπής

- Κόστη:
  - 2€/τεμάχιο για τον τύπο Τ1
  - 1,5€/τεμάχιο για τον τύπο Τ2
- Δυνατότητα αγοράς φύλλων
  - Τ1 προς 4,5€/τεμάχιο
  - Τ2 προς 3€/τεμάχιο
- Ελαχιστοποίηση του κόστους ώστε το αχρησιμοποίητο υλικό να μην υπερβαίνει το 30%

Παράδειγμα κοπής - Μοντελοποίηση

- Μεταβλητές απόφασης
  - $x_1, x_2, x_3 =$ φύλλα 5×5m που θα κοπούν με τους 3 τρόπους
  - $y_1, y_2 =$ ποσότητες φύλλων Τ1 & Τ2 που θα αγοραστούν
- Συνάρτηση κόστους

$$\text{Κόστος} = 8x_1 + 6x_2 + 5{,}5x_3 + 4{,}5y_1 + 3y_2$$

- Περιορισμοί
  - Ποσότητα φύλλων για κοπή: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$
  - Ζήτηση Τ1: $4x_1 + 2x_3 + y_1 \geq 20$
  - Ζήτηση Τ2: $4x_2 + x_3 + y_2 \geq 15$
  - Υπόλοιπο: $(0{,}215x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}367x_3)/(x_1 + x_2 + x_3) \leq 0{,}3$
  - Πεδίο ορισμού μεταβλητών: $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Παράδειγμα κοπής – Το ΓΠ

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\min & 8x_1 + & 6x_2 + & 5{,}5x_3 + 4{,}5y_1 + 3y_2 & & & \\
\text{Υπό:} & x_1 + & x_2 + & x_3 & & & \leq 30 \\
 & 4x_1 & + & 2x_3 + & y_1 & & \geq 20 \\
 & & 4x_2 + & x_3 & & + \; y_2 & \geq 15 \\
 & -0{,}085x_1 & - 0{,}26x_2 & + 0{,}067x_3 & & & \leq 0 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 & \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{array}
$$

Σχεδιασμός σε μέσα μεταφοράς

- Για μία νέα λεωφορειακή γραμμή έχει εκτιμηθεί ο ελάχιστος αριθμός λεωφορείων που απαιτούνται σε διάφορες περιόδους μίας ημέρας

24:00 – 04:00: 4 λεωφορεία	12:00 – 16:00: 7 λεωφορεία
04:00 – 08:00: 8 λεωφορεία	16:00 – 20:00: 12 λεωφορεία
08:00 – 12:00: 10 λεωφορεία	20:00 – 24:00: 4 λεωφορεία

- Δεδομένου ότι κάθε λεωφορείο λειτουργεί για 8 συνεχόμενες ώρες και στη συνέχεια επιστρέφει στο μηχανοστάσιο, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός λεωφορείων που απαιτούνται;

Σχεδιασμός σε μέσα μεταφοράς
Απλή μοντελοποίηση

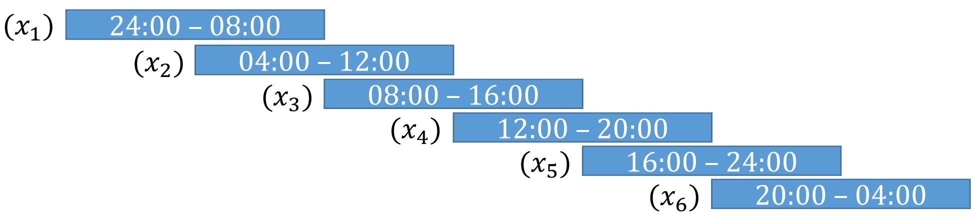
- Το 24ωρο χωρίζεται σε τρεις 8ωρες βάρδιες

24:00 – 08:00: $\geq$ 8 λεωφορεία
08:00 – 16:00: $\geq$ 10 λεωφορεία
16:00 – 24:00: $\geq$ 12 λεωφορεία

