ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Μιχάλης Δούμπος

Χανιά 2019

Α. Μελέτες περίπτωσης

Άσκηση Α.1

Μια οικογένεια διαθέτει 410 στρέμματα γης στην οποία καλλιεργεί καπνό και ρύζι. Κάθε στρέμμα που καλλιεργείται με καπνό κοστίζει €105, ενώ κάθε στρέμμα ρυζιού κοστίζει €210. Η οικογένεια διαθέτει έναν προϋπολογισμό €52.500 για την τρέχουσα χρονιά, ενώ βάσει υπαρχόντων διατάξεων η έκταση που μπορεί να καλλιεργηθεί με ρύζι περιορίζεται στα 100 στρέμματα ανά οικογένεια. Κάθε στρέμμα καπνού αποδίδει καθαρό κέρδος €300, ενώ το κάθε στρέμμα ρυζιού €520.

1. Διαμορφώσετε ένα ΓΠ για τον προσδιορισμό του βέλτιστου σχεδίου καλλιέργειας και λύστε το γραφικά προσδιορίζοντας την έκταση που πρέπει να καλλιεργηθεί από κάθε προϊόν, την ακαλλιέργητη έκταση και το βέλτιστο κέρδος.
2. Λύνοντας το πρόβλημα καταλήγετε το ακόλουθο βέλτιστο πίνακα simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\overline{3}$		0	0	1	$-0{,}0095$	1	10
300	1		1	0	2	$-0{,}0095$	0	320
520	2		0	1	-1	0,0095	0	90
		$\mathbf{c}$	300	520	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-80	$-2{,}09$	0	142800

α) Προσδιορίστε τα διαστήματα τιμών για τα κέρδη από τον καπνό και το ρύζι στα οποία διατηρείται η βέλτιστη λύση.

β) Αν η οικογένεια αποφασίσει να αυξήσει κάποιο από στοιχεία που περιορίζουν το κέρδος (προϋπολογισμός ή έκταση καλλιεργήσιμης γης) σε ποιο πιστεύετε ότι πρέπει να δώσει έμφαση;

γ) Ένα γειτονικό χωράφι διατίθεται προς €100 το εκτάριο. Πιστεύετε ότι συμφέρει η αγορά του;

δ) Αν η οικογένεια αποφασίσει να μειώσει την καλλιεργήσιμη γη κατά 50 εκτάρια πως επηρεάζεται το βέλτιστο σχέδιο καλλιέργειας για τον καπνό;

Άσκηση Α.2

Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν από τη σύνθεση τριών υλικών Α, Β και Γ (για την παραγωγή ενός kg τελικού προϊόντος απαιτείται ένα kg από κάθε υλικό). Αυτά τα υλικά μπορούν να παραχθούν σε δύο διαφορετικές μηχανές της επιχείρησης ως εξής:

	Παραγωγή (kg/ώρα)			Κόστος
	Α	Β	Γ	€/ώρα
Μηχανή 1	7	6	9	25
Μηχανή 2	6	11	5	12,5

Την προσεχή εβδομάδα η επιχείρηση εκτιμά ότι η ζήτηση για το προϊόν θα ανέλθει στα 900 kg. Κατά την ίδια περίοδο οι δύο μηχανές μπορούν χρησιμοποιηθούν το πολύ για 220 ώρες (αθροιστικά). Επιπλέον, στην περίπτωση όπου παραχθεί μεγαλύτερη ποσότητα από τα τρία υλικά σε σχέση με όση απαιτείται, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι ο αποθηκευτικός χώρος της επιχείρησης δεν επιτρέπει την αποθήκευση περισσότερων των 200 kg (συνολικά) από τα υλικά αυτά.

