ΑΣΚΗΣΗ Α.1

1) X_1= εκτάρια καπνού
X_2= » ρυζιού

Το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$\max z = 300x_1 + 520x_2$

υπ: $x_1 + x_2 \leq 410$ (διαθέσιμη έκταση) –Π1

$105x_1 + 210x_2 \leq 52.500$ (προϋπολογισμός) –Π2

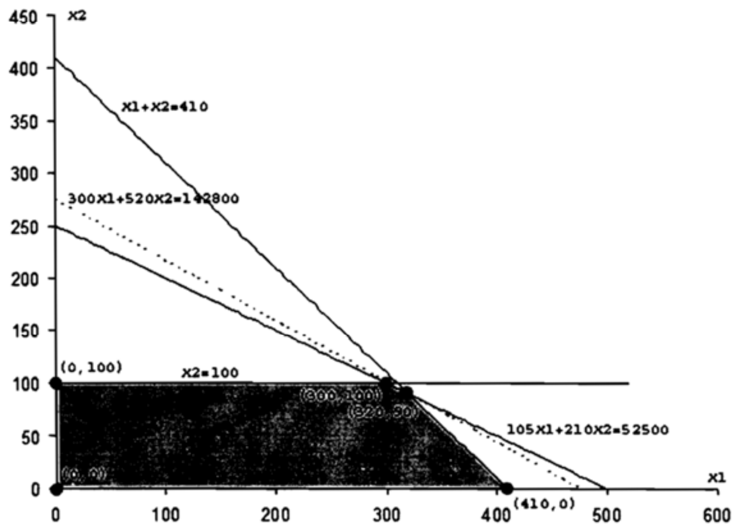
$x_2 \leq 100$ (μέγιστη έκταση ρυζιού) –Π3

Για τον Π1: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 410$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 410$

Για τον Π2: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 250$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 500$

Το σημείο τομής των Π1 και Π2 βρίσκεται ως εξής:

Από τον Π1: $x_1 + x_2 = 410 \Rightarrow x_1 = 410 - x_2$
Αντικαθιστώντας στον Π2: $x_2 = 90$
$\Rightarrow x_1 = 320$, $x_2 = 90$



Η αντικειμενική συνάρτηση στα σημεία Α–Ε είναι: (2)

$Z_A = 0$

$Z_B = 300 \cdot 410 + 520 \cdot 0 = 123.000$

$Z_\Gamma = 300 \cdot 320 + 520 \cdot 90 = 142.800$

$Z_\Delta = 300 \cdot 300 + 520 \cdot 100 = 142.000$

$Z_E = 300 \cdot 0 + 520 \cdot 100 = 52.000$

Άρα η βέλτιστη λύση είναι στο σημείο Δ (320, 90) με μέγιστο κέρδος 142.800€

2) (α) Οι x_1 και x_2 είναι βασικές, άρα:

$$K\Phi_1 = c_1 + \max_{\substack{y_{1j}>0 \\ j\notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = 300 + \left(\frac{-80}{2}\right) = 260$$

$$A\Phi_1 = c_1 + \min_{\substack{y_{1j}<0 \\ j\notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = 300 + \left(\frac{-2{,}09}{-0{,}0095}\right) = 520$$

$$K\Phi_2 = c_2 + \max_{\substack{y_{2j}>0 \\ j\notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{2j}} \right\} = 520 + \left(\frac{-2{,}09}{0{,}0095}\right) = 300$$

$$A\Phi_2 = c_2 + \min_{\substack{y_{2j}<0 \\ j\notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{2j}} \right\} = 520 + \left(\frac{-80}{-1}\right) = 600$$

Άρα: $c_1 \in [260, 520]$ και $c_2 \in [300, 600]$

(β) Οι δυϊκές τιμές του περιορισμού Π1 και Π2 είναι

Π1 (έκταση) = 80

Π2 (προϋπολογισμός) = 2,09

Αφού μια μονάδα έκτασης αξίζει περισσότερο από μια μονάδα των διαθέσιμων κεφαλαίων έμφαση πρέπει να δοθεί στην αύξηση της έκτασης

(γ) Η δυϊκή τιμή του Π1 (έκταση) είναι 80€. Άρα ένα εκτάριο ισοδυναμεί με 80€ κέρδους. Άρα η αγορά επιπλέον έκτασης προς 100€ δε συμφέρει.

(δ) Αλλάζει το β' μέλος του Π1 σε 360. Ο βέλτιστος πίνακας του δυϊκού είναι:

		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$		
-360	1	1	0	-1	-2	1	80	
-52500	2	0	1	0,0095	0,0095	-0,0095	2,09	220 →
		-360	-52500	-100	0	0		
		0	0	38,75	-221,25	-138,75		
				↑				

-360	1	1	105,26	0	-1	0	300
-100	3	0	105,26	1	0	-1	200
		-360	-52500	-100	0	0	
		0	-4080,4	0	-260	-100	

Άρα με βάση αυτή τη βέλτιστη λύση του δυϊκού, η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος είναι $x_1 = 260$, $x_2 = 100$ με κέρδος = 130000€

ΑΣΚΗΣΗ Α.3

1) max $90x_A + 160x_B + 40x_\Gamma + 100x_\Delta$

υπ. $2x_A + 8x_B + 4x_\Gamma + 2x_\Delta \leq 480$ (συναρ.)

$5x_A + 4x_B + 8x_\Gamma + 5x_\Delta \leq 800$ (γυάλισμ.)

$7x_A + 8x_B + 3x_\Gamma + 5x_\Delta \leq 900$ (κοπή)

$x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta \geq 0$

2)

c_B	Βάση	x_A	x_B	x_Γ	x_Δ	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
0	$\bar{1}$	2	8	4	2	1	0	0	480 →
0	$\bar{2}$	5	4	8	5	0	1	0	800
0	$\bar{3}$	7	8	3	5	0	0	1	900
	c	90	160	40	100	0	0	0	
	$\bar{c}$	90	160 ↑	40	100	0	0	0	$z=0$

Το οδηγό στοιχείο είναι το 8 (εισέρχεται η x_B και εξέρχεται

3) Το ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών είναι:

$\bar{c}(x_A) = -10$, $\bar{c}(x_\Gamma) = -130$, $\bar{c}_{\bar{1}} = -12{,}5$ και $\bar{c}_{\bar{2}} = -15$

Άρα η λύση είναι βέλτιστη

Αφού βασικές μεταβλητές είναι οι $x_B, x_\Delta, \bar{3}$ η βάση είναι:

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ με αντίστροφο } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.15625 & -0.0625 & 0 \\ -0.125 & 0.25 & 0 \\ -0.625 & -0.75 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Οι τιμές των δυϊκών μεταβλητών αντιστοιχούν στα $\bar{c}_{\bar{1}}, \bar{c}_{\bar{2}}, \bar{c}_{\bar{3}}$

$u_1 = 12{,}5$ $u_2 = 15$ και $u_3 = 0$

5) Θα πρέπει το μοναδιαίο κέρδος c_Γ να είναι τέτοιο ώστε η

εισαχθεί στη βάση, δηλαδή πρέπει:

$\bar{c}(x_\Gamma) \geq 0 \Rightarrow c_\Gamma \geq 170$

6) Θα πρέπει να εισαχθεί μια νέα μεταβλητή x_E με συντελεστή 1º περ., 3 στον 2º και 20º στον τρίτο.

Η νέα στήλη που εισάγεται στον πίνακα simplex του ερωτήματος είναι:

$$y_\Gamma = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.5 \\ 16.5 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.5

α) x= εργατοώρες που θα καλυφθούν από μόνιμο προσωπικό
y_i = " " " " " έκτακτο " το μήνα i

Z= κόστος για όλο το τρίμηνο

Οι τρεις περιορισμοί διασφαλίζουν ότι θα προσληφθεί επαρκές προσωπικό ώστε να καλυφθούν οι απαιτούμενες εργατοώρες κάθε μήνα

β) Αν $x \geq a_i$ τότε $y_i=0$ γιατί τα y συμμετέχουν στην αντικειμενική συνάρτηση

Έτσι η λύση $x \geq a_i$ και $y_i>0$ έχει κόστος z_1 ενώ η λύση $x \geq a_i$ και $y_i=0$ έχει κόστος $z_2<z_1$. Αφού και οι δύο λύσεις είναι εφικτές, η πρώτη ($x \geq a_i$, $y_i>0$) δεν μπορεί να είναι βέλτιστη.

γ) $$\max \; z=-52{,}5x-25y_1-25y_2-25y_3$$

υπ.

$$-x-y_1 \leq -390$$
$$-x-y_2 \leq -420$$
$$-x-y_3 \leq -340$$
$$x, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Διαμορφώνεται ο πρώτος πίνακας simplex:

C_B	Βάση	x	y_1	y_2	y_3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	X_B
0	$\bar{1}$	-1	-1	0	0	1	0	0	-390
0	$\bar{2}$	-1	0	-1	0	0	1	0	-420
0	$\bar{3}$	-1	0	0	-1	0	0	1	-340
		-52,5	-25	-25	-25	0	0	0	
		-52,5	-25	-25	-25	0	0	0	$Z=0$

Η λύση αυτή δεν είναι εφικτή στο πρωτεύον αλλά είναι εφικτή στο δυϊκό, οπότε εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος simplex με την εξαγωγή της $\bar{2}$ και την εισαγωγή της y_2:

C_B	Βάση	x	y_1	y_2	y_3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	X_B
0	$\bar{1}$	-1	-1	0	0	1	0	0	-390 →
-25	y_2	1	0	1	0	0	-1	0	420
0	$\bar{3}$	-1	0	0	-1	0	0	1	-340
		-52,5	-25	-25	-25	0	0	0	
		-27,5	-25 ↑	0	-25	0	-25	0	$Z=-10500$

ΑΣΚΗΣΗ Α.7

α) $e_t^+ = \max\{0, w_1 x_{1t} + w_2 x_{2t} - y_t\}$ = σφάλμα υπερεκτίμησης

$\varepsilon_t^+ = \max\{0, y_t - w_1 x_{1t} + w_2 x_{2t}\}$ = " υποεκτίμησης

Η αντικειμενική μετρά το συνολικό σφάλμα για τις τρεις περιόδους

Κάθε περιορισμός είναι της μορφής:

πρόβλεψη + σφάλμα = πωλήσεις

β) Οι $\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^+, \varepsilon_3^+$

γ)

c_B	Βάση	w_1	w_2	ε_1^+	ε_1^-	ε_2^+	ε_2^-	ε_3^+	ε_3^-	x_B
-1	ε_1^+	-0.25	0	1	-1	0	0	-0.75	0.75	25
-1	ε_2^+	0.75	0	0	0	1	-1	-0.75	0.75	275
0	w_2	0.75	1	0	0	0	0	0.25	-0.25	325
		0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
		0.5	0	0	-2	0	-2	-2.5	0.5	-300

Η λύση δεν είναι βέλτιστη, γιατί $\bar{c}_{w_1}, \bar{c}_{\varepsilon_3^-} > 0$

Έστω ότι εισάγεται η w_1, τότε εξέρχεται η ε_2^+ και:

1. Διαιρείται η γραμμή 2 με 0.75
2. Η νέα γραμμή 2 πολλαπλασιάζεται με 0.25 και προστίθεται στην 1η
3. Η νέα γραμμή 2 πολλαπλασιάζεται με -0.75 και προστίθεται στην 3η

δ) $$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.75 \\ 0 & 1 & -0.75 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

ε) $\min\ 1000u_1 + 1250u_2 + 1300u_3$

υπ. $2u_1 + 3u_2 + 3u_3 \geq 0$

$3u_1 + 3u_2 + 4u_3 \geq 0$

$-1 \leq u_i \leq 1$

$u_i \in \mathbb{R}$

6τ) Έστω ότι $\varepsilon_t^+ \varepsilon_t^- > 0$, δηλαδή $\varepsilon_t^+ > 0$ και $\varepsilon_t^- > 0$.
Τότε από τη συμπληρωματική χαλαρότητα θα έπρεπε οι μεταβλητές απόκλισης των αντίστοιχων δυϊκών περιορισμών να είναι μηδέν:

$u_t = 1$ και $u_t = -1$

Προφανώς αυτό είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ Α.8

α) $c_3 = 30$, άρα η παραγωγή 10 τεχαχίων τύπου 3 αποφέρει κέρδος 300 €. Η παραγωγή αυτή απαιτεί 100 ανθρωποώρες από το 1º στάδιο (γιατί $a_{13} = 10$), 40 ανθρωποώρες από το 2º (γιατί $a_{23} = 4$) και 10 ανθρωποώρες από το 3º (γιατί $a_{33} = 1$)

β) Ο πλήρης πίνακας simplex είναι:

c_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
14	2	0	1	11	19	1.5	-1	0	200
8	1	1	0	-12	-22	-2	2	0	400
0	$\bar{3}$	0	0	0.4	1.6	0.1	-0.4	1	20
	c	8	14	30	50	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	6000

όπου: $x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 800 \\ 1000 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix}$

Προφανώς αφού δεν υπάρχει θετικό ΟΚΕ η λύση είναι βέλτιστη

γ) Θα πρέπει η x_3 να εισαχθεί στη βάση. Δηλαδή:

$\bar{c}_3 = c_3 - 58 \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 58$

Στην περίπτωση αυτή εισέρχεται η x_3 στη θέση της x_2. Οδηγό στοιχείο είναι το $y_{23} = 11$ και γίνονται τα εξής:

- Η 1η γραμμή διαιρείται με 11 (1)
- Το αποτέλεσμα του (1) πολλαπλασιάζεται με 12 και προστίθεται στην 2η γραμμή
- Το αποτέλεσμα του (1) πολλαπλασιάζεται με -0.4 και προστίθεται στην 3η γραμμή

δ) Ναι γιατί η δυϊκή μεταβλητή $u_1 = 5$

ε) Το κάτω φράγμα είναι

$$Κ\Phi_1 = 800 + \max\left\{\frac{-200}{1,5}, \frac{-20}{0.1}\right\} = 666,667 \quad (\text{μείωση κατά } \lambda = 133,333)$$

Αντίστοιχα το άνω φράγμα είναι:

$$Α\Phi_1 = 800 + \min\left\{\frac{-400}{-2}\right\} = 1000 \quad (\text{αύξηση κατά } \lambda = 200)$$

Στο ΚΦ οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$x_B' = x_B + \lambda y_{\bar{1}} = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix} + (-133,333)\begin{bmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 666.67 \\ 6.67 \end{bmatrix}$$

Άρα η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$z' = c_B^T x_B' = 5333,33$$

Αντίστοιχα στο ΑΦ οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$x_B' = x_B + \lambda y_{\bar{1}} = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix} + 200\begin{bmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$$

και η νέα τιμή της αντικειμενικής είναι

$$z' = 7000$$

6τ) Ο πλήρης πίνακας simplex είναι:

c_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	x_B
14	2	0	1	11	19	1.5	-1	0	0	200
8	1	1	0	-12	-22	-2	2	0	0	400
0	$\bar{3}$	0	0	0.4	1.6	0.1	-0.4	1	0	20
0	$\bar{4}$	0	0	4	6	0.5	1	0	1	-100
	c	8	14	30	50	0	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	0	-28	-40	-5	-2	0	0	6000

Η λύση αυτή δεν είναι εφικτή στο πρωτεύον αλλά είναι εφικτή στο δυϊκό. Εφαρμόζεται λοιπόν ο δυϊκός αλγόριθμος. Εξερχόμενη μεταβλητή είναι η $\bar{4}$. Όμως $y_{\bar{4}j} \geq 0$ για όλες τις μη βασικές μεταβλητές j. Άρα το δυϊκό δεν είναι φραγμένο και επομένως το πρωτεύον είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ Α.10

α) Αφού δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές, το πρόβλημα είναι εφικτό.
Ο πίνακας της φάσης II είναι:

C_B	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	x_B
−30	2	1	1	1	0	0	1
0	$\bar{1}$	3	0	4	1	0	2 →
0	$\bar{2}$	1	0	1	0	1	1
	c	−28	−30	−20	0	0	
	$\bar{c}$	2	0	10 ↑	0	0	−30

β) Εισάγοντας την 3 και εξάγοντας την $\bar{1}$ ο νέος πίνακας είναι:

C_B	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	x_B
−30	2	0.25	1	0	−0.25	0	0.5
−20	3	0.75	0	1	0.25	0	0.5
0	$\bar{2}$	0.25	0	0	−0.25	1	0.5
	c	−28	−30	−20	0	0	
	$\bar{c}$	−5.5	0	0	−2.5	0	−25

γ) $K\Phi = \max\left\{3 - \frac{0.5}{0.25}\right\} = 1 \quad A\Phi = \min\left\{3 - \frac{0.5}{-0.25}, 3 - \frac{0.5}{-0.25}\right\} = 5$

δ) Το ΟΚΕ της $\bar{1}$ είναι −2.5. Άρα $u_1 = 2.5$ (δυϊκή μεταβλητή 1ου περιορισμού). Επομένως αύξηση του β' μέλους κατά $\varepsilon > 0$ συμβαίνει αύξηση της αντικειμενικής κατά 2.5ε.
Για τον 2ο περιορισμό δεν θα υπάρξει καμία αλλαγή, γιατί $\bar{c}_{\bar{2}} = 0$

ε) Θα πρέπει να βρεθούν τα νέα x_B:

$$x'_B = x_B + \lambda y_{\bar{1}} = \begin{bmatrix} 1.125 \\ -0.125 \\ 1.125 \end{bmatrix}$$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:

c_B	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	x_B
-30	2	0.25	1	0	-0.25	0	1.125
-20	3	0.75	0	1	0.25	0	-0.125
0	$\bar{2}$	0.25	0	0	-0.25	1	1.125
	c	-28	-30	-20	0	0	
	$\bar{c}$	-5.5	0	0	-2.5	0	-31.25

Αφού $\bar{c} \leq 0$ και υπάρχει $x_B < 0$ εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος. Εξάγεται η 3, αλλά δεν υπάρχει μεταβλητή για να εισαχθεί, οπότε το νέο ΓΠ είναι αδύνατο

ΑΣΚΗΣΗ Α.11

α) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

c_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B	
0	$\bar{1}$	0	0	1	-5	2	5	→
3	2	0	1	0	2	-1	2	
2	1	1	0	0	-1	1	4	
	c	2	3	0	0	0		
	$\bar{c}$	0	0	0	-4	1	14	
						↑		

c_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
0	$\bar{3}$	0	0	0.5	-2.5	1	2.5
3	2	0	1	0.5	-0.5	0	4.5
2	1	1	0	-0.5	1.5	0	1.5
	c	2	3	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	0	-0.5	-1.5	0	16.5

β) Αφού $\bar{c}_{\bar{1}} = -0.5$, τότε $u_1 = 0.5$. Άρα θα πλήρωνε έως 0.5 νομισμ. μονάδες/τόνο.