- Χρειάζονται 30 λεωφορεία

Σχεδιασμός σε μέσα μεταφοράς
Εναλλακτική μοντελοποίηση

- Έξι 8ωρες βάρδιες που ξεκινούν ανά 4 ώρες



- Πόσα λεωφορεία υπάρχουν σε κάθε περίοδο της ημέρας;

24:00 – 04:00: $x_1 + x_6$	12:00 – 16:00: $x_3 + x_4$
04:00 – 08:00: $x_1 + x_2$	16:00 – 20:00: $x_4 + x_5$
08:00 – 12:00: $x_2 + x_3$	20:00 – 24:00: $x_5 + x_6$

Σχεδιασμός σε μέσα μεταφοράς – το ΓΠ

$$
\begin{array}{lllll}
\min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & & \\
\text{Υπό:} & x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 & \geq & 4 & (24{:}00-04{:}00) \\
& x_1 + x_2 & \geq & 8 & (04{:}00-08{:}00) \\
& x_2 + x_3 & \geq & 10 & (08{:}00-12{:}00) \\
& x_3 + x_4 & \geq & 7 & (12{:}00-16{:}00) \\
& x_4 + x_5 & \geq & 12 & (16{:}00-20{:}00) \\
& x_5 + x_6 & \geq & 4 & (20{:}00-24{:}00) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} &
\end{array}
$$

Χρονικός προγραμματισμός εργασιών

- Για την ολοκλήρωση ενός έργου απαιτούνται n εργασίες (εργασία 1=έναρξη, εργασία n=ολοκλήρωση έργου)
- Είναι γνωστές οι διάρκειες $d_2, \dots, d_{n-1}$ των εργασιών ($d_1 = d_n = 0$)
- Για την έναρξη της εργασίας i απαιτείται η ολοκλήρωση ενός συνόλου (άμεσα προηγούμενων) εργασιών P_i
- Καθορισμός της στιγμής έναρξης των εργασιών έτσι ώστε το έργο να ολοκληρωθεί το δυνατόν συντομότερα

$$
\begin{array}{lll}
\min & t_n & \\
\text{Υπό:} & t_i - t_j \geq d_j & i = 2, \dots, n, j \in P_i \\
& t_i \geq 0 & i = 1, \dots, n
\end{array}
$$

Προγραμματισμός πτήσεων

- Προγραμματισμός άφιξης 5 πτήσεων (Π1, …, Π5) με συγκεκριμένη σειρά (πρώτα η Π1, μετά η Π2, …)
- Η πτήση i μπορεί να προσγειωθεί στο διάστημα $[\alpha_i, \beta_i]$
- Μεγιστοποίηση ελάχιστου κενού d μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

$$d = \min\{t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_4 - t_3, t_5 - t_4\}$$

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max\ \{\min\{t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_4 - t_3, t_5 - t_4\} \mid \alpha_i \leq t_i \leq \beta_i\ \}$$

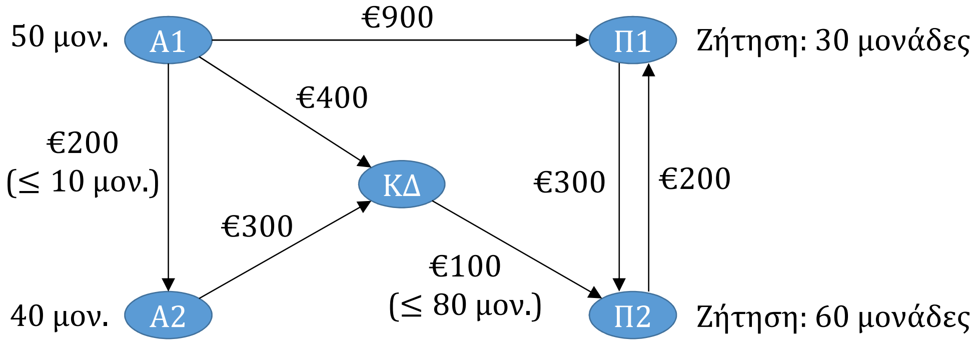
- Προβλήματα της μορφής max min ή min max μπορούν να διατυπωθούν ως ΓΠ