Το ΑΦ του b_1 είναι:

$$A\Phi = 15 + \min\left\{\frac{-1.5}{-0.5}\right\} = 18$$

Άρα θα μπορούσε να αγοράσει 3 τόνους

Η αύξηση του κέρδους είναι (3 τόνοι)$\times u_1 = 1.5$

<u>Εναλλακτικά</u>: $x_B' = x_B + \lambda y_{\bar{1}} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 4.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Το νέο κέρδος είναι:

$$c_B^T x_B' = 18$$

Δηλαδή αύξηση κατά 1.5

γ)

b_B	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	u_B
-15	1	1	0	-0.5	0.5	-0.5	0.5
-6	2	0	1	2.5	-1.5	0.5	1.5
	b	-15	-6	-10	0	0	
	$\bar{b}$	0	0	-2.5	-1.5	-4.5	-16.5

δ) $y_3 = B^{-1} \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

Άρα ο νέος πίνακας είναι:

c_B	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
0	$\bar{3}$	0	0	-2	0.5	-2.5	1	2.5
3	2	0	1	0.5	0.5	-0.5	0	4.5
2	1	1	0	1.5	-0.5	1.5	0	1.5
	c	2	3	4.2	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	0	-0.3	-0.5	-1.5	0	16.5

Αφού $\bar{c} \leq 0$, η λύση παραμένει βέλτιστη

ΑΣΚΗΣΗ Α.12

α) max $3x_1 + 3x_2 + 5x_3$

υπ: $1.2x_1 + 1.7x_2 + 1.2x_3 \leq 1000$

$0.8x_1 + 2.3x_3 \leq 1200$

$2x_1 + 3x_2 + 4.5x_3 \leq 2000$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

β) Εισάγεται η 1 στη θέση της $\bar{1}$:

c_B	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
3	1	1	1.35	0	1.5	0	-0.4	700
0	$\bar{2}$	0	-1.23	0	0.33	1	-0.6	333.33
5	3	0	0.07	1	-0.67	0	0.4	133.33
		3	3	5	0	0	0	
		0	-1.38	0	-1.17	0	-0.8	2766.67

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -0.4 \\ 0.33 & 1 & -0.6 \\ -0.67 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

γ) Ναι γιατί $u_3 = 0.8 > 0.5$

$$A\Phi(b_3) = 2000 + \min\left\{-\frac{700}{-0.4},\ -\frac{333.33}{-0.6}\right\} = 2555{,}56$$

Άρα μπορούν να αγοραστούν έως 555,56 επιπλέον μονάδες

Αν αγοραστούν 500 επιπλέον μονάδες το κέρδος θα αυξηθεί κατά $500 \times 0{,}8 = 400$, δηλαδή θα γίνει 3166.67

δ) Εισάγεται η μεταβλητή x_4. Οι συντελεστές της στους περιορισμούς είναι:

$$a_4 = \begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 2.18 \\ 0.32 \\ -0.68 \end{bmatrix}$$

Για να συμφέρει πρέπει

$$\bar{c}_4 \geq 0 \Rightarrow c_4 - [3\ 0\ 5]\begin{bmatrix} 2.18 \\ 0.32 \\ -0.68 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow c_4 \geq 3.14$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.13

1) Μεταβλητές απόφασης

   x_1: ποσότητα υλικού Α που χρησιμοποιείται στην παραγωγή
   x_2: ποσότητα υλικού Β που χρησιμοποιείται στην παραγωγή
   x_3: ποσότητα υλικού Γ που χρησιμοποιείται στην παραγωγή

   Το γραμμικό πρόγραμμα είναι

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 + 1.5x_2 + x_3 \\
\text{Υπ.} & x_1 \geq 200 \\
 & x_2 \geq 400 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 2000 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

2) Ο αρχικός πίνακας είναι

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
-M	$\bar{\bar{1}}$	1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-M	$\bar{\bar{2}}$	0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-M	$\bar{\bar{3}}$	1	1	1	0	0	0	0	1	2000
	$\mathbf{c}$	-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$	-2 +2M	-1.5 +2M	-1 +M	-M	-M	0	0	0	-2600M

   Εισάγεται η 2 στη θέση της $\bar{\bar{2}}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
-M	$\bar{\bar{1}}$	1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-1.5	2	0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-M	$\bar{\bar{3}}$	1	0	1	0	1	0	-1	1	1600
	$\mathbf{c}$	-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$	-2 +2M	0	-1 +M	-M	-1.5 +M	0	1.5	0	-600 -2000M

   Εισάγεται η 1 στη θέση της $\bar{\bar{1}}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
-2	1	1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-1.5	2	0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-M	$\bar{\bar{3}}$	0	0	1	1	1	-1	-1	1	1400
	$\mathbf{c}$	-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
	$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-1 +M	-2 +M	-1.5 +M	2	1.5	0	-1000 -1400M

Εισάγεται η 3 στη θέση της $\bar{\bar{3}}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
-2	1		1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-1.5	2		0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-1	3		0	0	1	1	1	-1	-1	1	1400
		$\mathbf{c}$	-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	-1	-0.5	1 -M	0.5 -M	1 -M	-2400

3) Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται κάτω από τις τρεις τεχνητές μεταβλητές:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι: $(u_1, u_2, u_3) = (-1, -0.5, -1)$

4) Τα φράγματα είναι:

$$\text{ΚΦ}(c_1) = c_1 + \max_{j \notin B, y_{1j} > 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = -2 - \infty = -\infty$$

$$\text{ΑΦ}(c_1) = c_1 + \min_{j \notin B, y_{1j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = -2 + \frac{-1}{-1} = -1$$

Άρα το κόστος για το υλικό Α μπορεί να κυμανθεί στο διάστημα $[1, \infty)$

5) Ο νέος περιορισμός είναι: $x_3 \leq 1200$. Η λύση παραβιάζει τον περιορισμό, οπότε η μεταβλητή απόκλισης $x_{\bar{4}} = -200$ θα είναι βασική στη νέα βασική (μη εφικτή λύση). Το κεντρικό μέρος του νέου πίνακα simplex θα είναι:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4^B \mathbf{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{a}_4{}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-2	1		1	0	0	-1	0	0	200
-1.5	2		0	1	0	0	-1	0	400
-1	3		0	0	1	1	1	0	1400
0	$\bar{4}$		0	0	0	-1	-1	1	-200
		$\mathbf{c}$	-2	-1.5	-1	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	-1	-0.5	0	-2200

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την $\bar{4}$ και εισερχόμενη την $\bar{2}$

ΑΣΚΗΣΗ Α.14

1) 1ος πίνακας simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	2	1	0	0	6
0	$\bar{2}$		2	1	0	1	0	8
0	$\bar{3}$		-1	1	0	0	1	1
		$\mathbf{c}$	3	2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	3	2	0	0	0	0

Εισέρχεται η 1 στη θέση της $\bar{2}$ και διαμορφώνεται ο 2ος πίνακας simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	1.5	1	-0.5	0	2
3	1		1	0.5	0	0.5	0	4
0	$\bar{3}$		0	1.5	0	0.5	1	5
		$\mathbf{c}$	3	2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0.5	0	-1.5	0	12

Εισέρχεται η 2 στη θέση της $\bar{1}$ και διαμορφώνεται ο 3ος πίνακας simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
2	2		0	1	0.67	-0.33	0	1.33
3	1		1	0	-0.33	0.67	0	3.33
0	$\bar{3}$		0	0	-1	1	1	3
		$\mathbf{c}$	3	2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-0.33	-1.33	0	12.67

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση αφού όλα τα ΟΚΕ είναι αρνητικά

2) Ο πίνακας της βάσης και ο αντίστροφός του είναι:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.67 & -0.33 & 0 \\ -0.33 & 0.67 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Ο πίνακας του δυϊκού είναι:

$\mathbf{b}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
-6	1		1	0	1	0.33	-0.67	0.33
-8	2		0	1	-1	-0.67	0.33	1.33
		$\mathbf{b}$	-6	-8	-1	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	0	0	-3	-3.33	-1.33	-12.67

4) Τα φράγματα για το δεξιό μέλος του 2ου περιορισμού είναι:

$$\mathrm{A\Phi}(b_2) = b_2 + \min_{y_{i\bar{2}}<0}\left\{-\frac{x_{B_i}}{y_{i\bar{2}}}\right\} = 8 + \left\{-\frac{1.33}{-0.33}\right\} = 12$$

$$\mathrm{K\Phi}(b_2) = b_2 + \max_{y_{i\bar{2}}>0}\left\{-\frac{x_{B_i}}{y_{i\bar{2}}}\right\} = 8 + \max\left\{-\frac{3.33}{0.67}, -\frac{3}{1}\right\} = 5$$

5) Η δυϊκή μεταβλητή που αντιστοιχεί στο 2ο περιορισμό είναι $u_2 = 1.33$. Άρα η αύξηση του δεξιού μέλους του περιορισμού κατά 2 μονάδες θα οδηγήσει σε αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης κατά $2u_2 = 2.67$.

ΑΣΚΗΣΗ Α.15

1) Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		2.5	0	2	1	0.25	0	10
3	2		-0.5	1	0	0	0.25	0	3
0	$\bar{3}$		-2.5	0	3	0	-0.75	1	5
		$\mathbf{c}$	-1	3	0.4	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0.5	0	0.4	0	-0.75	0	9

Εισάγεται η 1στη θέση της $\bar{1}$ και ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1		1	0	0.8	0.4	0.1	0	4
3	2		0	1	0.4	0.2	0.3	0	5
0	$\bar{3}$		0	0	5	1	-0.5	1	15
		$\mathbf{c}$	-1	3	0.4	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	-0.2	-0.8	0	11

Αυτή η λύση είναι βέλτιστη

2) Υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις, γιατί $\bar{c}_3 = 0$ και η x_3 μπορεί να εισαχθεί στη βάση με μη μηδενική τιμή. Έτσι, μια εναλλακτική βέλτιστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί εισάγοντας την x_3 στη θέση της $x_{\bar{3}}$.

3) Η λύση του δυϊκού διαμορφώνεται από τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών. Έτσι η λύση του δυϊκού είναι η $(u_1, u_2, u_3) = (0.2, 0.8, 0)$.

Τα $\mathbf{x}_B$ καθορίζουν τα ΟΚΕ του δυϊκού. Αφού λοιπόν $\mathbf{x}_B > \mathbf{0}$, τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών στη λύση του δυϊκού είναι όλα αρνητικά. Επομένως η λύση του δυϊκού είναι μοναδική.

4) Έως €0.8, δηλαδή όσο η τιμή της δυϊκής μεταβλητής του περιορισμού αυτού στη βέλτιστη λύση. Η ποσότητα που θα μπορούσε να αγοραστεί στην τιμή αυτή καθορίζεται από το άνω φράγμα του β΄μέλους του 2ου περιορισμού:

$$\mathrm{A\Phi}(b_2) = 12 - \frac{15}{-0.5} = 42$$

Άρα θα μπορούσαν να αγοραστούν ακόμα 30 μονάδες

5) Η στήλη του πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη νέα μεταβλητή είναι:

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4a_{14} + 0.1a_{24} \\ 0.2a_{13} + 0.3a_{24} \\ a_{14} - a_{24} + a_{34} \end{bmatrix}$$

Οπότε το ΟΚΕ της μεταβλητής αυτής είναι:

$$\overline{c}_4 = -c_4 - \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4a_{14} + 0.1a_{24} \\ 0.2a_{13} + 0.3a_{24} \\ a_{14} - a_{24} + a_{34} \end{bmatrix} = -c_4 - 0.2a_{14} - 0.8a_{24}$$

Για να μην αλλάξει η βέλτιστη λύση θα πρέπει:

$$\overline{c}_4 \le 0 \Leftrightarrow c_4 + 0.2a_{14} + 0.8a_{24} \ge 0$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.16

1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 7u_2 + 10u_3 \\ \text{υ.π.} \quad & 12u_1 - 3u_2 \ge 2 \\ & u_1 + u_2 + u_3 \ge 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \ge 0 \end{aligned}$$

2) Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι

$\mathbf{b}_B$	Βάση		1	2	3	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\mathbf{u}_B$
-6	1		1	0	0.2	-1/15	-0.2	1/3
-7	2		0	1	0.8	1/15	-0.8	2/3
		$\mathbf{b}$	-6	-7	-10	0	0	
		$\overline{\mathbf{b}}$	0	0	-3.2	1/15	-6.8	20/3

Εισάγεται η $\overline{1}$ στη θέση της 2 και η νέα λύση είναι:

$\mathbf{b}_B$	Βάση		1	2	3	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\mathbf{u}_B$
-6	1		1	1	1	0	-1	1
0	$\overline{1}$		0	15	12	1	-12	10
		$\mathbf{b}$	-6	-7	-10	0	0	
		$\overline{\mathbf{b}}$	0	-1	-4	0	-6	-6

Αυτή η λύση είναι βέλτιστη

3) Ο πίνακας του πρωτεύοντος είναι

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	2		12	1	1	0	0	6
0	$\overline{2}$		-15	0	-1	1	0	1
0	$\overline{3}$		-12	0	-1	0	1	4
		$\mathbf{c}$	2	1	0	0	0	
		$\overline{\mathbf{c}}$	-10	0	-1	0	0	6

4) Το διάστημα τιμών για το c_2 προσδιορίζεται από τα εξής φράγματα

$$\text{Κ}\Phi(c_2) = 1 + \max\left\{\frac{-10}{12}, \frac{-1}{1}\right\} = 0.167$$

$$\text{Α}\Phi(c_2) = \infty$$

5) Η εισαγωγή του περιορισμού αυτού αντιστοιχεί στην εισαγωγή μίας επιπλέον μεταβλητής στο δυϊκό. Γράφοντας τον περιορισμό ως

$$-x_1 - 7x_2 \le -45$$

η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή u_4 είναι $u_4 \ge 0$ και οι συντελεστές της στους περιορισμούς δίνονται στο ακόλουθο διάνυσμα:

$$a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Επομένως, εισάγεται μία επιπλέον στήλη στον πίνακα simplex ως εξής:

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4$$

όπου

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{b}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
-6	1		1	1	1	-7	0	-1	1
0	$\bar{1}$		0	15	12	-83	1	-12	10
		$\mathbf{b}$	-6	-7	-10	45	0	0	
		$\bar{\mathbf{b}}$	0	-1	-4	3	0	-6	-6

Το πρόβλημα είναι μη φραγμένο αφού εισέρχεται η 4, αλλά δεν υπάρχει εξερχόμενη μεταβλητή.

Επομένως το ΓΠ μετά την εισαγωγή του περιορισμού είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ Α.17

1) 1ος πίνακας simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
750	3		0	0.5	1	1.5	-0.5	52.5
1250	1		1	0.5	0	-0.5	0.5	7.5
		$\mathbf{c}$	1250	1050	750	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	50	0	-500	-250	48750

Εισέρχεται η 2 στη θέση της 1 και διαμορφώνεται ο 2ος πίνακας simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
750	3		-1	0	1	2	-1	45
1250	2		2	1	0	-1	1	15
		$\mathbf{c}$	1250	1050	750	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-100	0	0	-450	-300	49500

2) Ο πίνακας του δυϊκού είναι:

B	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{u}_B$
0	$\bar{1}$		0	0	1	-2	1	100
-60	1		1	0	0	1	-2	450
-75	2		0	1	0	-1	1	300
		$\mathbf{c}$	1250	1050	750	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	-15	-45	-49500

3) Τον 1$^{\text{ο}}$ περιορισμό γιατί $u_1 > u_2$. Το ΑΦ του 1$^{\text{ου}}$ περιορισμού είναι:

$$\text{ΑΦ} = 60 + \left(\frac{-15}{-1}\right) = 75$$

4) Με την αλλαγή αυτή ο πίνακας της βέλτιστης λύσης του (1) γίνεται:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
750	3		-1	0	1	2	-1	125
1250	2		2	1	0	-1	1	-25
		$\mathbf{c}$	1250	1050	750	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-100	0	0	-450	-300	67500

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος, με εξερχόμενη την 2 και εισερχόμενη την $\bar{1}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
750	3		3	2	1	0	1	75
0	$\bar{1}$		-2	-1	0	1	-1	25
		$\mathbf{c}$	1250	1050	750	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-1000	-450	0	0	-750	82500

ΑΣΚΗΣΗ Α.18

1) Αφού η $\bar{1}$ είναι βασική, αυτό σημαίνει ότι η στήλη του κεντρικού μέρους του πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη μεταβλητή αυτή θα είναι $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^{\top}$. Επομένως ο αντίστροφος πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τις στήλες του κεντρικού μέρους του πίνακα simplex που αντιστοιχούν στις μεταβλητές $\bar{1}$ και $\bar{2}$:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τους αλγεβρικούς υπολογισμούς $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ και $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ διαμορφώνεται το κεντρικό τμήμα $\mathbf{Y}$ του πίνακα simplex και υπολογίζονται οι τιμές των βασικών μεταβλητών (διάνυσμα $\mathbf{x}_B$). Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		1	1	-1	0	1	-1	1
2	4		3	1	2	1	0	1	4
		$\mathbf{c}$	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-2	1	-3	0	0	-2	8

2) Εισάγεται η 2 στη θέση της $\bar{1}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		1	1	-1	0	1	-1	1
2	4		2	0	3	1	-1	2	3
		$\mathbf{c}$	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-3	0	-2	0	-1	-1	9

Αυτή η λύση είναι βέλτιστη

3) Η βέλτιστη λύση είναι μοναδική γιατί τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών είναι όλα αρνητικά. Εάν όμως άλλαζε η αντικειμενική συνάρτηση, τότε $\bar{c}_3 = 0$ και πλέον το ΓΠ θα είχε άπειρες βέλτιστες λύσεις (λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι η λύση δεν είναι εκφυλισμένη).

4) Το άνω φράγμα για το b_1 είναι:

$$\text{ΑΦ}(b_1) = 5 + \min\left\{\frac{-3}{-1}\right\} = 8$$

Δηλαδή θα μπορούσε να υπάρξει αύξηση κατά 3 μονάδες. Η αύξηση αυτή αύξανε την αντικειμενική συνάρτηση κατά 3 μονάδες αφού $u_1 = -\bar{c}_{\bar{1}} = 1$.

5) Στην περίπτωση αυτή, ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		1	1	-1	0	1	-1	6
2	4		2	0	3	1	-1	2	-2
		$\mathbf{c}$	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-3	0	-2	0	-1	-1	14

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την 4 και εισερχόμενη την $\bar{1}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		3	1	2	1	0	1	4
0	$\bar{1}$		-2	0	-3	-1	1	-2	2
		$\mathbf{c}$	4	3	1	2	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-5	0	-5	-1	0	-3	12

ΑΣΚΗΣΗ Α.19

1) Η λύση του συγκεκριμένου ΓΠ θα ξεκινούσε έχοντας ως αρχικές βασικές μεταβλητές τις $\bar{1}$, $\bar{\bar{2}}$ και $\bar{\bar{3}}$. Οπότε ο αντίστροφος πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τις στήλες του κεντρικού μέρους του πίνακα simplex που αντιστοιχούν στις μεταβλητές αυτές:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & -1 & 11/3 \end{bmatrix}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ υπολογίζονται οι τιμές των βασικών μεταβλητών. Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	2		1	1	0	1/3	0	0	1/3	5
0	3		1	0	1	0	0	0	1	6
0	$\bar{2}$		5	0	0	2/3	1	-1	11/3	24
		$\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	-1	-1	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Το ΓΠ είναι εφικτό γιατί σε αυτή τη βέλτιστη λύση της φάσης I δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές στη βάση.