Προγραμματισμός πτήσεων – Το ΓΠ

$$\begin{array}{ll}
\max & d \\
\text{Υπό:} & t_2 - t_1 - d \geq 0 \\
 & t_3 - t_2 - d \geq 0 \\
 & t_4 - t_3 - d \geq 0 \\
 & t_5 - t_4 - d \geq 0 \\
 & \quad \alpha_i \leq t_i \leq \beta_i \quad i = 1, \dots, 5 \\
 & \qquad d \geq 0
\end{array}$$

Σχεδιασμός εφοδιαστικής αλυσίδας

- Ένα δίκτυο πωλήσεων περιλαμβάνει 2 κεντρικές αποθήκες (Α1, Α2), ένα κέντρο διανομής (ΚΔ) και 2 σημεία πώλησης (Π1, Π2)



- **Ερώτημα:** πώς θα καλυφθεί η ζήτηση στα σημεία πώλησης με το ελάχιστο κόστος;

Σχεδιασμός εφοδιαστικής αλυσίδας

- Μεταβλητές απόφασης
  - Ποσότητες μεταξύ των επιμέρους σημείων του δικτύου

$$x_{\mathrm{A1,A2}}, x_{\mathrm{A1,\Pi1}}, x_{\mathrm{A1,K\Delta}}, x_{\mathrm{A2,K\Delta}}, x_{\mathrm{K\Delta,\Pi2}}, x_{\mathrm{\Pi1,\Pi2}}, x_{\mathrm{\Pi2,\Pi1}}$$

- Αντικειμενική συνάρτηση (ελαχιστοποίηση κόστους)

$$\min \quad 2x_{\mathrm{A1,A2}} + 4x_{\mathrm{A1,K\Delta}} + 9x_{\mathrm{A1,\Pi1}} + 3x_{\mathrm{A2,K\Delta}} + x_{\mathrm{K\Delta,\Pi2}} + 3x_{\mathrm{\Pi1,\Pi2}} + 2x_{\mathrm{\Pi2,\Pi1}}$$

Σχεδιασμός εφοδιαστικής αλυσίδας

Περιορισμοί

- Ποσότητες που μεταφέρονται από τις κεντρικές αποθήκες

$$x_{\text{A1,A2}} + x_{\text{A1,KΔ}} + x_{\text{A1,Π1}} = 50$$
$$-x_{\text{A1,A2}} + x_{\text{A2,KΔ}} = 40$$

- Ισορροπία στο κέντρο διανομής

$$x_{\text{A1,KΔ}} + x_{\text{A2,KΔ}} - x_{\text{KΔ,Π2}} = 0$$

- Ποσότητες στα σημεία πώλησης

$$x_{\text{A1,Π1}} - x_{\text{Π1,Π2}} + x_{\text{Π2,Π1}} = 30$$
$$x_{\text{KΔ,Π2}} + x_{\text{Π1,Π2}} - x_{\text{Π2,Π1}} = 60$$

- Όρια στις συνδέσεις Α1⟶ Α2 και ΚΔ ⟶ Π2

$$x_{\text{A1,A2}} \leq 10 \qquad x_{\text{KΔ,Π2}} \leq 80$$

Σχεδιασμός εφοδιαστικής αλυσίδας – Το ΓΠ

$$\begin{array}{llcccccccl}
\min & 2x_{\text{A1,A2}} + 4x_{\text{A1,KΔ}} + 9x_{\text{A1,Π1}} + 3x_{\text{A2,KΔ}} + x_{\text{KΔ,Π2}} + 3x_{\text{Π1,Π2}} + 2x_{\text{Π2,Π1}} & & & & & & & & \\
\text{Υπό:} & x_{\text{A1,A2}} + & x_{\text{A1,KΔ}} + & x_{\text{A1,Π1}} & & & & & & = 50 \\
 & -\ x_{\text{A1,A2}} & & & + \ x_{\text{A2,KΔ}} & & & & & = 40 \\
 & & x_{\text{A1,KΔ}} & & + \ x_{\text{A2,KΔ}} & - x_{\text{KΔ,Π2}} & & & & = 0 \\
 & & & x_{\text{A1,Π1}} & & & - \ x_{\text{Π1,Π2}} & + \ x_{\text{Π2,Π1}} & & = 30 \\
 & & & & & x_{\text{KΔ,Π2}} & + \ x_{\text{Π1,Π2}} & - \ x_{\text{Π2,Π1}} & & = 60 \\
 & x_{\text{A1,A2}} & & & & & & & & \leq 10 \\
 & & & & & x_{\text{KΔ,Π2}} & & & & \leq 80 \\
 & x_{\text{A1,A2}} & x_{\text{A1,KΔ}} & x_{\text{A1,Π1}} & x_{\text{A2,KΔ}} & x_{\text{KΔ,Π2}} & x_{\text{Π1,Π2}} & x_{\text{Π2,Π1}} & & \geq 0
\end{array}$$

Προγραμματισμός παραγωγής Ι

- Πρέπει να γίνει ο προγραμματισμός παραγωγής ενός προϊόντος για τους επόμενους έξι μήνες με βάση τα ακόλουθα στοιχεία

	Μήνας 1	Μήνας 2	Μήνας 3	Μήνας 4	Μήνας 5	Μήνας 6
Μοναδιαίο κόστος (u_t)	240	250	265	285	280	260
Ζήτηση (r_t)	1000	4500	6000	5500	3500	4000
Μέγιστη παραγωγή (d_t)	4000	3500	4000	4500	4000	3500
Ελάχιστη παραγωγή (z_t)	2000	1750	2000	2250	2000	1750

- Όρια αποθέματος στο τέλος κάθε μήνα: [1500, 6000] μονάδες
- Κόστος αποθεματοποίησης: $h = 4$€/μονάδα (μέσο απόθεμα)
- Αυτή τη στιγμή υπάρχουν διαθέσιμες 2750 μονάδες ως απόθεμα

Προγραμματισμός παραγωγής Ι - Μοντέλο

- Μεταβλητές απόφασης:
  - $x_1, \dots, x_6 =$ ποσότητα παραγωγής σε κάθε μήνα
  - $I_1, \dots, I_6 =$ απόθεμα στο τέλος του κάθε μήνα ($I_0 = 2750$)
- Αντικειμενική συνάρτηση = ελαχιστοποίηση κόστους
  - Κόστος = κόστος παραγωγής + κόστος αποθεματοποίησης

$$\sum_{t=1}^{6} u_t x_t \qquad + \qquad \sum_{t=1}^{6} h(I_{t-1} + I_t)/2$$

$$= 240x_1 + 250x_2 + 265x_3 + 285x_4 + 280x_5 + 260x_6$$
$$+4\frac{2750 + I_1}{2} + 4\frac{I_1 + I_2}{2} + 4\frac{I_2 + I_3}{2} + 4\frac{I_3 + I_4}{2} + 4\frac{I_4 + I_5}{2} + 4\frac{I_5 + I_6}{2}$$
$$= 240x_1 + 250x_2 + 265x_3 + 285x_4 + 280x_5 + 260x_6 + 4I_1 + 4I_2 + 4I_3 + 4I_4 + 4I_5 + 2I_6 + 5500$$

Προγραμματισμός παραγωγής Ι - Μοντέλο

- Περιορισμοί ορίων παραγωγής (12 περιορισμοί ορίων)

$$z_t \leq x_t \leq d_t, \text{ για } t = 1, \dots, 6$$

- Περιορισμοί ορίων τελικού αποθέματος (12 περιορισμοί ορίων)

$$1500 \leq I_t \leq 6000, \text{ για } t = 1, \dots, 6$$

- Σχέση παραγωγής-ζήτησης-αποθέματος (6 περιορισμοί)