2) Ο 1ος πίνακας της φάσης II προκύπτει από τον παραπάνω βέλτιστο πίνακα της φάσης I, διαγράφοντας τις στήλες που αντιστοιχούν στις τεχνητές μεταβλητές και προσαρμόζοντας τα ΟΚΕ χρησιμοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση του δοθέντος ΓΠ:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	2		1	1	0	1/3	0	5
1	3		1	0	1	0	0	6
0	$\bar{2}$		5	0	0	2/3	1	24
		$\mathbf{c}$	3	1	1	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	1	0	0	-1/3	0	11

Εισάγεται η 1 στη θέση της $\bar{2}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	2		0	1	0	1/5	-1/5	0.2
1	3		0	0	1	-2/15	-1/5	1.2
3	1		1	0	0	2/15	1/5	4.8
		$\mathbf{c}$	3	1	1	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	1	0	0	-35/75	0	15.8

3) Το ΟΚΕ της $\bar{1}$ είναι -35/75, άρα $u_1 = 35/75$. Δηλαδή μια οριακή αύξηση του β΄ μέλους του 1ου περιορισμού θα αυξήσει την αντικειμενική συνάρτηση κατά 35/75.

4) Τα φράγματα για το b_1 είναι:

$$\text{ΚΦ}(b_1) = 9 + \max\left\{\frac{-0.2}{1/5}, \frac{-4.8}{2/15}\right\} = 8 \qquad \text{ΑΦ}(b_1) = 9 + \min\left\{\frac{-1.2}{-2/15}\right\} = 18$$

ΑΣΚΗΣΗ Α.20

1) Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	-1	0	1	-1	0	1
1-2λ	2	-1	1	0	1	0	1
0	$\bar{3}$	0	0	0	1	1	5
		-3+λ	1-2λ	0	0	0	
		-2-λ	0	0	-1+2λ	0	1-2λ

Τα $\mathbf{x}_B$ υπολογίστηκαν από τη σχέση $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι το κεντρικό μέρος του πίνακα simplex κάτω από τις στήλες $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$.

2) Για να είναι η λύση βέλτιστη θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{r} -2-\lambda \le 0 \\ -1+2\lambda \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \le \lambda \le 1/2$$

Για να είναι το πρόβλημα μη φραγμένο θα πρέπει $-2-\lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda \le -2$. Σε αυτή την περίπτωση η εισαγωγή της x_1 καθιστά το ΓΠ μη φραγμένο.

3) Εάν $\lambda = 1$ τότε εισάγεται στη βάση η $\bar{2}$ (γιατί έχει θετικό ΟΚΕ: $-1+2\lambda = 1 > 0$) και εξέρχεται η 2. Το οδηγό στοιχείο είναι το $(2, \bar{2})$ που είναι 1. Οπότε η 2η γραμμή πολλαπλασιάζεται με 1 και προστίθεται στην 2η. Επίσης η 2η γραμμή πολλαπλασιάζεται με -1 και προστίθεται στην 3η.

4) Τα φράγματα είναι

$$\mathrm{K\Phi}(b_1) = 1 + \max\left\{\frac{-1}{1}, \frac{-5}{1}\right\} = 0 \qquad \mathrm{A\Phi}(b_1) = 1 + \min\left\{\frac{-1}{-1}\right\} = 2$$

5) Η μεταβολή αυτή είναι εντός των παραπάνω ορίων. Η δυϊκή μεταβλητή του 2ου περιορισμού είναι ίση με $u_2 = -\bar{c}_{\bar{2}} = 1 - 2\lambda$. Επομένως εάν το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού γίνει 0.7 (μείωση 0.3) τότε η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι:

$f' = f - 0.3u_1 = (1-2\lambda) - 0.3(1-2\lambda) = 0.7 - 1.4\lambda$

ΑΣΚΗΣΗ Α.21

1) Η αντικειμενική συνάρτηση της φάσης Ι είναι: $\max -x_{\bar{\bar{1}}}$. Άρα ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	1	1	0.5	-0.5	0.5	0	0	1
0	$\bar{2}$	0	-0.5	1.5	-1.5	1	0	1
0	$\bar{3}$	0	0.5	0.5	-0.5	0	1	0
	c	0	0	0	-1	0	0	
	c-	0	0	0	-1	0	0	0

Η λύση είναι βέλτιστη για το ΓΠ της φάσης Ι αφού δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ. Επειδή στη λύση αυτή δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές στη βάση, το ΓΠ είναι εφικτό

2) Ο 1ος πίνακας της φάσης 2 προκύπτει διαγράφοντας την $\bar{\bar{1}}$ από τον πίνακα της φάσης Ι και αλλάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση με αυτή του δοθέντος ΓΠ:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	1	1	0.5	-0.5	0	0	1
0	$\bar{2}$	0	-0.5	1.5	1	0	1
0	$\bar{3}$	0	0.5	0.5	0	1	0
	c	1	1	0	0	0	
	c-	0	0.5	0.5	0	0	1

Εισάγεται η 2 στη θέση της $\bar{3}$ (γιατί την 3η γραμμή αντιστοιχεί το μικρότερο από τα 1/0.5, 0/0.5):

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	1	1	0	-1	0	-1	1
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	1	1
1	2	0	1	1	0	2	0
	c	1	1	0	0	0	
	c-	0	0	0	0	-1	1

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3) Το ΑΦ και ΚΦ του c_2 είναι:

$$\mathrm{A\Phi}(c_2) = c_2 + \min_{j \notin B, y_{kj} < 0}\left\{\frac{\bar{c}_j}{y_{kj}}\right\} = +\infty \qquad \mathrm{K\Phi}(c_2) = c_2 + \max_{j \notin B, y_{kj} > 0}\left\{\frac{\bar{c}_j}{y_{kj}}\right\} = 1 + \left\{\frac{0}{1}, \frac{-1}{2}\right\} = 1$$

4) Η επιπλέον στήλη του κεντρικού πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη νέα μεταβλητή θα είναι:

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3$

όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι το κεντρικό μέρος του πίνακα simplex που αντιστοιχεί στις μεταβλητές $\overline{1}$ (με αντίθετο πρόσημο), $\overline{2}$ και $\overline{3}$. Άρα ο πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	1		1	0	0	-1	0	-1	1
0	$\overline{2}$		0	0	5	2	1	1	1
1	2		0	1	1	1	0	2	0
		c	1	1	0.3	0	0	0	
		c-	0	0	-0.7	0	0	-1	1

Επομένως η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει.

ΑΣΚΗΣΗ Α.22

1) Αφού οι μεταβλητές 2, $\overline{1}$ και 1 είναι βασικές, στο κεντρικό μέρος του πίνακα θα διαμορφώνουν τον μοναδιαίο πίνακα. Η στήλη της μεταβλητής x_3μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας τον αντίστροφο πίνακα της βάσης με τους συντελεστές της x_3 στους περιορισμούς, όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται στο κεντρικό μέρος του πίνακα κάτω από τις μεταβλητές απόκλισης. Ο πλήρης πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
7	2	0	1	-0,5	0	1,5	-2	3,5
0	$\overline{1}$	0	0	2	1	1	2	18
13	1	1	0	0,5	0	-0,5	2	1,5
		13	7	5	0	0	0	
		0	0	2	0	-4	-12	44

Εισέρχεται η 3 στη θέση της 1:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
7	2	1	1	0	0	1	0	5
0	$\overline{1}$	-4	0	0	1	3	-6	12
5	3	2	0	1	0	-1	4	3
		13	7	5	0	0	0	
		-4	0	0	0	-2	-20	50

Η λύση αυτή είναι βέλτιστη αφού δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ.

2) Η μέγιστη μείωση του δεξιού μέλους του 2ου περιορισμού είναι:

$$\lambda = \max\left\{-\frac{5}{1}, -\frac{12}{3}\right\} = -4$$

Το ΟΚΕ της μεταβλητής $\overline{2}$ είναι -2, άρα η δυϊκή μεταβλητή του 2ου περιορισμού είναι $u_2 = 2$. Επομένως, με την παραπάνω μεταβολή η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά $\lambda u_2 = -8$ (μείωση 8 μονάδων από 50 σε 42).

3) Ο περιορισμός αυτός σε πρότυπη μορφή γράφεται ως $x_2 + x_{\overline{4}} = 3$. Η βέλτιστη λύση του 1ου ερωτήματος παραβιάζει το νέο περιορισμό, γιατί στη λύση αυτή είναι $x_2 = 5$. Άρα η μεταβλητή απόκλισης $x_{\overline{4}}$ θα είναι βασική και ίση με -2. Το κεντρικό μέρος του νέου πίνακα simplex θα έχει στην εξής δομή:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4^B\mathbf{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{Y}$ είναι το κεντρικό μέρος του πίνακα simplex στη βέλτιστη λύση του 1ου ερωτήματος, $\mathbf{a}_4$ είναι οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στον επιπλέον περιορισμό και $\mathbf{a}_4^B$ είναι οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών του βέλτιστου πίνακα simplex του 1ου ερωτήματος στο νέο περιορισμό:

$\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{a}_4^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
7	2	1	1	0	0	1	0	0	5
0	$\bar{1}$	-4	0	0	1	3	-6	0	12
5	3	2	0	1	0	-1	4	0	3
0	$\bar{4}$	-1	0	0	0	-1	0	1	-2
		13	7	5	0	0	0	0	
		-4	0	0	0	-2	-20	0	50

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την $\bar{4}$, εισερχόμενη την $\bar{2}$ και οδηγό στοιχείο το $(\bar{4},\ \bar{2}) = -1$.

ΑΣΚΗΣΗ Α.23

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	3	0	1	0	0	4	88
0	$\bar{2}$	2	0	0	1	0	3	61
0	$\bar{3}$	1	0	0	0	1	2	24
25	2	0	1	0	0	0	-1	3
		15	25	0	0	0	0	
		15	0	0	0	0	25	75

2. Εάν εισαχθεί στη βάση η x_1, τότε $\theta_1 = \min\{88/3,\ 61/2,\ 24/1\} = 24$, οπότε η αντικειμενική συνάρτηση θα αυξηθεί κατά $\theta_1\bar{c}_1 = 24 \times 15 = 360$. Εάν εισαχθεί στη βάση η $x_{\bar{4}}$, τότε $\theta_{\bar{4}} = \min\{88/4,\ 61/3,\ 24/2\} = 12$, οπότε η αντικειμενική συνάρτηση θα αυξηθεί κατά $\theta_{\bar{4}}\bar{c}_{\bar{4}} = 12 \times 25 = 300$. Άρα στη βάση εισέρχεται η x_1 στη θέση της $x_{\bar{3}}$ και ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	-3	-2	16
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2	-1	13
15	1	1	0	0	0	1	2	24
25	2	0	1	0	0	0	-1	3
		15	25	0	0	0	0	
		0	0	0	0	-15	-5	435

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Σύμφωνα όμως με την παραπάνω βέλτιστη λύση είναι $\bar{c}_{\bar{1}} = \bar{c}_{\bar{2}} = 0$, δηλαδή οι δυϊκές μεταβλητές των περιορισμών που αντιστοιχούν στο προσωπικό είναι 0. Άρα η πρόσληψη επιπλέον προσωπικού δεν αποφέρει κάποιο όφελος. Αντίθετα, η αύξηση της διαθέσιμης ποσότητας πρώτης ύλης (3^{ος} περιορισμός) θα αποφέρει όφελος $u_3 = 15$ €/μονάδα. Επομένως προτείνεται η προμήθεια επιπλέον ποσότητας πρώτης ύλης σε τιμή το πολύ 15€/μονάδα. Η ποσότητα που μπορεί να αγοραστεί στην τιμή αυτή προσδιορίζεται από το άνω φράγμα για το δεξιό μέλος του 3^{ου} περιορισμού:

$$\text{ΑΦ} = 30 + \min\{-16/-3,\ \ -13/-2\} = 35.33$$

Δηλαδή η επιχείρηση μπορεί να προμηθευτεί το πολύ 5.33 μονάδες της πρώτης ύλης αυξάνοντας έτσι τα έσοδα κατά $5.33u_3 = 80$ €.

4. Με την αλλαγή αυτή οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών θα είναι:

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \lambda(-\mathbf{y}_{\bar{4}}) = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} + 13\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 26 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Άρα θα πρέπει να εφαρμοστεί ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την x_1. Στη γραμμή όμως της x_1 στον κεντρικό πίνακα simplex δεν υπάρχει αρνητική τιμή, άρα η μεταβολή αυτή καθιστά το ΓΠ αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ Α.24

1. Στον κεντρικό πίνακα simplex οι στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές 2, $\bar{1}$ και 3 διαμορφώνουν το μοναδιαίο πίνακα. Η στήλη για τη μεταβλητή απόφασης 1 στο κεντρικό μέρος του πίνακα μπορεί να υπολογιστεί ως $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1$, όπου $\mathbf{B}^{-1}$ είναι ο αντίστροφος πίνακας της βάσης και $\mathbf{a}_1$ είναι το διάνυσμα-στήλη με τους συντελεστές της μεταβλητής απόφασης 1 στους περιορισμούς.

   Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται στο κεντρικό μέρος του πίνακα simplex κάτω από τις μεταβλητές απόκλισης:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 1.2 \\ 1 & 1.2 & -5.6 \\ 0 & 1.2 & -1.6 \end{bmatrix}$$

   Άρα:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 1.2 \\ 1 & 1.2 & -5.6 \\ 0 & 1.2 & -1.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

   Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
3	2		0.8	1	0	0	–0.4	1.2	1.6
0	$\bar{1}$		1.6	0	0	1	1.2	–5.6	27.2
2	3		1.6	0	1	0	1.2	–1.6	11.2
		c	6	3	2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0.4	0	0	0	–1.2	–0.4	27.2

2. Εισάγεται στη βάση η 1 στη θέση της 2. Ο νέος πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
6	1		1	1.25	0	0	–0.5	1.5	2
0	$\bar{1}$		0	–2	0	1	2	–8	24
2	3		0	–2	1	0	2	–4	8
		c	6	3	2	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	–0.5	0	0	–1	–1	28

   Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Το ΚΦ του b_2 είναι:

$$\text{ΚΦ}(b_2) = b_2 + \max_{y_{i\bar{k}}>0}\left\{-\frac{x_{B_i}}{y_{i\bar{k}}}\right\} = 20 + \max\left\{-\frac{24}{2}, -\frac{8}{2}\right\} = 16$$

Η μείωση των 3 μονάδων είναι εντός του παραπάνω ορίου. Επομένως η μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση θα είναι $3u_2$, όπου $u_2 = -\bar{c}_{\bar{2}} = 1$ είναι η δυϊκή μεταβλητή του 2ου περιορισμού. Δηλαδή η μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι 3 μονάδες

4. Στο ΓΠ θα πρέπει να προστεθεί ο περιορισμός

   $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 28 \times 0.95 \Rightarrow 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_{\bar{4}} = 26.6$

   και η νέα αντικειμενική συνάρτηση είναι: $\max x_3$.

   Σύμφωνα με τη διαδικασία ανάλυσης ευστάθειας, στο βέλτιστο πίνακα simplex γίνονται οι εξής αλλαγές:

- εισάγεται η $\bar{4}$ ως επιπλέον βασική μεταβλητή, έτσι ώστε $x_{\bar{4}} = 28 - 26.6 = 1.4$,
- μπαίνει μια επιπλέον στήλη για την $\bar{4}$ στο κεντρικό μέρος του πίνακα με μηδενικά στις πρώτες τρεις γραμμές και 1 στην τελευταία,
- τα υπόλοιπα στοιχεία της 4ης γραμμής στο κεντρικό μέρος του πίνακα είναι ίσα με τα ΟΚΕ της λύσης του ερωτήματος 2 (με αντίθετα πρόσημα).

Επομένως, ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
0	1		1	1.25	0	0	–0.5	1.5	0	2
0	$\bar{1}$		0	–2	0	1	2	–8	0	24
1	3		0	–2	1	0	2	–4	0	8
0	$\bar{4}$		0	0.5	0	0	1	1	1	1.4
		c	0	0	1	0	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	2	0	0	–2	4	0	8

Άρα θα πρέπει να μπει στη βάση η $\bar{3}$ στη θέση της 1.

ΑΣΚΗΣΗ Α.25

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
30	2	1.5	1	0	0.25	0	-0.25	1.25
0	$\bar{2}$	3	0	0	0.5	1	-2.5	0.5
20	3	-1	0	1	-0.5	0	1.5	2.5
		15	30	20	0	0	0	
		-10	0	0	2.5	0	-22.5	87.5

   Ο υπολογισμός των $\mathbf{x}_B$ έγινε από τη σχέση $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι κάτω από τις μεταβλητές απόκλισης.

2. Εισάγεται στη βάση η $\bar{1}$ στη θέση της $\bar{2}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
30	2	0	1	0	0	-0.5	1	1
0	$\bar{1}$	6	0	0	1	2	-5	1
20	3	2	0	1	0	1	-1	3
		15	30	20	0	0	0	
		-25	0	0	0	-5	-10	90

   Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Η μέγιστη μείωση για το δεξιό μέλος του 2ου περιορισμού είναι:

$$\lambda = \max\{-1/2,\ -3/1\} = -0.5$$

Το μέγιστη αύξηση για το δεξιό μέλος του 3ου περιορισμού είναι:

$$\lambda = \min\{-1/-5,\ -3/-1\} = 0.2$$

Εάν το δεξιό μέλος του 3ου περιορισμού αυξηθεί κατά 0.2, τότε η αντικειμενική συνάρτηση θα αυξηθεί κατά $0.2u_3 = 2$, όπου u_3 είναι η δυϊκή μεταβλητή του 3ου περιορισμού που είναι ίση με $-\overline{c}_{\overline{3}}$.

4. Ο πίνακας του δυϊκού είναι:

$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{u}_B$
0	$\overline{1}$	-6	0	0	1	0	-2	25
-8	2	-2	1	0	0	0,5	-1	5
-5	3	5	0	1	0	-1	1	10
		-10	-8	-5	0	0	0	
		-1	0	0	0	-1	-3	-90

ΑΣΚΗΣΗ Α.26

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{\overline{2}}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\overline{1}$	0	2	1	0	0	-1	3
2	1	1	0	0	0	0	1	3
0	$\overline{2}$	0	-1	0	1	-1	2	1
		2	3	0	0	-M	0	
		0	3	0	0	-M	-2	6

Εισάγεται στη βάση η 2 στη θέση της $\overline{1}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{\overline{2}}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
3	2	0	1	0,5	0	0	-0,5	1,5
2	1	1	0	0	0	0	1	3
0	$\overline{2}$	0	0	0,5	1	-1	1,5	2,5
		2	3	0	0	-M	0	
		0	0	-1,5	0	-M	-0,5	10,5

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

2. Ο πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τους συντελεστές των τριών βασικών μεταβλητών (2, 1, $\overline{2}$) στους περιορισμούς:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται στο κεντρικό μέρος του πίνακα simplex, στις στήλες που αντιστοιχούν στις μεταβλητές με τις οποίες ξεκίνησε η λύση του ΓΠ ($\overline{1}, \overline{\overline{2}}, \overline{3}$):

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & -1 & 1,5 \end{bmatrix}$$

3. Το άνω και κάτω φράγμα είναι:

$$\mathrm{A\Phi}(c_2) = 3 + \frac{-0,5}{-0,5} = 4 \qquad \mathrm{K\Phi}(c_2) = 3 + \frac{-1,5}{0,5} = 0$$

4. Οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \lambda \mathbf{y}_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Αφού υπάρχει αρνητική τιμή, η λύση δεν είναι εφικτή. Θα πρέπει να εφαρμοστεί ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη τη 2 και εισερχόμενη την $\overline{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ Α.27

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
2	1	1	-1	0	0	-1	1
3	3	0	2	1	0	1	2
0	$\overline{2}$	0	3	0	1	0	2
		2	-1	3	0	0	
		0	-5	0	0	-1	8

Οι τιμές των βασικών μεταβλητών 1 και 3 εμφανίζονται

- στη στήλη final value του πίνακα variable cells στα αποτελέσματα του Excel
- στη στήλη value του 1ου πίνακα των αποτελεσμάτων του Lingo
- στον 1ο αριστερό πίνακα των αποτελεσμάτων του lp_solve

Η τιμή της $\overline{2}$ προκύπτει από

- τη στήλη slack του πίνακα constraints στην αναφορά λύσης του Excel
- τη στήλη slack or surplus του 1ου πίνακα των αποτελεσμάτων του Lingo
- τη στήλη result του 2ου πίνακα (constraints) στα αποτελέσματα του Lp_solve όπου φαίνεται ότι στη βέλτιστη λύση το αριστερό μέλος του 2ου περιορισμού ισούται με 3, ενώ το δεξιό μέλος που δίνεται στην εκφώνηση είναι 1 (άρα η μεταβλητή απόκλισης είναι 2)

Το ΟΚΕ της $\overline{3}$ είναι η δυϊκή μεταβλητή του 3ου περιορισμού με αντίθετο πρόσημο. Οι τιμές των δυϊκών μεταβλητών δίνονται

- στη στήλη shadow price του πίνακα constraints στην ανάλυση ευαισθησίας Excel
- στη στήλη dual price του 1ου πίνακα των αποτελεσμάτων του Lingo
- στον δεξιό πίνακα των αποτελεσμάτων του lp_solve

2. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα για τις δυϊκές μεταβλητές που εμφανίζονται στις αναφορές, η δυϊκή μεταβλητή του 1ου περιορισμού είναι $u_1 = 2$. Άρα η αύξηση του β΄ μέλους κατά 6 μονάδες θα αυξήσει την αντικειμενική συνάρτηση κατά 12 μονάδες (λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι η μεταβολή αυτή, σύμφωνα με τις αναφορές, είναι εντός των ορίων στα οποία δεν μεταβάλλεται η ΒΕΛ)

3. Οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \lambda \mathbf{y}_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Η διαδικασία συνεχίζει εφαρμόζοντας τον δυϊκό αλγόριθμο με εξερχόμενη την 1 και εισερχόμενη την $\overline{3}$

4. Για την x_1 (είναι βασική):

- $\text{ΚΦ}(c_1) = c_1 + \max\limits_{j \notin B, y_{1j} > 0} \left\{ \dfrac{\overline{c}_j}{y_{1j}} \right\} = -\infty$ (αφού δεν υπάρχει πηλίκο με $y_{1j} > 0$)
- $\text{ΑΦ}(c_1) = c_1 + \min\limits_{j \notin B, y_{1j} < 0} \left\{ \dfrac{\overline{c}_j}{y_{1j}} \right\} = 2 + \min\left\{ \dfrac{-5}{-1}, \dfrac{-1}{-1} \right\} = 3$

Για την x_2 (είναι μη βασική):

- $\text{ΚΦ}(c_2) = -\infty$ (γιατί είναι εκτός βάσης)
- $\text{ΑΦ}(c_2) = c_2 - c_{\bar{2}} = 4$

Για την x_3 (είναι βασική):

- $\text{ΚΦ}(c_3) = c_3 + \max_{j \notin B, y_{3j} > 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{3j}} \right\} = 3 + \max_{j \notin B, y_{1j} > 0} \left\{ \frac{-5}{2}, \frac{-1}{1} \right\} = 2$
- $\text{ΑΦ}(c_3) = c_3 + \min_{j \notin B, y_{3j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{3j}} \right\} = +\infty$ (αφού δεν υπάρχει πηλίκο με $y_{3j} < 0$)

5. Ο νέος πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
2.5	1	1	-1	0	0	-1	1
2	3	0	2	1	0	1	2
0	$\bar{2}$	0	3	0	1	0	2
		2.5	-1	2	0	0	
		0	-2.5	0	0	0.5	6.5

Εισέρχεται η $\bar{3}$ στη θέση της 3:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
2.5	1	1	1	1	0	0	3
0	$\bar{3}$	0	2	1	0	1	2
0	$\bar{2}$	0	3	0	1	0	2
		2.5	-1	2	0	0	
		0	-3.5	-0.5	0	0	7.5

ΑΣΚΗΣΗ Α.28

1. (α) Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$ (πίνακας variable cells στο Excel, 1ος πίνακας LINGO, αριστερός πίνακας LP_Solve) και η τιμή της αντικειμενικής είναι 23 (πίνακας objective cell στο Excel, objective value στο LINGO, αριστερός πίνακας LP_Solve).

   (β) Τα ΟΚΕ είναι $\bar{c}_3 = -4$ και τα υπόλοιπα μηδέν (στήλη reduced cost στον πίνακα variable cells της ανάλυσης ευαισθησίας στο Excel, ίδια στήλη στον 1ο πίνακα του LINGO, στήλη value στον δεξιό πίνακα του LP_Solve για τα $x_1 - x_4$).

   (γ) Οι δυϊκές μεταβλητές είναι $u_1 = 2$, $u_2 = 0{,}5$, $u_3 = 1{,}5$ (στήλη shadow prices στον πίνακα constraints της ανάλυσης ευαισθησίας στο Excel, dual prices στο LINGO, στήλη value στον δεξιό πίνακα του LP_Solve για τους 3 περιορισμούς). Η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι 23 (όση και του πρωτεύοντος στη βέλτιστη λύση).

2. Ο συμπληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1	1	0	-2	0	1	0	0	1
0	$\bar{2}$	0	2	4	0	2	1	1	20
1	4	0	1	4	1	2	0	1	14
		-1	2	4	1	0	0	0	
		0	1	-2	0	-1	0	-1	13

Εισάγεται στη βάση η 2 στη θέση της $\overline{2}$:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	4	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
-1	1	1	0	-2	0	1	0	0	1
2	2	0	1	2	0	1	0,5	0,5	10
1	4	0	0	2	1	1	-0,5	0,5	4
		-1	2	4	1	0	0	0	
		0	0	-4	0	-2	-0,5	-1,5	23

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Ο πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τους συντελεστές των 3 βασικών μεταβλητών στους περιορισμούς του ΓΠ, ενώ ο αντίστροφός του είναι στο κεντρικό μέρος του πίνακα simplex στις στήλες των μεταβλητών απόκλισης:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

4. Η μέγιστη μείωση για το δεξιό μέλος του $3^{ου}$ περιορισμού είναι:

$$\lambda = \max\{-10/0,5,\ \ -4/0,5\} = -8$$

Η μέγιστη αύξηση δεν ορίζεται γιατί στη στήλη του κεντρικού πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη μεταβλητή απόκλισης του $3^{ου}$ περιορισμού δεν υπάρχει στοιχείο που να είναι αυστηρά αρνητικό.

Επομένως, ο δεξιό μέλος του $3^{ου}$ περιορισμού μπορεί να κυμανθεί στο διάστημα $[4, +\infty]$

Εάν το δεξιό μέλος του $3^{ου}$ περιορισμού μειωθεί κατά 8, τότε η αντικειμενική συνάρτηση θα μεταβληθεί κατά $-8u_3$, όπου u_3 =1.5 είναι η δυϊκή μεταβλητή του $3^{ου}$ περιορισμού. Επομένως, η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι $-8\times 1,5 = -12$. Οποιαδήποτε αύξηση του β΄ μέλους του $3^{ου}$ περιορισμού κατά λ θα οδηγήσει σε ανάλογη αύξηση της αντικειμενικής κατά 1,5λ.

ΑΣΚΗΣΗ Β.3

Συμβολίζοντας ως $x_i \in \{0,1\}$ τις μεταβλητές απόφασης ορισμένες έτσι ώστε $x_i=0 \Leftrightarrow$ δεν επιλέγεται η τοποθεσία s_i και $x_i=1 \Leftrightarrow$ επιλέγεται η τοποθεσία s_i το ακέραιο πρόγραμμα είναι:

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{20} c_i x_i$$

υπ:

$x_2 - x_3 \leq 0$ (η s_2 απαιτεί την s_3)

$x_1 + x_4 \leq 1$ (η s_1 αποκλείει την s_4)

$x_5 + x_9 \geq 1$ (τουλάχιστον μία από τις s_5, s_9)

$\sum_{i=1}^{20} p_i x_i \geq P$ (δυναμικότητα)

$x_i \in \{0,1\}$ $\sum s_i = 10$

ΑΣΚΗΣΗ Β.4

Συμβολίζουμε με $x_i \in \{0,1\}$ τις μεταβλητές απόφασης έτσι ώστε $x_i = 0 \Leftrightarrow$ δεν επιλέγεται ο αριθμός n_i και $x_i=1$ επιλέγεται ο αριθμός n_i

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\min\ z = y^+ + y^-$$

υπ:

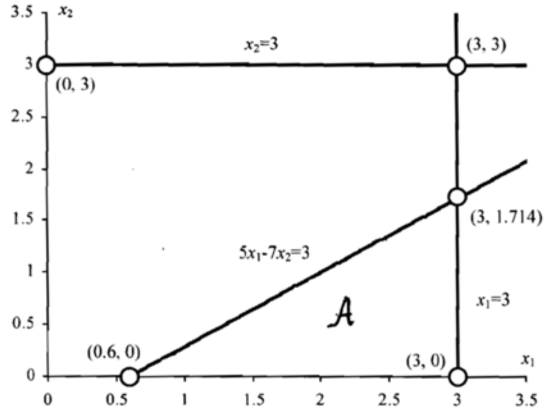
$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i + y^+ - y^- = a$

$x_i \in \{0,1\}$ $\sum x_i \geq 1$

$y^+, y^- \geq 0$

ΑΣΚΗΣΗ Β.5

1)



Από τις τρεις βασικές εφικτές λύσεις, η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης επιτυγχάνεται στο σημείο (3, 1.714). Άρα αυτή είναι η βέλτιστη λύση με $z^* = -0.43$

2)

Αφού η λύση δεν είναι ακέραια στρογγυλοποιείται προς μια ακέραια εφικτή λύση. Αυτή είναι η (3, 1) με $z = -4 =$ ΚΦ
Ελέγχονται οι περιπτώσεις $x_2 \leq 1$ και $x_2 \geq 2$
Για $x_2 \leq 1$ υπάρχουν ~~τέσσερις~~ ΒΕΛ:

- (0.6, 0) με $z = -1.8$
- (3, 0) με $z = -9$
- (3, 1) με $z = -4$
- (2, 1) με $z = -1 \rightarrow$ βέλτιστο

Για $x_2 \geq 2$ το πρόβλημα είναι αδύνατο
Αφού η λύση (2, 1) είναι ακέραια, η διαδικασία σταματά. Η βέλτιστη λύση είναι:
$x_1 = 2$, $x_1 = 1$ με $z = -1$

ΑΣΚΗΣΗ Β.6

$$\min \sum_{j=1}^{n} x_j$$

υπ. $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.7

1)

Ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{αν δεν επιλέγεται η λέξη } i \\ 1 & \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad i \end{cases}$$

$$\max \sum_{i \in D} s_i x_i$$

$$\text{υπ.} \quad \sum_{i \in D} \alpha_i x_i \leq n_\alpha$$

$$\sum_{i \in D} \beta_i x_i \leq n_\beta$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i \in D} \omega_i x_i \leq n_\omega$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

2)

α)

Απλά αλλάζει η αντικειμενική:

$$\max \sum_{i \in D} x_i$$

β)

$$\max \sum_{i \in D} s_i x_i + \sum_{i \in D} \sum_{\substack{j \in D \\ j \neq i}} s_{ij} y_{ij}$$

$$\text{υπ.} \quad \sum_{i \in D} \alpha_i x_i \leq n_\alpha$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i \in D} \omega_i x_i \leq n_\omega$$

$$x_i + x_j - 2y_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } i, j \in D \text{ με } i \neq j$$

$$x_i,\ y_{ij} \in \{0, 1\}$$

γ)

Τα $n_\alpha, n_\beta, \ldots, n_\omega$ θεωρούνται μεταβλητές απόφασης (ακέραιες) και εισάγεται ο περιορισμός

$$n_\alpha + n_\beta + \cdots + n_\omega \leq 100$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.8

α) Οι περιορισμοί υποδηλώνουν ότι ισχύει τουλάχιστον μια από τις ανισότητες $f_1(x) \leq b_1$ και $f_2(x) \leq b_2$

β) Οι περιορισμοί υποδηλώνουν ότι $f(x) \in \{d_1, d_2, \ldots, d_N\}$

γ) Το σύνολο των εφικτών λύσεων της γραμμικής χαλάρωσης είναι υπερσύνολο των εφικτών λύσεων του ακέραιου ΓΠ

δ) Το ΚΦ αντιστοιχεί στην υψηλότερη τιμή της αντικειμενικής με βάση τις ακέραιες λύσεις που έχουν εντοπιστεί

ΑΣΚΗΣΗ Β.11

1)

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{αν χρησιμοποιηθεί το κουτί } j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αντικειμενική = min το πλήθος των κουτιών που θα χρησιμοποιηθούν

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν το αντικείμενο } i \text{ τοποθετηθεί στο κουτί } j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im} = 1 \rightarrow$ κάθε αντικείμενο i να μπει σε ένα κουτί

$w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \cdots + w_n x_{nj} \leq C y_j \rightarrow$ Αν χρησιμοποιηθεί το κουτί j τότε μπορεί μεταφέρει αντικείμενα συνολικού βάρους το πολύ C

2α)

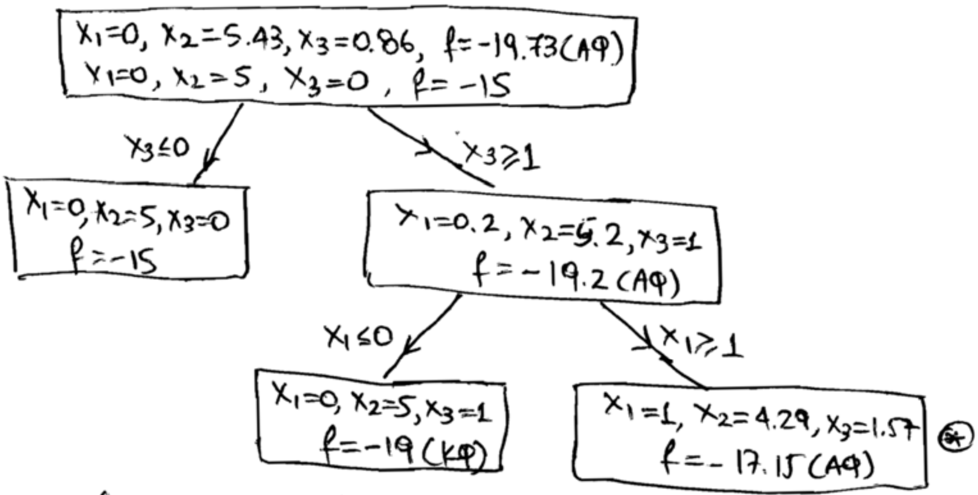
$x_{kj} + x_{\ell j} \leq 1 \quad , \forall j = 1, 2, \ldots, m$

2β)

$x_{1b} + x_{2b} + \cdots + x_{nb} \geq 1$

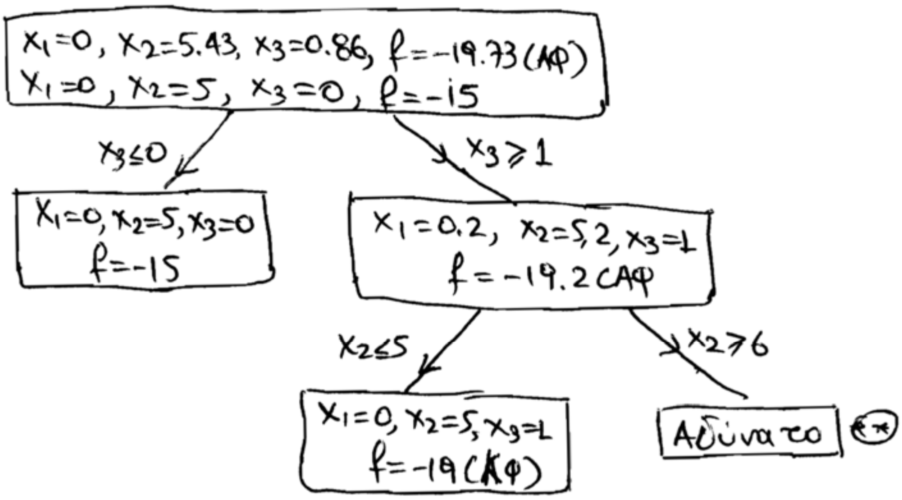
ΑΣΚΗΣΗ Β.12

1)



Το πρόβλημα είναι ελαχιστοποίησης, οπότε το κριτήριο τερματισμού είναι εάν ΚΦ ≤ ΑΦ.
Οπότε στο παραπάνω δέντρο η λύση (0,5,1) είναι βέλτιστη γιατί το ΑΦ στον κόμβο * είναι μεγαλύτερο από το ΚΦ

Στο 2ο δέντρο:



Η λύση (0,5,1) είναι βέλτιστη γιατί είναι η καλύτερη ακέραια και επιπλέον στον ** κόμβο το πρόβλημα είναι αδύνατο, αφού δεν είναι δυνατόν με $x_2 \ge 6$ να ικανοποιηθεί ο περιορισμός
$3x_1+2x_2-x_3 \le 10$

2)

Αρκεί να γίνει η αντικατάσταση:

$x_2=1.7y_1+3y_2+4.4y_3+5.5y_4$

με $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0,1\}$

και να μπει ο περιορισμός

$y_1+y_2+y_3+y_4=1$

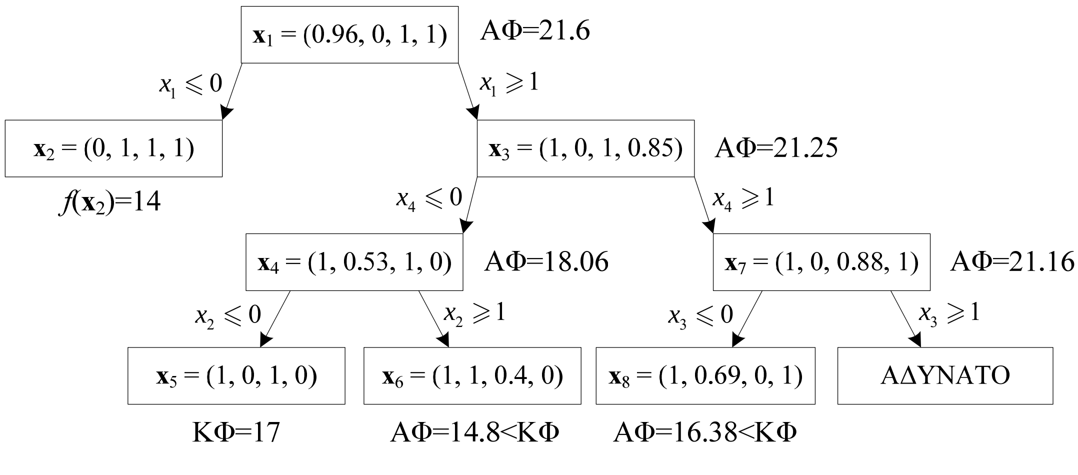
ΑΣΚΗΣΗ Β.13

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης $x_i \in \{0,1\}$ τέτοιες ώστε $x_i = 1$ εάν και μόνο εάν επιλέγεται το διαφημιστικό μέσο *i*. Επιπλέον ορίζεται η μεταβλητή $y \in \{0,1\}$, τέτοια ώστε $y = 0$ τότε επιλέγεται τουλάχιστον ένα από τα {Δ1, Δ4}, ενώ $y = 1$ τότε επιλέγεται τουλάχιστον ένα από τα {Δ2, Δ3}. Το ακέραιο πρόγραμμα είναι:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 1000x_1 + 200x_2 + 300x_3 + 400x_4 + 450x_5 + 450x_6 \\
\text{Υπ.} \quad & 500x_1 + 150x_2 + 300x_3 + 250x_4 + 250x_5 + 150x_6 \le 1800 \\
& x_6 - x_4 \le 0 \text{ (συνθήκη α)} \\
& x_2 + x_5 \le 1 \text{ (συνθήκη β)} \\
& x_1 + x_4 + My \ge 2 \text{ (συνθήκη γ)} \\
& x_2 + x_3 + M(1-y) \ge 2 \text{ (συνθήκη γ)} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.14

Το πλήρες δέντρο επίλυσης είναι:



Άρα η βέλτιστη λύση είναι η $\mathbf{x}_5$.