$$x_t + I_{t-1} - I_t = r_t, \text{ για } t = 1, \dots, 6$$

Προγραμματισμός παραγωγής Ι – Το ΓΠ

$$
\begin{array}{lll}
\min & 240x_1 + 250x_2 + 265x_3 + 285x_4 + 280x_5 + 260x_6 & \\
 & \quad +4I_1 + 4I_2 + 4I_3 + 4I_4 + 4I_5 + 2I_6 + 5500 & \\
\text{Υπό:} & x_1 - I_1 = -1750 & \\
 & x_2 + I_1 - I_2 = 4500 & \\
 & x_3 + I_2 - I_3 = 6000 & \\
 & x_4 + I_3 - I_4 = 5500 & \\
 & x_5 + I_4 - I_5 = 3500 & \\
 & x_6 + I_5 - I_6 = 4000 & \\
 & x_t \geq z_t & \forall t = 1, \dots, 6 \\
 & x_t \leq d_t & \forall t = 1, \dots, 6 \\
 & I_t \geq 1500 & \forall t = 1, \dots, 6 \\
 & I_t \leq 6000 & \forall t = 1, \dots, 6
\end{array}
$$

Προγραμματισμός παραγωγής ΙΙ

- Συμπληρωματικά των στοιχείων του προηγούμενου παραδείγματος, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η επίδραση στο κόστος που έχουν οι μεταβολές στη μηνιαία παραγωγή
  - Το μοναδιαίο κόστος αύξησης της παραγωγής κάθε μήνα t σε σχέση με τον προηγούμενο μήνα $t-1$ είναι €200
  - Το μοναδιαίο κόστος μείωσης της παραγωγής κάθε μήνα t σε σχέση με τον προηγούμενο μήνα $t-1$ είναι €400
- Ο υπολογισμός του κόστους λαμβάνοντας υπόψη αυτό το στοιχείο απαιτεί την εισαγωγή επιπλέον μεταβλητών απόφασης
  - y_t^+: επιπλέον ποσότητα που παράγεται το μήνα t (σε σχέση με τον $t-1$)
  - y_t^-: μείωση της παραγωγής το μήνα t (σε σχέση με τον $t-1$)

Προγραμματισμός παραγωγής ΙΙ

- Οι μεταβλητές απόφασης y_t^+, y_t^- συνδέονται με τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_6$ που αφορούν τις ποσότητες παραγωγής

$$(\text{Ποσότητα})_t + (\text{Μείωση})_t - (\text{Αύξηση})_t = (\text{Ποσότητα})_{t-1}$$

$$\begin{aligned} x_2 + y_2^- - y_2^+ &= x_1 \\ x_3 + y_3^- - y_3^+ &= x_2 \\ x_4 + y_4^- - y_4^+ &= x_3 \\ x_5 + y_5^- - y_5^+ &= x_4 \\ x_6 + y_6^- - y_6^+ &= x_5 \end{aligned}$$

Προγραμματισμός παραγωγής ΙΙ – Το ΓΠ

$$
\begin{array}{ll}
\min & 240x_1 + 250x_2 + 265x_3 + 285x_4 + 280x_5 + 260x_6 \\
& +4I_1 + 4I_2 + 4I_3 + 4I_4 + 4I_5 + 2I_6 + 5500 \\
& +200(y_2^+ + y_3^+ + y_4^+ + y_5^+ + y_6^+) \\
& +400(y_2^- + y_3^- + y_4^- + y_5^- + y_6^-)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{Υπό:} & x_1 - I_1 = -1750 & & -x_1 + x_2 + y_2^- - y_2^+ = 0 \\
& x_2 + I_1 - I_2 = 4500 & & -x_2 + x_3 + y_3^- - y_3^+ = 0 \\
& x_3 + I_2 - I_3 = 6000 & & -x_3 + x_4 + y_4^- - y_4^+ = 0 \\
& x_4 + I_3 - I_4 = 5500 & & -x_4 + x_5 + y_5^- - y_5^+ = 0 \\
& x_5 + I_4 - I_5 = 3500 & & -x_5 + x_6 + y_6^- - y_6^+ = 0 \\
& x_6 + I_5 - I_6 = 4000 & & \\
& z_t \le x_t \le d_t & \forall t = 1, \dots, 6 & \\
& 1500 \le I_t \le 6000 & \forall t = 1, \dots, 6 &
\end{array}
$$

Γραμμική παλινδρόμηση

- Για τη μελέτη της σχέσης μεταξύ ενός μεγέθους y (εξαρτημένη μεταβλητή) και ενός συνόλου ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, \dots, x_n$ χρησιμοποιείται ένα γραμμικό μοντέλο εκτίμησης/πρόβλεψης
$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n, \text{ με } \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$$
- Η ανάπτυξη του μοντέλου βασίζεται σε ένα σύνολο m παρατηρήσεων της μορφής $\{\mathbf{x}_i, y_i\}$
  - $y_i =$ τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με τα διαθέσιμα στοιχεία στο διάνυσμα $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$
- **Ερώτημα:** Να βρεθεί οι παράμετροι του μοντέλου $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ έτσι ώστε $\hat{y}_i \approx y_i$, για κάθε i

Γραμμική παλινδρόμηση - Παράδειγμα

Ακίνητα	Εμβ. (x_1)	Ηλικία (x_2)	Αντ. αξία (x_3)	Τιμή (y)
Α1	123	13	77	205
Α2	123	6	50	215
Α3	135	3	46	215
Α4	119	4	71	199
Α5	128	2	80	170
Α6	90	1	100	160

$$\text{Εκτίμηση τιμής } (\hat{y}) \approx \beta_0 + \beta_1(\text{Εμβ.}) + \beta_2(\text{Ηλικία}) + \beta_3(\text{Αντ. αξία})$$

Γραμμική παλινδρόμηση – Μοντελοποίηση

- Ελαχιστοποίηση συνολικού απόλυτου σφάλματος

$$\sum_{i=1}^{m} |\hat{y}_i - y_i| = \sum_{i=1}^{m} |(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots b_n x_n) - y_i|$$

- Η απόλυτη τιμή δεν είναι γραμμική συνάρτηση, αλλά το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί σε ισοδύναμη γραμμική μορφή
  - Εάν $\hat{y}_i < y_i$, τότε υποεκτίμηση $\sigma_i^+ = y_i - \hat{y}_i$, διαφορετικά $\sigma_i^+ = 0$
  - Εάν $\hat{y}_i > y_i$, τότε υπερεκτίμηση $\sigma_i^- = \hat{y}_i - y_i$, διαφορετικά $\sigma_i^- = 0$
- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\min \sum_{i=1}^{m} |\hat{y}_i - y_i| = \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i^+ + \sigma_i^-)$$

Γραμμική παλινδρόμηση – Το ΓΠ

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i^+ + \sigma_i^-)$$

$$\text{Υπό:} \quad \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_n x_{in} + \sigma_i^+ - \sigma_i^- = y_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}, \;\; \sigma_i^+, \sigma_i^- \geq 0$$

Γραμμική παλινδρόμηση - Παράδειγμα

Ακίνητα	Εμβ.	Ηλικία	Αντ. αξία	Τιμή
Α1	123	13	77	205
Α2	123	6	50	215
Α3	135	3	46	215
Α4	119	4	71	199
Α5	128	2	80	170
Α6	90	1	100	160

$$\min \quad \sum_{i=1}^{6} (\sigma_i^+ + \sigma_i^-)$$

$$\begin{aligned}
\text{Υπό:} \quad & \beta_0 + 123\beta_1 + 13\beta_2 + 77\beta_3 + \sigma_1^+ - \sigma_1^- = 205 \\
& \beta_0 + 123\beta_2 + 6\beta_2 + 50\beta_3 + \sigma_2^+ - \sigma_2^- = 215 \\
& \beta_0 + 135\beta_1 + 3\beta_2 + 46\beta_3 + \sigma_3^+ - \sigma_3^- = 215 \\
& \beta_0 + 119\beta_1 + 4\beta_2 + 71\beta_3 + \sigma_4^+ - \sigma_4^- = 199 \\
& \beta_0 + 128\beta_1 + 2\beta_2 + 80\beta_3 + \sigma_5^+ - \sigma_5^- = 170 \\
& \beta_0 + 90\beta_1 + \beta_2 + 100\beta_3 + \sigma_6^+ - \sigma_6^- = 160 \\
& \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}, \;\; \sigma_i^+, \sigma_i^- \geq 0
\end{aligned}$$