ΑΣΚΗΣΗ Β.15

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης x_A, x_B, x_Γ που αναπαριστούν το ύψος της παραγωγής και δυαδικές μεταβλητές y_A, y_B, y_Γ, τέτοιες ώστε

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x_i = 0 \\ 1 & \text{εάν } x_i \ge 1000 \end{cases}, \quad i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\}$$

Το ακέραιο ΓΠ διαμορφώνεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 2000x_{\mathrm{A}} + 3000x_{\mathrm{B}} + 4000x_{\Gamma} \\
\text{υ.π.}\quad & 1.5x_{\mathrm{A}} + 3x_{\mathrm{B}} + 5x_{\Gamma} \le 6000 \\
& 30x_{\mathrm{A}} + 25x_{\mathrm{B}} + 40x_{\Gamma} \le 60000 \\
& x_i - My_i \le 0, \qquad i \in \{\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma\} \\
& x_i - 1000y_i \ge 0, \qquad i \in \{\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma\} \\
& x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\Gamma} \in \mathbb{N} \\
& y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}, y_{\Gamma} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.16

α) Ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης x_1, x_2, …, x_n τέτοιες ώστε $x_i = 1$ εάν και μόνο εάν επιλέγεται το κομμάτι i. Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\text{υ.π.}\quad & d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \le 4800 \\
& \textstyle\sum_{i\in A_j} x_i \le 1,\ \forall j \\
& x_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

β) Ο πρώτος περιορισμός υπονοεί ότι

$$\sum_{i\in G_\ell} x_i > 0 \Rightarrow y_\ell = 1$$

Ο δεύτερος περιορισμός υπονοεί ότι

$$y_\ell = 1 \Rightarrow \sum_{i\in G_\ell} x_i > 0$$

Άρα οι δύο περιορισμοί μαζί υπονοούν ότι:

$$y_\ell = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\in G_\ell} x_i > 0$$

Δηλαδή ότι $y_\ell = 1$ εάν και μόνο εάν επιλεγούν κομμάτια από το είδος ℓ

Ο τρίτος περιορισμός υπονοεί ότι θα πρέπει να επιλεγούν κομμάτια το πολύ από τρία διαφορετικά είδη.

ΑΣΚΗΣΗ Β.17

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης:

x_i =ποσότητα που θα παραχθεί από το προϊόν i

y_i =1 εάν και μόνο εάν το προϊόν i θα παραχθεί και 0 διαφορετικά

Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 70x_1+60x_2+90x_3+80x_4-50000y_1-40000y_2-70000y_3-60000y_4 \\
\text{υ.π.} \quad & x_i \le My_i \qquad\qquad i=1,2,3,4 \\
& y_1+y_2+y_3+y_4 \le 2 \\
& y_3 \le y_1+y_2 \\
& y_4 \le y_1+y_2 \\
& x_i \ge 0,\ \ y_i \in \{0,1\} \qquad i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.18

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης $y_1,\ldots,y_8 \in \{0,1\}$ τέτοιες ώστε $y_i=1$ εάν και μόνο εάν θα χρησιμοποιηθεί ο δέκτης στο σημείο i και $x_{ij} \in \{0,1\}$ τέτοιες ώστε $x_{ij}=1$ εάν και μόνο εάν ο δέκτης j θα λαμβάνει στοιχεία από το μετρητή i. Τότε το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1+\cdots+y_8 \\
\text{υ.π.} \quad & \sum_{i\in A_j} x_{ij} \le 3y_j, \qquad j=1,\ldots,8 \\
& \sum_{j\in B_i} x_{ij} \ge 1, \qquad i=1,\ldots,10 \\
& x_{ij}, y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Όπου A_j είναι το σύνολο των μετρητών με τους οποίους μπορεί να επικοινωνήσει ο δέκτης j και B_i είναι το σύνολο των δεκτών που μπορούν να δεχτούν δεδομένα από το μετρητή i.

ΑΣΚΗΣΗ Β.19

α) Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ερμηνεύεται ως εξής:

- Μεταβλητές απόφασης:
  $x_{ij}=1$ εάν η διδασκαλία του μαθήματος *i* ανατεθεί στην εταιρία *j*, και $x_{ij}=0$ διαφορετικά.
  $y_j=1$ εάν στην εταιρία *j* ανατεθεί ένα τουλάχιστον μάθημα και $y_j=0$ διαφορετικά.
- Αντικειμενική συνάρτηση: αναφέρεται στο συνολικό κόστος οργάνωσης του προγράμματος εκπαίδευσης, και αναλύεται σε δύο διαστάσεις:
  - Το μεταβλητό κόστος των μαθημάτων: $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}$
  - Το σταθερό κόστος, το οποίο αναφέρεται στις εταιρίες που θα χρησιμοποιηθούν: $\sum_{j=1}^{5} T_j y_j$
- Περιορισμοί:
  - Ο 1ος περιορισμός διασφαλίζει ότι:
    $$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} > 0 \Rightarrow y_j = 1$$
    Δηλαδή εάν ανατεθεί έστω και ένα μάθημα στην εταιρία *j*, τότε $y_j=1$
  - Ο 2ος περιορισμός διασφαλίζει ότι κάθε μάθημα θα ανατεθεί σε μία μόνο εταιρία συμβούλων.

β) Οι δύο αυτοί επιπλέον περιορισμοί διατυπώνονται ως εξής:

(1) $y_k + y_\ell \le 1$

(2) $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 \ge 2$

ΑΣΚΗΣΗ Β.20

1) Οι μεταβλητές απόφασης είναι:

   $x_{ij}=1$ εάν η περιοχή i εξυπηρετηθεί από το κέντρο στο σημείο j, διαφορετικά $x_{ij}=0$

   $y_j=1$ εάν κατασκευαστεί κέντρο υγείας στο σημείο j, διαφορετικά $y_j=0$

   Οι περιορισμοί ερμηνεύονται ως εξής

   - Ο 1^{ος} περιορισμός διασφαλίζει ότι κάθε περιοχή θα καλυφθεί από ένα μόνο κέντρο.
   - Σύμφωνα με τον 2^{ο} περιορισμό εάν $y_j=0$ τότε $x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{Lj}=0$, δηλαδή εάν δεν φτιαχτεί το κέντρο υγείας j, τότε καμία περιοχή δεν μπορεί να ανατεθεί σε αυτό
   - Σύμφωνα με τον 3^{ο} περιορισμό εάν $y_j=1$ τότε $x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{Lj}\geq 1$, δηλαδή εάν φτιαχτεί το κέντρο υγείας j, τότε τουλάχιστον μία περιοχή θα πρέπει να ανατεθεί σε αυτό
   - Στον 4^{ο} περιορισμό το άθροισμα $d_{i1}x_{i1}+d_{i2}x_{i2}+\ldots+d_{iJ}x_{iJ}$ αναπαριστά την απόσταση της περιοχής i από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί. Στο πρόβλημα υπάρχουν L τέτοιοι περιορισμοί, ένας για κάθε περιοχή. Οι περιορισμοί αυτοί είναι της μορφής:

     $D\geq$ απόσταση περιοχής 1 από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί

     $D\geq$ απόσταση περιοχής 2 από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί

     ....

     $D\geq$ απόσταση περιοχής L από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί

     Δηλαδή η μεταβλητή απόφασης D αντιστοιχεί σε έναν αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τη μέγιστη απόσταση μιας οποιαδήποτε περιοχής από το κέντρο που θα ανατεθεί.
   - Στον 5^{ο} περιορισμό το άθροισμα $p_1x_{1j}+p_2x_{2j}+\ldots+p_Lx_{Lj}$ αναπαριστά τον συνολικό πληθυσμό των περιοχών που θα εξυπηρετούνται από το κέντρο στο σημείο j. Επομένως η μεταβλητή s_j αναπαριστά τον πληθυσμό που θα εξυπηρετείται από το κέντρο j.
   - Στον 6^{ο} περιορισμό το άθροισμα $1000s_1+1000s_2+\ldots+1000s_J$ αναπαριστά το κόστος κατασκευής των κέντρων. Επομένως ο περιορισμός αυτός διασφαλίζει ότι το συνολικό κόστος κατασκευής των κέντρων δεν θα υπερβεί το διαθέσιμο προϋπολογισμό B.

   Τέλος, με βάση την ερμηνεία του 3^{ου} περιορισμού εξάγεται το συμπέρασμα ότι στόχος αυτού του ακέραιου ΓΠ είναι η διαμόρφωση ενός σχεδιασμού που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόσταση μεταξύ των περιοχών και των κέντρων από τα οποία θα εξυπηρετούνται.

2) Εάν $z=0$, τότε οι δύο περιορισμοί διατυπώνονται ως εξής:

   $y_1+y_2\geq 0$

   $y_3+y_4\geq 2$

   Ο 1^{ος} περιορισμός ισχύει εξορισμού, ενώ ο 2^{ος} διασφαλίζει ότι θα φτιαχτούν κέντρα στα σημεία 3 και 4.

   Εάν $z=1$, τότε οι δύο περιορισμοί διατυπώνονται ως εξής:

   $y_1+y_2\geq 2$

   $y_3+y_4\geq 0$

   Ο 1^{ος} περιορισμός διασφαλίζει ότι θα φτιαχτούν κέντρα στα σημεία 1 και 2, ενώ ο 2^{ος} ισχύει εξορισμού.

   Επομένως, οι δύο περιορισμοί μαζί υποδηλώνουν ότι θα πρέπει να φτιαχτούν κέντρα στα σημεία 1 και 2 (περίπτωση $z=1$) ή/και στα σημεία 3 και 4 (περίπτωση $z=0$).

ΑΣΚΗΣΗ Β.21

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης:

$x_{ij}=1$ εάν η μηχανή i θα εκτελέσει την εργασία j, διαφορετικά $x_{ij}=0$

$y_i = 1$ εάν χρησιμοποιηθεί η μηχανή i, διαφορετικά $y_i = 0$

Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 42x_{11} + 70x_{12} + 93x_{13} + 85x_{22} + 45x_{23} + 58x_{31} + 37x_{34} + 58x_{41} + 55x_{43} + 62x_{44} + \\
& 30y_1 + 40y_2 + 50y_3 + 60y_4 \\
\text{Υπό:} \quad & x_{11} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1 \\
& x_{34} + x_{44} = 1 \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - 4y_1 \le 0 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} - 4y_2 \le 0 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} - 4y_3 \le 0 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} - 4y_4 \le 0 \\
& x_{ij}, y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.22

Οι μεταβλητές απόφασης είναι:

x_i =ποσότητα που θα παραχθεί από το προϊόν *i*

y_i =1 εάν και μόνο εάν το προϊόν *i* θα παραχθεί και 0 διαφορετικά

Η αντικειμενική συνάρτηση μετρά το κέρδος από την παραγωγή των προϊόντων (έσοδα από την παραγωγή μείον τα έξοδα προετοιμασίας για την παραγωγή των προϊόντων).

Οι 2 πρώτοι περιορισμοί καθορίζουν τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών x_1, y_1 και x_2, y_2. Συγκεκριμένα, διασφαλίζουν ότι:

$$x_1 > 0 \Leftrightarrow y_1 = 1$$
$$x_2 > 0 \Leftrightarrow y_2 = 1$$

Οι περιορισμοί 3 και 4 σχετίζονται με την παραγωγική ικανότητα των εργοστασίων. Τα δεξιά μέλη των περιορισμών είναι ο διαθέσιμος χρόνος λειτουργίας των εργοστασίων, ενώ οι συντελεστές των μεταβλητών αφορούν το χρόνο που απαιτεί η παραγωγή ενός τεμαχίου κάθε προϊόντος σε κάθε εργοστάσιο. Για την ερμηνεία της μεταβλητής απόφασης z, έστω ότι $z = 0$. Τότε:

$$0.02x_1 + 0.025x_2 \le 500$$
$$0.025x_1 + 0.04x_2 \le 700 + M$$

Δηλαδή εάν $z = 0$, τότε στο πρόβλημα εισάγεται ο περιορισμός που αφορά το 1^o εργοστάσιο, ενώ επειδή $M \gg 0$, ο περιορισμός που αφορά το 2^o εργοστάσιο ουσιαστικά διαγράφεται αφού κάθε λύση τον ικανοποιεί. Επομένως, η περίπτωση $z = 0$ αντιστοιχεί στην παραγωγή των προϊόντων από το 1^o εργοστάσιο.

Αντίστοιχα, εάν $z = 1$:

$$0.02x_1 + 0.025x_2 \le 500 + M$$
$$0.025x_1 + 0.04x_2 \le 700$$

Δηλαδή εάν $z = 1$, τότε στο πρόβλημα εισάγεται ο περιορισμός που αφορά το 2^o εργοστάσιο, ενώ ο περιορισμός που αφορά το 1^o εργοστάσιο ουσιαστικά διαγράφεται αφού κάθε λύση τον ικανοποιεί. Επομένως, η περίπτωση $z = 1$ αντιστοιχεί στην παραγωγή των προϊόντων από το 2^o εργοστάσιο.

ΑΣΚΗΣΗ Β.23

1) Ορίζονται μεταβλητές απόφασης x_{ij} που αναπαριστούν την ποσότητα από την παραγωγή του εργοστασίου i που θα χρησιμοποιηθεί για την κάλυψη της ζήτησης του πελάτη j. Επίσης ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης y_j που αναπαριστούν εάν θα κατασκευαστεί το εργοστάσιο j ($y_j = 1$) ή όχι ($y_j = 0$). Το ακέραιο ΓΠ διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 8x_{21} + 7x_{22} + 2x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} + x_{33} + 500y_1 + 500y_2 + 500y_3 \\ \text{Υπ} & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 20 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 40 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 50 \\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} - 100y_1 \leq 0 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} - 100y_2 \leq 0 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} - 100y_3 \leq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

2) Θα πρέπει να προστεθεί ο περιορισμός $x_{11} + x_{12} + x_{13} - 30y_1 \geq 0$. Με βάση αυτόν τον περιορισμό, εάν κατασκευαστεί το εργοστάσιο Ε1 ($y_1 = 1$), τότε $x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 30$ (η παραγωγή του εργοστασίου θα είναι τουλάχιστον 30.000 μονάδες), διαφορετικά εάν δεν κατασκευαστεί ($y_1 = 0$), τότε σύμφωνα με τον 4^{ο} περιορισμό και τη μη αρνητικότητα των μεταβλητών απόφασης, προκύπτει ότι $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ Β.24

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης $y_{ij} \in \{0, 1\}$, τέτοιες ώστε $y_{ij} = 1$ εάν και μόνο εάν στον πελάτη j παραδοθούν i αεροσκάφη. Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \max & -y_{11} + 2y_{21} + 4y_{31} + y_{12} + 5y_{22} + y_{13} + 3y_{23} + 5y_{33} + 6y_{53} + 7y_{53} \\ \text{Υπ} & y_{11} + y_{21} + y_{31} = 1 \\ & y_{21} + y_{22} = 1 \\ & y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35} = 1 \\ & 0.2(y_{11} + 2y_{21} + 3y_{31}) + 0.4(y_{21} + 2y_{22}) + 0.2(y_{31} + 2y_{32} + 3y_{33} + 4y_{34} + 5y_{35}) \leq 1 \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.25

- Η αντικειμενική συνάρτηση μετρά το συνολικό χρόνο μετακίνησης όλων των πωλητών.
- Το 1^{ο} ζεύγος περιορισμών διασφαλίζει ότι θα γίνουν m μετακινήσεις από το σημείο 0 προς άλλους προορισμούς και αντίστοιχα m μετακινήσεις από άλλους προορισμούς προς το σημείο 0. Δηλαδή κάθε πωλητής θα μετακινηθεί από το σημείο εκκίνησης προς κάποιο προορισμό και όλοι οι πωλητές θα πρέπει να επιστρέψουν στο σημείο εκκίνησης.
- Ο 3^{ος} περιορισμός διασφαλίζει ότι από κάθε σημείο i θα πρέπει να υπάρχει μια μετακίνηση προς ένα από τα υπόλοιπα σημεία. Αντίστοιχα, ο 4^{ος} περιορισμός διασφαλίζει ότι η μετακίνηση σε κάποιο σημείο j θα πρέπει να γίνει από έναν από τους υπόλοιπους προορισμούς.
- Ο τελευταίος προορισμός εξασφαλίζει ότι δεν μπορούν να υπάρξουν υποδιαδρομές, δηλαδή κλειστές διαδρομές μεταξύ ενός συνόλου προορισμών που δεν συνδέονται με τους υπόλοιπους. Πχ. έστω ότι υπάρχει μια κλειστή διαδρομή μεταξύ των προορισμών 1, 2 και 3, έτσι ώστε $x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$ και $x_{31} = 1$. Τότε:

$$t_1 - t_2 + (n - m + 1)x_{12} \leq n - m \qquad t_2 - t_3 + (n - m + 1)x_{23} \leq n - m \qquad t_3 - t_1 + (n - m + 1)x_{31} \leq n - m$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι $3(n-m+1) \le 3(n-m) \Rightarrow 3 \le 0$ που είναι αδύνατο.

Στους περιορισμούς αυτούς οι μεταβλητές t υποδηλώνουν τη σειρά με την οποία γίνεται η μετακίνηση στους προορισμούς. Πχ αν $x_{ij} = 1$ (υπάρχει μετακίνηση από το σημείο i στο j), τότε ο περιορισμός διαμορφώνεται ως $t_j \ge t_i + 1$, δηλαδή η σειρά t_j του προορισμού j στη διαδρομή που ακολουθεί κάποιος πωλητής θα πρέπει να έπεται της σειράς του προορισμού i. Διαφορετικά, εάν $x_{ij} = 0$ (δεν υπάρχει μετακίνηση από το σημείο i στο j), τότε ο περιορισμός διαμορφώνεται ως $t_i - t_j \le n - m$, δηλαδή η διαφορά μεταξύ της σειράς με την οποία θα γίνει η μετακίνηση στους προορισμούς i και j θα είναι το πολύ $n-m$ (εφόσον ο μέγιστος αριθμός προορισμών που μπορεί να επισκεφτεί ένας πωλητής είναι $n-m+1$, η διαφορά $t_i - t_j$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $n-m$).

ΑΣΚΗΣΗ Β.26

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης $x_i \ge 0$ που υποδεικνύουν τη ποσότητα νερού που θα επεξεργάζεται κάθε μονάδα i και επιπλέον μεταβλητές $y_i \in \{0, 1\}$ τέτοιες ώστε $y_i = 1$ εάν κατασκευαστεί η μονάδα i, διαφορετικά $y_i = 0$. Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 500\,000 y_1 + 300\,000 y_2 + 100\,000 y_3 \\
\text{Υπ} & 0.4x_1 + 0.25x_2 + 0.2x_3 \ge 80\,000 \\
 & 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.25x_3 \ge 50\,000 \\
 & 20\,000 y_1 \le x_1 \le 100\,000 y_1 \\
 & 20\,000 y_2 \le x_2 \le 200\,000 y_2 \\
 & 20\,000 y_3 \le x_3 \le 150\,000 y_3 \\
 & x_i \ge 0 \\
 & y_{ij} \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.27

Ορίζονται μεταβλητές $x_{ij} \in \{0,1\}$ και $y_j \in \{0,1\}$, τέτοιες ώστε $x_{ij} = 1$ μόνο εάν το μήνυμα i περιληφθεί στο διάλειμμα j (προφανώς χρειάζονται το πολύ 8 διαλείμματα όσες και οι καταχωρήσεις) και $y_j = 1$ μόνο εάν χρησιμοποιηθεί το διάλειμμα j. Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$
\begin{array}{lll}
\min & y_1 + y_2 + \ldots + y_8 & \\
\text{Υπ} & 15x_{1j} + 16x_{2j} + 20x_{3j} + 25x_{4j} + 30x_{5j} + 35x_{6j} + 40x_{7j} + 50x_{8j} \le 60 y_j & j = 1, 2, \ldots, 8 \\
 & x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{i8} = 1 & i = 1, 2, \ldots, 8 \\
 & x_{3j} + x_{4j} \le 1 & j = 1, 2, \ldots, 8 \\
 & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} &
\end{array}
$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.28

1. Ορίζονται μεταβλητές $x_i \in \{0,1\}$, τέτοιες ώστε $x_i = 1$ μόνο εάν χρηματοδοτηθεί το έργο i (διαφορετικά $x_i = 0$). Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$
\begin{array}{ll}
\max & p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_N x_N \\
\text{Υπ} & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N \le C \\
 & x_1 + x_2 + \ldots + x_N \le K \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

2. Ορίζονται επιπλέον μεταβλητές $y_j \in \{0,1\}$, τέτοιες ώστε $y_j = 1$ μόνο εάν χρηματοδοτηθούν όλα τα έργα της ομάδας *j*. Συμβολίζοντας ως G_j το σύνολο των έργων της ομάδας *j* και ως n_j το αντίστοιχο πλήθος των έργων της ομάδας, το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll}
\max & (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_N x_N) + (s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_R y_R) \\
\text{Υπ} & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N \le C \\
& x_1 + x_2 + \ldots + x_N \le K \\
& \sum_{i \in G_j} x_i - n_j y_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, R \\
& x_i, y_j \in \{0, 1\}
\end{array}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει υπόψη τόσο το όφελος από την αυτοτελή υλοποίηση των έργων, όσο και τα συνεργατικά οφέλη $s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_R y_R$. Ο 3[ος] περιορισμός εξασφαλίζει ότι εάν $y_j = 1$, τότε θα υλοποιηθούν όλα τα έργα της ομάδας *j*, δηλαδή $\sum_{i \in G_j} x_i = n_j$, ενώ εάν $y_j = 0$, τότε θα υλοποιηθούν μόνο κάποια έργα της ομάδας *j* (ή και κανένα), δηλαδή $\sum_{i \in G_j} x_i \ge 0$

ΑΣΚΗΣΗ Β.29

Ορίζονται μεταβλητές $x_i \in \{0,1\}$ τέτοιες ώστε $x_i = 1$ μόνο εάν υλοποιηθεί η επιλογή E_i. Επίσης ορίζεται μια μεταβλητή απόφασης $y \in \{0,1\}$ τέτοια ώστε εάν $y = 0$ τότε πρέπει να υλοποιηθεί τουλάχιστον μία από τις επιλογές Ε1 και Ε7, ενώ εάν $y = 1$ τότε πρέπει να υλοποιηθεί τουλάχιστον μία από τις επιλογές Ε3 και Ε8. Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{lll}
\max & 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 5x_5 + 2x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 10x_9 + 7x_{10} & \\
\text{Υπ} & 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 8x_9 + 7x_{10} \le 30 & \text{(περιορισμός κόστους)} \\
& x_4 + x_5 + x_6 \le 1 & \text{(περιορισμός για τις Ε4-Ε6)} \\
& -x_2 + x_{10} \le 0 & \text{(περιορισμός για τις Ε2 \& Ε10)} \\
& x_1 + x_7 + My \ge 1 & \\
& x_3 + x_8 + M(1-y) \ge 1 & \\
& x_i, y \in \{0, 1\} &
\end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β.30

Ορίζονται μεταβλητές $x_{ij} \in \{0,1\}$ και $y_j \in \{0,1\}$, τέτοιες ώστε $x_{ij} = 1$ μόνο εάν ο πωλητής *i* ανατεθεί στον πελάτη *j* και $y_j = 1$ μόνο εάν χρησιμοποιηθεί ο πωλητής j. Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{lll}
\min & y_1 + y_2 + \ldots + y_m & \\
\text{Υπ} & x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{im} = 1 & i = 1, 2, \ldots, n \\
& c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \ldots + c_n x_{nj} \le U y_j & j = 1, 2, \ldots, m \\
& c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \ldots + c_n x_{nj} \ge L y_j & j = 1, 2, \ldots, m \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} &
\end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.1

1) $\max \; -3x_1 - 2x_2$

υπ. $x_1 \le 4$

$x_1 + 3x_2 \le 15$

$-2x_1 - x_2 \le -10$

$x_1, x_2 \geq 0$

C_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$	1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$	-2	-1	0	0	1	-10
	c	-3	-2	0	0	0	
	$\bar{c}$	-3	-2	0	0	0	$z=0$

(δυϊκός αλγόριθμος)

C_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
0	$\bar{1}$	0	-0.5	1	0	0.5	-1
0	$\bar{2}$	0	2.5	0	1	0.5	10
-3	1	1	0.5	0	0	-0.5	5
	c	-3	-2	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	-0.5	0	0	-1.5	$z=-15$

C_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
-2	2	0	1	-2	0	-1	2
0	$\bar{2}$	0	0	5	1	3	5
-3	1	1	0	1	0	0	4
	c	-3	-2	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	0	-1	0	-2	$z=-16$

Βέλτιστη λύση γιατί $x_B \geq 0$

2) α) Τρεις βασικές λύσεις έχουμε οποίων μόνο η τελευταία είναι ΒΕΛ

β) Για την λύση του 1ου πίνακα $u_1 = u_2 = u_3 = 0$

" " " " 2ου " $u_1 = u_2 = 0$ και $u_3 = 1.5$

" " " " 3ου " $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 2$

γ) Όλες

ΑΣΚΗΣΗ Γ.2

$\min \; y_1 + y_2 + y_3$

υπ. $x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 + y_1 = -5$

$-2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + y_2 \geq 3$

$3x_1 - 2x_3 + 4x_4 + y_3 = -1$

$x_1, \; x_3, \; x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.3

(1) Το ΓΠ-Μ δεν μπορεί να είναι αδύνατο, γιατί η λύση $x=0$ και $y=b$ είναι προφανώς εφικτή

(2) Το δυϊκό είναι:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b^T u \\
\text{υπ.} \quad & A^T u \geq c \\
& u \geq -Me \\
& u \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Αν το ΓΠ-Μ είναι μη φραγμένο το δυϊκό του είναι αδύνατο

(3)

Όχι γιατί το δυϊκό του ΓΠΑ είναι:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b^T u \\
\text{υπ.} \quad & A^T u \geq c \\
& u \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Η μόνη διαφορά αυτού του ΓΠ από το δυϊκό του ΓΠ-Μ είναι ο περιορισμός $u \geq -Me$. Αφού όμως το Μ είναι ένας μεγάλος αριθμός, τότε δεν υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ ώστε $u \geq -Me$. Άρα εάν το δυϊκό του ΓΠ-Μ είναι αδύνατο σημαίνει ότι οι περιορισμοί $A^T u \geq c$ δεν είναι εφικτοί και άρα το δυϊκό του ΓΠΑ είναι επίσης αδύνατο. Επομένως το ΓΠΑ όχι είναι είτε μη φραγμένο είτε αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.4

1)

Πρωτεύον:

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &\text{υπ.}\quad Ax \le b \\ &\qquad\ x \ge 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό:

$$\left.\begin{aligned} &\min\ b^T u \\ &\text{υπ.}\quad A^T u \ge c \\ &\qquad\ u \ge 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\max\ -b^T u \\ &\text{υπ.}\quad -A^T u \le -c \\ &\qquad\ u \ge 0 \end{aligned}$$

Άρα πρέπει: 1) $c = -b$

2) $A = -A^T$

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} &\max\ 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{υπ.}\quad 4x_2 \le -3 \\ &\qquad -4x_1 \le -2 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Δυϊκό}} \left.\begin{aligned} &\min\ -3u_1 - 2u_2 \\ &\text{υπ.}\quad -4u_2 \ge 3 \\ &\qquad 4u_1 \ge 2 \\ &\qquad u_1, u_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\max\ 3u_1 + 2u_2 \\ &\text{υπ.}\quad 4u_2 \le -3 \\ &\qquad -4u_1 \le -2 \\ &\qquad u_1, u_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2)

Το δυϊκό είναι: $\min\ c^T u$

υπ. $A^T u = c$

Αν $A = A^T$ τότε κάθε εφικτή λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή και στο δυϊκό και μάλιστα $c^T x = c^T u$. Άρα η x είναι βέλτιστη

ΑΣΚΗΣΗ Γ.5

1)

Περιττεύει ο περιορισμός 2, γιατί η $\bar{\bar{2}}$ είναι βασική με τιμή 0 και $y_{\bar{\bar{2}}j} = 0$ για $j = 1, 2, 3, 4$. Διαγράφοντας τις τεχνητές μεταβλητές διαμορφώνεται ο ακόλουθος πίνακας της φάσης ΙΙ:

Βάση	1	2	3	4	x_B
1	1	0	0,5	0	2.5
2	0	1	1.17	0.33	5.83

Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι:

$$B^{-1} = \left[y_{\bar{1}} \quad y_{\bar{\bar{3}}} \right] = \begin{bmatrix} 0.13 & -0.13 \\ 0.29 & 0{,}04 \end{bmatrix}$$

2)

Στην περίπτωση αυτή δεν περιττεύει κάποιος περιορισμός. Για τη μετάβαση στη φάση II θα πρέπει να εξαχθεί από τη βάση η $\bar{\bar{1}}$ και στη θέση της να εισαχθεί η 4. Χρησιμοποιώντας λοιπόν ως οδηγό στοιχείο το $y_{\bar{\bar{2}}4}=-1$ ο νέος πίνακας simplex της φάσης I είναι:

c_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	x_B
0	1	1	0	0.5	0	0.13	0	-0.13	2.5
0	4	0	0	0	1	0.25	-1	-0.25	0
0	2	0	1	1.17	0	0.21	0.33	0.13	5.83
	c	0	0	0	0	-1	-1	-1	
	$\bar{c}$	0	0	0	0	-1	-1	-1	0

Ο αρχικός πίνακας της φάσης II είναι:

Βάση	1	2	3	4	x_B
1	1	0	0.5	0	2.5
4	0	0	0	1	0
2	0	1	1.17	0	5.83

και ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι:

$$B^{-1}=\left[y_{\bar{\bar{1}}} \quad y_{\bar{\bar{2}}} \quad y_{\bar{\bar{3}}}\right]=\begin{bmatrix} 0.13 & 0 & -0.13 \\ 0.25 & -1 & -0.25 \\ 0.21 & 0.33 & 0.13 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.6

1)

Δυϊκό: $\min \; y=0$

$\text{υπ.} \; A^T u \geq c$

$u \geq 0$

2)

- Αν υπάρχει $u \geq 0$ ώστε $A^T u \geq c$ τότε το δυϊκό είναι εφικτό με $y^* = 0$. Άρα η λύση $x = 0$ που είναι εφικτή στο πρωτεύον είναι βέλτιστη
- Αν δεν υπάρχει $u \geq 0$ ώστε $A^T u \geq c$ τότε το δυϊκό είναι αδύνατο, άρα το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Αδύνατο όμως δεν μπορεί να είναι αφού η λύση $x = 0$ είναι εφικτή, άρα το πρόβλημα είναι μη φραγμένο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.8

(1) Λάθος: σε περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων κάθε σημείο μεταξύ δύο ΒΕΛ που είναι βέλτιστες είναι επίσης βέλτιστη λύση αλλά όχι ΒΕΛ

(2) Το 1ο μέρος είναι σωστό καθώς προκύπτει από τη συμπληρωματική χαλαρότητα. Το δεύτερο είναι λάθος γιατί $u_i = 0$ επίσης ικανοποιεί τη συμπληρωματική χαλαρότητα

(3) Αφού υπάρχουν 2 πηγές και 2 προορισμοί, κάθε ΒΕΛ έχει 3 βασικές μεταβλητές. Στην προκειμένη περίπτωση υπάρχουν 4 διαδρομές άρα αυτή δεν μπορεί να είναι ΒΕΛ και επομένως είναι λάθος

(4) Λάθος: κάθε ΓΠ σε πρότυπη μορφή έχει λύση εάν και μόνο εάν και το δυϊκό του έχει λύση:

$$\min b^T u$$
$$A^T u \geq c$$

Η αλλαγή του b δεν επηρεάζει την εφικτότητα του δυϊκού μπορεί να το κάνει όμως μη φραγμένο άρα το πρωτεύον μπορεί να γίνει αδύνατο αλλά όχι μη φραγμένο

ΑΣΚΗΣΗ Γ.12

· Με την αλλαγή του β' μέλους οι τιμές των βασικών μεταβλ. γίνονται: $x_{B_1} = 2 + 1 \cdot (-3) = -1$ και $x_{B_2} = 2 + 1 \cdot 2 = 4$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:

		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
1	2	0	1	5	5	-3	-1
5	1	1	0	-3	-3	2	4
		5	1	-12	-M	0	
		0	0	-2	10-M	-7	z=19

Αυτή η λύση δεν είναι εφικτή στο πρωτεύον όμως στο δυϊκό είναι εφικτή. Άρα εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόρ. simplex με εισερχόμενη την $\bar{2}$ στη θέση της 2. Ο νέος πίνακας είναι:

		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
0	$\bar{2}$	0	-0.33	-1,67	-1,67	1	0.33
5	1	1	0.67	0,33	0.33	0	3,33
		5	1	-12	-M	0	
		0	-0,33	-13,67	-1,67-M	0	z=16.67

Η λύση αυτή είναι βέλτιστη γιατί $x_B \geq 0$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.13

Με τις αλλαγές που γίνονται το ΓΠ γίνεται:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{υπ} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = 7u_1 + 10u_2 \\ \text{υπ.} \quad & u_1 + 3u_2 \geq 3 \\ & 2u_1 + 3u_2 \geq 7 \\ & u_1 + 2u_2 \geq 3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Η λύση $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 10/3, 0)$ είναι εφικτή στο πρωτεύον με $z^* = 70/3$

Ομοίως η λύση $(u_1^*, u_2^*) = (0, 7/3)$ είναι εφικτή στο δυϊκό με $f^* = 70/3$

Από θεώρημα ασθενούς δυϊκότητας αφού x^*, u^* είναι εφικτές στο πρωτεύον και στο δυϊκό αντίστοιχα και $z^* = f^*$, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η x^* είναι βέλτιστη.

Γιατί: Το θεώρημα ασθενούς δυϊκότητας λέει ότι εάν x, u εφικτές στο Π και Δ τότε: $c^T x \leq b^T u$

Εδώ οι x^*, u^* είναι εφικτές στα Π και Δ και $c^T x^* = b^T u^*$

Άρα $c^T x \leq b^T u^* = c^T x^* \Rightarrow c^T x \leq c^T x^* \Rightarrow$ η x^* είναι βέλτιστη

ΑΣΚΗΣΗ Γ.16

α) Μια προφανής λύση είναι:

ή: $\begin{cases} x_i = c_i \text{ και } y_i = 0 \text{ για κάθε } c_i \leq 0 \\ x_i = 0 \text{ και } y_i = -c_i \quad \text{"} \quad \text{"} \quad c_i > 0 \end{cases}$

β) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 u_1 + c_2 u_2 \\ \text{υπ.} \quad & -b_1 \leq u_1 \leq -a_1 \\ & -b_2 \leq u_2 \leq -a_2 \\ & u_1, u_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αν το δυϊκό ήταν μη φραγμένο, τότε το πρωτεύον θα ήταν αδύνατο. Αυτό όμως δεν γίνεται γιατί το πρωτεύων είναι εφικτό.

γ) Θα πρέπει το δυϊκό να είναι εφικτό, δηλαδή:

$a_i \leq b_i$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.17

Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι όμως γνωστό ότι:

$$Y = B^{-1}A \Rightarrow A = BY = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης:

$$x_B = B^{-1}b \Rightarrow b = Bx_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι περιορισμοί είναι:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_{\bar{1}} = 5$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_{\bar{2}} = 3$$

Επιπλέον η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής είναι:

$$17 = 2c_1 + c_3 \quad (1)$$

και το οριακό καθαρό εισόδημα της $\bar{1}$ είναι:

$$-1 = -c_1 + c_3 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $c_1 = 6$ και $c_3 = 5$

Το ΟΚΕ της x_2 είναι:

$$-5 = c_2 - (-2c_1 + 5c_3) \Rightarrow c_2 = 8$$

Αντίστοιχα το ΟΚΕ της x_4 είναι:

$$-2 = c_4 - (c_1 + c_3) \Rightarrow c_4 = 9$$

Άρα το τελικό ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\ \text{υπ.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.18

C_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	x_B
0	$\bar{1}$	2	6	5	4	1	6
	c	2	3	4	2	0	
	$\bar{c}$	2	3	4	2	0	0

$\theta_1 = 6/2 = 3 \rightarrow$ αύξηση της αντικειμενικής κατά $\bar{c}_1 \times 3 = 6$

$\theta_2 = 6/6 = 1 \rightarrow$ " $\bar{c}_2 \times 3 = 3$

$\theta_3 = 6/5 \rightarrow$ " $\bar{c}_3 \times \frac{6}{5} = 24/5$

$\theta_4 = 6/4 \rightarrow$ " $\bar{c}_4 \times \frac{6}{4} = 3$

Εισάγεται η 1:

C_B	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	x_B
2	1	1	3	5/2	2	1/2	3
	c	2	3	4	2	0	
	$\bar{c}$	0	-3	-1	-2	-1	6

ΑΣΚΗΣΗ Γ.19

α) Ο δυικός αλγόριθμος χρησιμοποιείται γιατί όσο προχωρά η διαδικασία επίλυσης εισάγονται επιπλέον περιορισμοί (ένας-ένας)

β) Έχει ~~το πολύ~~ m+n-1 βασικές μεταβλητές
ή: κάθε ΒΕΛ έχει το πολύ m+n-1 διαφορές

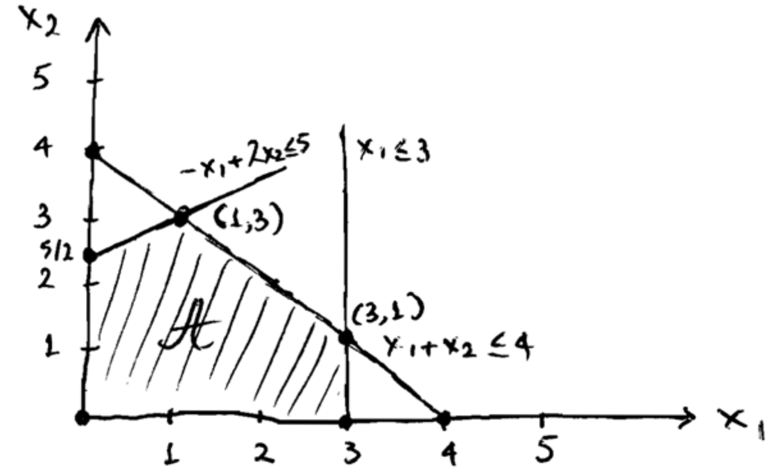
γ) Μεταβολές εντός ορίων είναι πιθανό να καταστήσουν το πρόβλημα αδύνατο. Αυτό διερευνάται με το δυικό αλγόριθμο

δ) Το ΓΠ της φάσης Ι είναι πάντα φραγμένο

ε) Αν η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος δεν είναι μοναδική, τότε η βέλτιστη λύση του δυικού είναι εκφυλισμένη (αλλά μοναδική)

ΑΣΚΗΣΗ Γ.20

α)



$f(0,0)=0 \qquad f(1,3)=5$

$f(0,5/2)=5/2 \qquad f(3,1)=7$

$f(3,0)=6$

Άρα η λύση (3,1) είναι βέλτιστη. Επιπλέον, αφού καμ
άλλη γειτονική ΒΕΛ δεν έχει ίδια τιμή στην αντικειμεν
είναι μοναδική βέλτιστη λύση

β) Στη λύση αυτή είναι:

$x_1=3$, $x_2=1$ και $x_{\bar{1}}=6$

Αυτές είναι οι βασικές μεταβλητές, αφού είναι μη μηδενι
Ο πίνακας της βάσης είναι:

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

γ) Χρειάζεται ο αντίστροφος πίνακας της βάσης, ο οποίος β
κάτω από τις μεταβλητές $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$. Αφού οι $\bar{1}$, $\bar{2}$ είναι στ
βάση, ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, από τις σχέσεις $Y=B^{-1}A$ και $x_B=B^{-1}b$, ο πίνα
simplex είναι:

c Βάση 1 2 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ x_B

C_B	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x_B
0	$\bar{1}$	0	0	1	-2	3	6
1	2	0	1	0	1	-1	1
2	1	1	0	0	0	1	3
	c	2	1	0	0	0	
	$\bar{c}$	0	0	0	-1	-1	7

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση

δ) $K\Phi(c_2)=1+\left(\frac{-1}{1}\right)=0$ και $A\Phi(c_2)=1+\left(\frac{-1}{-1}\right)=2$

Ο συντελεστής της u_1 στη συνάρτηση του δυικού αν
στο β' μέλος του $1^{ου}$ περιορισμού. Οπότε υπολογίζοντα
ΚΦ, ΑΦ για τον περιορισμό αυτό:

$K\Phi(b_1)=5+\left(\frac{-6}{1}\right)=-1$

$A\Phi(b_1)=\infty$ (αφού δεν υπάρχει αρνητικό στοιχείο στη
Άρα, τα φράγματα για το συντελεστή της u_1 στη συ
του δυικού είναι:

$K\Phi=-\infty$ και $A\Phi=1$

) Από το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρό
ξέρουμε ότι:

$x^T\bar{u}=0$ και $u^T\bar{x}=0$

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} x_1\cdot u_{\bar{1}}=0 \\ x_2\cdot u_{\bar{2}}=0 \\ x_{\bar{1}}\cdot u_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_{\bar{1}}=0 \\ u_{\bar{2}}=0 \\ u_1=0 \end{array}$$

Αφού $u_{\bar{1}}=u_{\bar{2}}=0$, οι περιορισμοί 1 και 2 του δυ
πρέπει να ικανοποιούνται ως ισότητες:

ΑΣΚΗΣΗ Γ.21

1) Το πρόβλημα είναι εφικτό γιατί η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1, 4, 0)$ ικανοποιεί τους περιορισμούς

2) Η κανονική μορφή του ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{Υπ.} & -x_2 + x_3 \leq -4 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Οπότε το δυικό είναι:

$$\left.\begin{array}{ll} \min & -4u_1 - u_2 \\ \text{Υπ.} & -u_2 \geq -1 \\ & -u_1 - u_2 \geq 2 \\ & u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{ll} \max & 4u_1 + u_2 \\ \text{Υπ.} & u_2 \leq 1 \\ & u_1 + u_2 \leq -2 \\ & -u_1 + u_2 \leq 1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Το δυικό είναι αδύνατο γιατί δεν μπορεί να είναι $u_1 + u_2 \leq -2$ όταν $u_1, u_2 \geq 0$.

3) Αφού το δυικό είναι αδύνατο, αυτό σημαίνει ότι το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Επειδή όμως στο ερώτημα (α) βρέθηκε ότι το πρωτεύον είναι εφικτό, τα παραπάνω δείχνουν ότι το πρωτεύον είναι μη φραγμένο

ΑΣΚΗΣΗ Γ.22

α) $\min \; 3u_1 + 2u_2$

υπ: $3u_1 + u_2 \geq 0$

$u_1 - u_2 \geq -4$

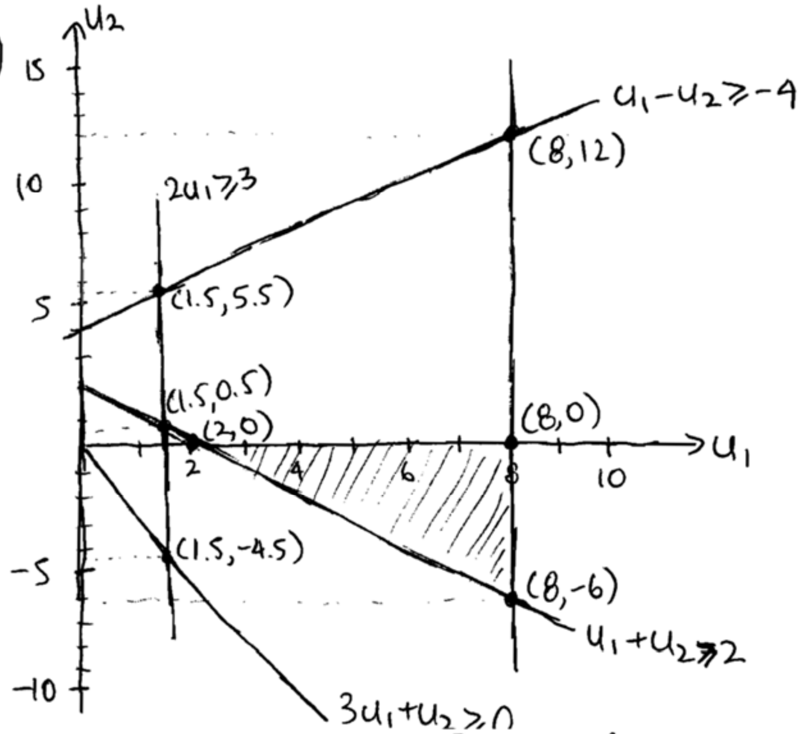
$2u_1 \geq 3$

$u_1 + u_2 \geq 2$

$-u_1 \geq -8$

$u_1 \in \mathbb{R}, \; u_2 \leq 0$

β)



$f(2,0) = 6$

$f(8,0) = 24$

$f(8,-6) = 12$

Άρα το βέλτιστο είναι στο (8,0)

γ) Στη βέλτιστη λύση του δυϊκού βασικές είναι οι:

$u_1, u_{\bar{1}}, u_{\bar{2}}, u_{\bar{3}}, u_{\bar{5}}$

Μη βασικές είναι οι

$u_2, u_{\bar{4}}$

Άρα στο πρωτεύον οι $x_{\bar{2}}$ και x_4 είναι βασικές.

Ο πίνακας της βάσης είναι

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος είναι:

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_{\bar{2}} \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.23

1) Το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με το δυϊκό αλγόριθμο, εφόσον γραφτεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -1/3x_1 - x_2 \\
\text{υ.π.} \quad & -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = -15 \\
& -x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_{\bar{2}} = -12 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ο πρώτος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		-1	-3	1	1	0	-15
0	$\bar{2}$		-1	-6	-3	0	1	-12
		$\mathbf{c}$	-1/3	-1	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	-1/3	-1	0	0	0	0

Εξάγεται η $\bar{1}$ και εισέρχεται είτε η 1 είτε η 2.

2) Στη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (15, 0, 0)$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 5. Στη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (7.5, 2.5, 0)$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι επίσης 5. Επομένως, αφού η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (15, 0, 0)$ το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και με τη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (7.5, 2.5, 0)$.

Αφού υπάρχουν δύο βέλτιστες λύσεις, εξάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Στη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (7.5, 2.5, 0)$ οι μεταβλητές απόκλισης είναι $x_{\bar{1}} = 0$ και $x_{\bar{2}} = 10.5$. Επομένως η λύση αυτή δεν είναι βασική εφικτή, γιατί υπάρχουν 3 μη μηδενικές μεταβλητές, ενώ κάθε βάση στο συγκεκριμένο ΓΠ έχει 2 βασικές μεταβλητές. Άρα δεν θα μπορούσε να βρεθεί ως βέλτιστη.

3) Στη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (15, 0, 0)$ οι μεταβλητές απόκλισης είναι $x_{\bar{1}} = 0$ και $x_{\bar{2}} = 3$. Επομένως με βάση το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας προκύπτουν τα εξής:

$$
\left.\begin{aligned} u_2 x_{\bar{2}} = 0 \Rightarrow u_2 = 0 \\ x_1 u_{\bar{1}} = 0 \Rightarrow u_{\bar{1}} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u_2 &= 0 \\ u_1 + u_2 &= -1/3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_2 &= 0 \\ u_1 &= -1/3 \end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.24

1) Το δυϊκό είναι:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3u_1 - 5u_2 + 2u_3 \\
\text{υ.π.} \quad & u_1 \qquad\quad + 2u_3 \geq -3 \\
& -2u_1 + u_2 - 3u_3 \geq -2 \\
& 3u_1 + 3u_2 - 7u_3 = 3 \\
& 4u_1 + 4u_2 - 4u_3 \leq -4 \\
& u_1 \geq 0 \\
& u_2 \leq 0 \\
& u_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

2) Το σωστό είναι το Γ, δηλαδή $u_1 = 0$.

3) Το σωστό είναι τα Α ή Γ, δηλαδή $-3x_1^* - 2x_2^* + 3x_3^* - 4x_4^* \le 9.5$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.25

1) Το δυϊκό είναι:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3u_1 + u_2 + 2u_3 \\
\text{υ.π.} & u_2 + 2u_3 \ge -3 \\
& u_1 + 3u_3 \ge 1 \\
& 2u_1 - 3u_2 \ge 2 \\
& u_1 \ge 0 \\
& u_2, u_3 \le 0
\end{array}
$$

2) Το δυϊκό μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής:

$$
\begin{array}{ll}
\max & -3u_1 + u_2' + 2u_3' \\
\text{υ.π.} & u_2' + 2u_3' \le 3 \\
& u_1 - 3u_3' \ge 1 \\
& 2u_1 + 3u_2' \ge 2 \\
& u_1, u_2', u_3' \ge 0
\end{array}
$$

Όπως φαίνεται αυτή η διατύπωση του δυϊκού είναι ίδια με το πρωτεύον. Επομένως η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1,3,0)$ που είναι εφικτή στο πρωτεύον, είναι εφικτή και στο δυϊκό ($u_1 = 1$, $u_2' = 3$, $u_3' = 0$). Επιπλέον στη λύση αυτή, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος και του δυϊκού είναι ίση με 0. Επομένως, η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1,3,0)$ είναι βέλτιστη στο πρωτεύον και η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.26

1) Το δυϊκό είναι:

$$
\begin{array}{ll}
\min & u_1 \\
\text{υ.π.} & u_1 \ge 2 \\
& -u_1 \ge -4 \\
& u_1 \ge 0
\end{array}
$$

Η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι η $u_1 = 2$

2) Σύμφωνα με τη βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι $(u_1, u_{\bar{1}}, u_{\bar{2}}) = (2,0,2)$. Επομένως σύμφωνα με τη συμπληρωματική χαλαρότητα θα πρέπει:

$$
\left.\begin{array}{r} u_1 x_{\bar{1}} = 0 \\ u_{\bar{2}} x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_{\bar{1}} = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array}
$$

3) Το δυϊκό γίνεται αδύνατο εάν $c_1 > 4$. Στην περίπτωση αυτή το πρωτεύον θα είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Αδύνατο όμως δεν μπορεί να είναι, γιατί η λύση $x_1 = x_2 = 0$ είναι εφικτή. Επομένως, εάν $c_1 > 4$, τότε το πρωτεύον ΓΠ είναι μη φραγμένο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.27

1) Το ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 10x_{11} + 5x_{12} + 15x_{13} + 7x_{21} + 20x_{22} + 9x_{23} \\
\text{υ.π.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30 \\
& x_{11} + x_{21} = 20 \\
& x_{12} + x_{22} = 20 \\
& x_{13} + x_{23} = 40 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}$$

2) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 50u_1 + 30u_2 + 20u_3 + 20u_4 + 40u_5 \\
\text{υ.π.} \quad & u_1 + u_3 \geq -10 \\
& u_1 + u_4 \geq -5 \\
& u_1 + u_5 \geq -15 \\
& u_2 + u_3 \geq -7 \\
& u_2 + u_4 \geq -20 \\
& u_2 + u_5 \geq -9 \\
& u_j \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3) Σύμφωνα με τη λύση που δίνεται είναι $x_{11} = 20$, $x_{12} = 20$, $x_{13} = 10$, $x_{23} = 30$ με κόστος 720. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

$$\left.\begin{aligned}
x_{11}u_{\bar{1}} &= 0 \\
x_{12}u_{\bar{2}} &= 0 \\
x_{13}u_{\bar{3}} &= 0 \\
x_{23}u_{\bar{6}} &= 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
u_{\bar{1}} &= 0 \\
u_{\bar{2}} &= 0 \\
u_{\bar{3}} &= 0 \\
u_{\bar{6}} &= 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
u_1 + u_3 &= -10 \\
u_1 + u_4 &= -5 \\
u_1 + u_5 &= -15 \\
u_2 + u_5 &= -9
\end{aligned}\right\}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει 5 αγνώστους, αλλά όπως είναι γνωστό ένας από τους περιορισμούς σε ένα πρόβλημα μεταφοράς περιττεύει. Αν λοιπόν θεωρηθεί ότι περιττεύει ο $1^{ος}$ περιορισμός στο ΓΠ του ερωτήματος (1), τότε θα πρέπει $u_1 = 0$. Οπότε, προκύπτει η ακόλουθη λύση του δυϊκού:

$u_2 = 6 \quad u_3 = -10 \quad u_4 = -5 \quad u_5 = -15$

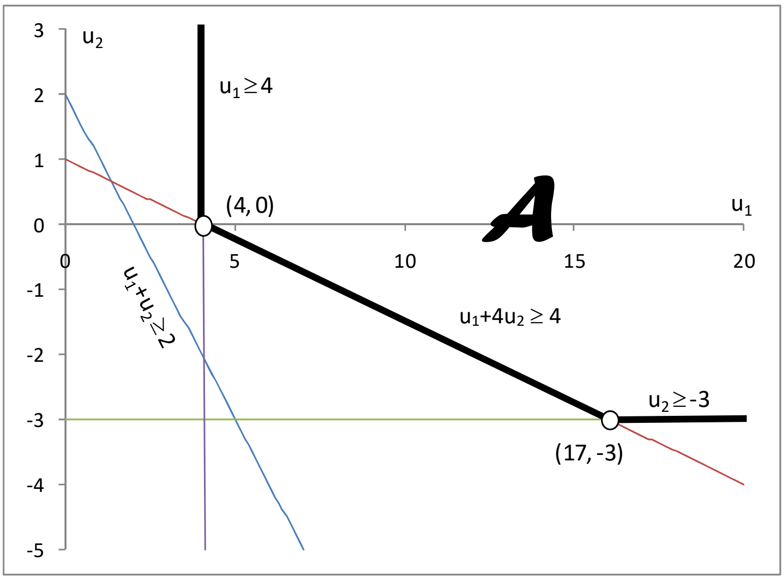
Η λύση αυτή ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του δυϊκού και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι 720, δηλαδή ταυτίζεται με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος για το πλάνο μεταφοράς που δίνεται. Επομένως, το πλάνο μεταφοράς είναι βέλτιστο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.28

1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4u_1 + 8u_2 \\ \text{υ.π.} \quad & u_1 + u_2 \geq 2 \\ & u_1 + 4u_2 \geq 4 \\ & u_1 \geq 4 \\ & u_2 \geq -3 \\ & u_1, u_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) Η γραφική αναπαράσταση του δυϊκού είναι:



Το σύνολο των εφικτών λύσεων βρίσκεται στην περιοχή *A*. Συγκρίνοντας τις δύο ΒΕΛ (4, 0) και (17, -3) που οριοθετούν στο σύνολο των εφικτών λύσεων βρίσκεται ότι βέλτιστη λύση είναι η (4, 0) με $4u_1 + 8u_2 = 16$.

3) Στη βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι: $u_{\overline{1}} = 2$, $u_{\overline{4}} = 3$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$\left.\begin{aligned} x_1 u_{\overline{1}} &= 0 \\ x_4 u_{\overline{4}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_2 &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.29

1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 25u_1 + 20u_2 \\ \text{Υπό:} \quad & 6u_1 + 3u_2 \geq 3 \\ & 3u_1 + 4u_2 \geq 1 \\ & 5u_1 + 5u_2 \geq 4 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2) Σύμφωνα με τη λύση του ΓΠ είναι $x_1, x_3 > 0$, οπότε με βάση το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

$$\left.\begin{aligned} x_1 u_{\overline{1}} &= 0 \\ x_3 u_{\overline{3}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u_{\overline{1}} &= 0 \\ u_{\overline{3}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 6u_1 + 3u_2 &= 3 \\ 5u_1 + 5u_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_1 &= 0.2 \\ u_2 &= 0.6 \end{aligned}$$

3) Με την εισαγωγή της νέας μεταβλητής, το ΓΠ και το δυϊκό του διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ \text{Υπό:} & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & 25u_1 + 20u_2 \\ \text{Υπό:} & 6u_1 + 3u_2 \ge 3 \\ & 3u_1 + 4u_2 \ge 1 \\ & 5u_1 + 5u_2 \ge 4 \\ & 6u_1 + 2u_2 \ge 2 \\ & u_1, u_2 \ge 0 \end{array}$$

Ο νέος περιορισμός $6u_1 + 2u_2 \ge 2$ που εισάγεται στο δυϊκό ικανοποιείται από τη λύση (του δυϊκού) που βρέθηκε στο ερώτημα (β), καθώς για $u_1 = 0.2$ και $u_2 = 0.6$ είναι $6u_1 + 2u_2 = 2.4 > 2$. Επομένως, η $(x_1, x_2, x_3) = (5/3,\ 0,\ 3)$ παραμένει βέλτιστη στο πρωτεύον, γιατί η λύση $(u_1, u_2) = (0.2, 0.6)$ είναι εφικτή στο (νέο) δυϊκό και οι αντικειμενικές συναρτήσεις των δύο ΓΠ ταυτίζονται.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.30

1) Το ΓΠ με όλους τους περιορισμούς σε μορφή $\le$ και το δυϊκό του είναι:

Πρωτεύον:

$$\begin{array}{ll} \max & -y_1 - y_2 + z \\ \text{Υπό:} & -x_0 - 7x_1 - 4x_2 + z \le 0 \\ & x_0 + 4x_1 + 9x_2 + z \le 0 \\ & x_1 - y_1 \le 0 \\ & -x_1 - y_1 \le 0 \\ & x_2 - y_2 \le 0 \\ & -x_2 - y_2 \le 0 \\ & x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ y_1, y_2, z \ge 0 \end{array}$$

Δυϊκό:

$$\begin{array}{lll} \min & 0 & \\ \text{Υπό:} & -u_1 + u_2 = 0 & (\text{μεταβλητή } x_0) \\ & -7u_1 + 4u_2 + u_3 - u_4 = 0 & (\text{μεταβλητή } x_1) \\ & -4u_1 + 9u_2 + u_5 - u_6 = 0 & (\text{μεταβλητή } x_2) \\ & u_1 + u_2 \ge 1 & (\text{μεταβλητή } z) \\ & u_3 + u_4 \le 1 & (\text{μεταβλητή } y_1) \\ & u_5 + u_6 \le 1 & (\text{μεταβλητή } y_2) \\ & u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \ge 0 & \end{array}$$

2) Από τον 1$^{\text{ο}}$ περιορισμό προκύπτει ότι $u_1 = u_2$. Αντικαθιστώντας στους άλλους περιορισμούς:

$$\begin{array}{l} u_1 = (u_3 - u_4)/3 \\ u_1 = (u_6 - u_5)/5 \\ u_1 \ge 0.5 \\ u_3 + u_4 \le 1 \\ u_5 + u_6 \le 1 \\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \ge 0 \end{array}$$

Από τις ανισότητες 1 και 3 προκύπτει ότι:

$$\frac{u_3 - u_4}{3} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow u_3 - u_4 + 2u_4 \ge \frac{3}{2} + 2u_4 \Rightarrow u_3 + u_4 \ge \frac{3}{2} + 2u_4$$

Επειδή όμως $u_4 \ge 0$ αυτό σημαίνει ότι $u_3 + u_4 > 1$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον περιορισμό $u_3 + u_4 \le 1$.

Επομένως το δυϊκό είναι αδύνατο. Αυτό σημαίνει ότι το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Αδύνατο όμως δεν μπορεί να είναι γιατί η λύση $x_0 = x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z = 0$ είναι εφικτή. Άρα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το πρωτεύον δεν είναι φραγμένο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.31

1) Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & 4u_2 \\ \text{Υπ} & u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 2 \\ & u_1 - u_2 = 1 \\ & u_1 + 3u_2 - u_3 \geq 3 \\ & u_1 + u_3 = 1 \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \in \mathbb{R},\ u_3 \leq 0 \end{array}$$

2) Από τους περιορισμούς 2 και 4 του δυϊκού προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1 + u_2 \\ u_1 = 1 - u_3 \end{array}\right\} \Rightarrow u_2 = -u_3$$

Αντικαθιστώντας $u_1 = 1 + u_2$ στους περιορισμούς 1 και 3:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + u_2 + 2u_2 + u_3 \geq 2 \\ 1 + u_2 + 3u_2 - u_3 \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3u_2 + u_3 \geq 1 \\ 4u_2 - u_3 \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_2 \geq 1/2 \\ u_2 \geq 2/5 \end{array}\right\} \Rightarrow u_2 \geq 1/2$$

Επειδή σύμφωνα με την αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της μεταβλητής u_2, αυτό σημαίνει ότι $u_2 = 1/2$ και επομένως η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι:

$$u_1 = 3/2 \qquad u_2 = 1/2 \qquad u_3 = -1/2$$

Στη λύση αυτή η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι ίση με 2, άρα και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος θα είναι επίσης 2.

3) Στην περίπτωση αυτή η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού γίνεται:

$$\min \quad -4u_2$$

Στην περίπτωση αυτή η λύση $u_2 = +\infty$, $u_1 = 1 + \infty$ και $u_3 = -\infty$ ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και επιπλέον και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι $-\infty$. Επομένως το δυϊκό είναι μη φραγμένο και άρα το δοθέν ΓΠ είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.32

1) Αλλάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση του ΓΠ σε μορφή μεγιστοποίησης, το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & -u_1 - u_2 - u_3 - u_4 \\ \text{Υπ} & -u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ & -a_1u_1 - a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0 \\ & -b_1u_1 - b_2u_2 + b_3u_3 + b_4u_4 = 0 \\ & u_1 \leq 1 \\ & u_2 \leq 1 \\ & u_3 \leq 1 \\ & u_4 \leq 1 \\ & u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{array}$$

2) Η λύση που δίνεται είναι εφικτή στο πρωτεύον και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στη λύση αυτή είναι ίση με -4 (θεωρώντας ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι σε μορφή μεγιστοποίησης). Εάν $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ και $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$, τότε η λύση $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ είναι εφικτή στο δυϊκό και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι ίση με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος (-4). Επομένως, η λύση που δίνεται είναι βέλτιστη για το πρωτεύον.

Εναλλακτικά:

Η λύση που δίνεται είναι εφικτή στο πρωτεύον και επειδή $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$, από το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας προκύπτει ότι $u_{\bar{4}} = u_{\bar{5}} = u_{\bar{6}} = u_{\bar{7}} = 0$, δηλαδή $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$. Εάν $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ και $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$, τότε, αυτή η λύση που προκύπτει μέσω της συμπληρωματικής χαλαρότητας είναι εφικτή στο δυϊκό, άρα η λύση που δίνεται είναι βέλτιστη για το πρωτεύον.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.33

1. Το δυϊκό είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & u_4 \\ \text{Υπ} & -u_1 + u_2 - u_4 \le -1 \\ & -u_2 + u_3 - u_4 \le -1 \\ & u_1 \ge -5 \\ & u_2 \ge -5 \\ & u_3 \ge -5 \\ & u_1 \le -1 \\ & u_2 \le -1 \\ & u_3 \le -1 \\ & u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4 \le 0 \end{array}$$

2. Βάσει της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 u_{\bar{1}} = 0 \\ x_2 u_{\bar{2}} = 0 \\ x_5 u_{\bar{5}} = 0 \\ x_6 u_{\bar{6}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} u_{\bar{1}} = 0 \\ u_{\bar{2}} = 0 \\ u_{\bar{5}} = 0 \\ u_{\bar{6}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -u_1 + u_2 - u_4 = -1 \\ -u_2 + u_3 - u_4 = -1 \\ u_3 = -5 \\ u_1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} u_2 - u_4 = -2 \\ -u_2 - u_4 = 4 \\ u_3 = -5 \\ u_1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} u_2 = -3 \\ u_4 = -1 \\ u_3 = -5 \\ u_1 = -1 \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ.34

1. Αλλάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση σε μορφή μεγιστοποίησης, το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & -2u_1 + 4u_2 + 6u_3 \\ \text{Υπ} & u_1 - 2u_2 + u_3 \le -2 \\ & u_1 - u_3 \le -1 \\ & -u_2 + u_3 = -1 \\ & 2u_1 - u_2 \ge -3 \\ & u_1 \in \mathbb{R},\, u_2 \ge 0,\, u_3 \le 0 \end{array}$$

2. Αφού $x_2, x_3, x_4 \ne 0$ θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{r} x_2 u_{\bar{2}} = 0 \\ x_3 u_{\bar{3}} = 0 \\ x_4 u_{\bar{4}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} u_1 - u_3 = -1 \\ -u_2 + u_3 = -1 \\ 2u_1 - u_2 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = -1 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \end{array}$$

3. Η διαγραφή του 3ου περιορισμού αντιστοιχεί σε διαγραφή της μεταβλητής απόφασης u_3 στο δυϊκό. Όμως, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ήδη $u_3 = 0$, άρα δεν αλλάζει κάτι ούτε στη λύση του δυϊκού αλλά ούτε και στου πρωτεύοντος.

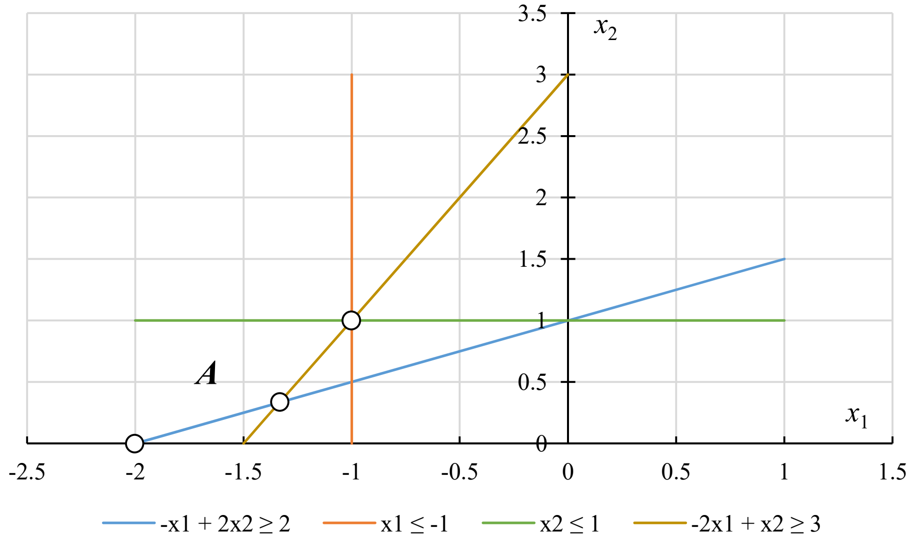
Παρότι η λύση παραμένει βέλτιστη δεν είναι βασική εφικτή λύση, καθώς έχει τρεις μεταβλητές μη μηδενικές (άρα βασικές), ενώ μετά τη διαγραφή του 3ου περιορισμού το νέο ΓΠ έχει πλέον δύο περιορισμούς, άρα κάθε βασική εφικτή λύση θα πρέπει να έχει δύο βασικές μεταβλητές.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.35

1. Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & 2u_1 - u_2 + u_3 + 3u_4 \\ \text{Υπ} & -u_1 + u_2 - 2u_4 = 3 \\ & 2u_1 + u_3 + u_4 \geq -4 \\ & u_1, u_4 \leq 0, u_2, u_3 \geq 0 \end{array}$$

2. Η γραφική αναπαράσταση είναι:



Το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι η περιοχή *A*, η οποία έχει ως κορυφές τα σημεία (-1, 1), (-4/3, 1/3) και (-2, 0). Στο 1ο σημείο η αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με -7, στο 2ο είναι -5.33 και στο 3ο είναι -6. Άρα η βέλτιστη λύση είναι η $(x_1, x_2) = (-4/3, 1/3)$.

Αφού στη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος είναι $x_1, x_2 \neq 0$, σύμφωνα με τη συμπληρωματική χαλαρότητα θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 u_{\bar{1}} = 0 \\ x_2 u_{\bar{2}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_{\bar{1}} = 0 \\ u_{\bar{2}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -u_1 + u_2 - 2u_4 = 3 \\ 2u_1 + u_3 + u_4 = -4 \end{array}$$

Επιπλέον, στη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος οι περιορισμοί 2 και 3 ($x_1 \leq -1$ και $x_2 \leq 1$) ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες, οπότε . Επομένως, $x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}} > 0$. Σύμφωνα με τη συμπληρωματική χαλαρότητα αυτό σημαίνει ότι $x_{\bar{2}} u_2 = 0$ και $x_{\bar{3}} u_3 = 0$, δηλαδή $u_2 = u_3 = 0$. Επομένως, το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r} -u_1 - 2u_4 = 3 \\ 2u_1 + u_4 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = -5/3 \\ u_4 = -2/3 \end{array}$$

Δηλαδή, η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι $u_2 = u_3 = 0$ και $u_1 = -5/3$, $u_4 = -2/3$

3. Εάν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε η λύση $(x_1, x_2) = (-\infty, 0)$ ικανοποιεί τους περιορισμούς και η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται ίση με -∞. Οπότε το ΓΠ δεν είναι φραγμένο και το δυϊκό είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.36

1. Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & -2u_1 - 4u_2 \\ \text{Υπ} & u_1 + 2u_2 \le -2 \\ & u_1 \le -1 + \lambda \\ & u_2 = -1 \\ & 2u_1 + u_2 \ge -4 \\ & u_1 \in \mathbb{R},\ u_2 \le 0 \end{array}$$

2. Αντικαθιστώντας το $u_2 = -1$ (3ος περιορισμός) τους περιορισμούς προκύπτουν τα εξής:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \le 0 \\ u_1 \le -1 + \lambda \\ 2u_1 \ge -3 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{2} \le u_1 \le -1 + \lambda \qquad \text{(Α)}$$

Από την αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι εμφανές ότι η τιμή της μεταβλητής απόφασης u_1 θα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη δυνατή.

Διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τις πιθανές τιμές της παραμέτρου λ:

- 1η περίπτωση: $\lambda > -1/2$

  Στην περίπτωση αυτή η μέγιστη δυνατή τιμή για τη μεταβλητή απόφασης u_1 είναι $u_1 = -1 + \lambda$. Αντικαθιστώντας τα u_1 και u_2 στους περιορισμούς προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές για τις μεταβλητές απόκλισης: $u_{\bar{1}} = 1 - \lambda > 0$ και $u_{\bar{4}} = 2\lambda + 1 > 0$

  Σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

  $$\left.\begin{array}{l} u_{\bar{1}} x_1 = 0 \\ u_{\bar{4}} x_4 = 0 \\ u_2 x_{\bar{2}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_4 = x_{\bar{2}} = 0$$

  Άρα οι περιορισμοί του πρωτεύοντος μπορούν να διαμορφωθούν ως εξής:

  $$\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ x_3 = -4 \end{array}$$

  Αυτή είναι η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος αφού ικανοποιεί τους περιορισμούς και τις συνθήκες της συμπληρωματικής χαλαρότητας.

- 2η περίπτωση: $\lambda = -1/2$

  Οι λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού που βρέθηκαν παραπάνω ικανοποιούν τους περιορισμούς και οι αντικειμενικές συναρτήσεις των δύο ΓΠ ταυτίζονται. Επομένως, η παραπάνω λύση παραμένει βέλτιστη.

- 3η περίπτωση: $\lambda < -1/2$

  Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες (Α) είναι αδύνατες. Δηλαδή το δυϊκό είναι αδύνατο, οπότε το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Επειδή όμως το πρωτεύον έχει εφικτή λύση (πχ. η λύση της 1ης περίπτωσης), εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι μη φραγμένο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ.37

1. Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\left.\begin{array}{ll}\min & 0u_1+0u_2\\ \text{Υπ} & -2u_1+\frac{1}{3}u_2\geq 2\\ & -9u_1+u_2\geq 3\\ & u_1-\frac{1}{3}u_2\geq 1\\ & 9u_1-2u_2\geq 12\\ & u_1,\, u_2\geq 0\end{array}\right\}\qquad \text{(A)}$$

Εάν το ΓΠ είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε αλλάζοντας τα πρόσημα στην αντικειμενική συνάρτηση, αυτή διατυπώνεται ως $\max\ -2x_1-3x_2-x_3-12x_4$. Οπότε το δυϊκό είναι:

$$\left.\begin{array}{ll}\min & 0u_1+0u_2\\ \text{Υπ} & -2u_1+\frac{1}{3}u_2\geq -2\\ & -9u_1+u_2\geq -3\\ & u_1-\frac{1}{3}u_2\geq -1\\ & 9u_1-2u_2\geq -12\\ & u_1,\, u_2\geq 0\end{array}\right\}\qquad \text{(B)}$$

2. Εάν το ΓΠ είναι σε μορφή μεγιστοποίησης, τότε προσθέτοντας τους περιορισμούς 1 και 3 του δυϊκού ΓΠ (Α) προκύπτει ότι $-u_1\geq 3$, το οποίο είναι αδύνατο αφού $u_1\geq 0$. Άρα το δυϊκό είναι αδύνατο και επομένως το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Το πρωτεύον όμως είναι εφικτό, αφού η λύση $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ ικανοποιεί τους περιορισμούς. Άρα η μόνη εκδοχή που απομένει είναι ότι το πρωτεύον είναι μη φραγμένο.

   Εάν το ΓΠ είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε η λύση $u_1=u_2=0$ ικανοποιεί τους περιορισμούς του δυϊκού. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού για τη λύση αυτή είναι ίση με 0, όση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος για τη λύση $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Άρα η λύση $u_1=u_2=0$ είναι βέλτιστη στο δυϊκό ΓΠ και αντίστοιχα η λύση $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ είναι βέλτιστη στο πρωτεύον ΓΠ.