Συμβολίζοντας ως x_1 το χρόνο λειτουργίας της μηχανής 1, ως x_2 το χρόνο λειτουργίας της μηχανής 2 και ως y την παραγόμενη ποσότητα του τελικού προϊόντος το πρόβλημα της επιχείρησης εκφράζεται ως εξής:

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\min & 25x_1 & + & 12,5x_2 & & & \\
\text{υ.π.} & x_1 & + & x_2 & & & \leq 220 \\
 & 7x_1 & + & 6x_2 & - & y & \geq 0 \\
 & 6x_1 & + & 11x_2 & - & y & \geq 0 \\
 & 9x_1 & + & 5x_2 & - & y & \geq 0 \\
 & 22x_1 & + & 22x_2 & - & 3y & \leq 200 \\
 & & & & & y & \geq 900 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & y & \geq 0
\end{array}
$$

Η επίλυση του δυϊκού προβλήματος σας οδηγεί στον ακόλουθο βέλτιστο πίνακα simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	5	6	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
−200	5		0,046	0	−1,826	0,864	1	0	0,273	−0,319	0	2,84
0	2		0,002	1	−4,995	4,001	0	0	1,001	−1,003	0	12,497
900	6		−0,136	0	−0,409	0,409	0	1	0,182	−0,046	1	3,977
		$\mathbf{c}$	−220	0	0	0	−200	−900	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	−88,4	0	−4,3	−195,3	0	0	−109,2	−22,4	−900	3011,3

1. Με βάση τη λύση αυτή προσδιορίστε το βέλτιστο πλάνο παραγωγής για την επιχείρηση (παραγόμενη ποσότητα τελικού προϊόντος, παραγόμενη ποσότητα των υλικών Α, Β και Γ, και το συνολικό χρόνο λειτουργίας των μηχανών).
2. Θα συστήνατε την αύξηση του χρόνου λειτουργίας των μηχανών με σκοπό την περαιτέρω μείωση του κόστους;
3. Παρουσιάστε τον αντίστροφο πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στην παραπάνω βέλτιστη λύση.
4. Η επιχείρηση προκειμένου να περιορίσει περαιτέρω το κόστος είναι σε θέση να αυξήσει τον αποθηκευτικό χώρο ώστε να είναι δυνατή η αποθήκευση έως και 800 kg από τα αχρησιμοποίητα υλικά. Εάν η επιχείρηση εκμεταλλευτεί τη δυνατότητα αυτή πώς θα μεταβληθεί το βέλτιστο κόστος παραγωγής συναρτήσει της μεταβολής του διαθέσιμου αποθηκευτικού χώρου; Τι παρατηρείτε όσον αφορά το χρόνο απασχόλησης των δύο μηχανών καθώς ο αποθηκευτικός χώρος αυξάνεται;

Άσκηση Α.3

Μια επιχείρηση κατασκευής επίπλων παράγει τέσσερις τύπους επίπλων (Α, Β, Γ, Δ). Η κατασκευή κάθε τύπου επίπλου απαιτεί τρία βασικά στάδια: την κοπή, το γυάλισμα και τη συναρμολόγηση. Η δυναμικότητα του εργοστασίου της επιχείρησης επιτρέπει 900 ώρες κοπής, 800 ώρες γυαλίσματος, και 480 ώρες συναρμολόγησης. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι χρόνοι (σε ώρες) επεξεργασίας στα στάδια αυτά που απαιτούνται για την παραγωγή κάθε τύπου επίπλου, καθώς και το αντίστοιχο κέρδος (σε €).

	Α	Β	Γ	Δ
Συναρμολόγηση	2	8	4	2
Γυάλισμα	5	4	8	5
Κοπή	7	8	3	5
Κέρδος	90	160	40	100

1. Δεδομένου ότι στόχος της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους παρουσιάστε το κατάλληλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ανταποκρίνεται στο πρόβλημα της επιχείρησης.
2. Παρουσιάστε τον πρώτο πίνακα simplex και εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να γίνει η αλλαγή της βάσης.
3. Λύνοντας το πρόβλημα καταλήγετε στον ακόλουθο πίνακα simplex:

Βάση	Α	Β	Γ	Δ	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
Β	0	1	0,125	0	0,15625	−0,0625	0	25
Δ	1	0	1,5	1	−0,125	0,25	0	140
$\bar{3}$	2	0	−5,5	0	−0,625	−0,75	1	0

   Ελέγξτε εάν η λύση αυτή είναι βέλτιστη, παρουσιάστε τον πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στη λύση αυτή και τον αντίστροφό της.
4. Προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού.
5. Υπό ποιες προϋποθέσεις θα μπορούσε να θεωρηθεί συμφέρουσα η παραγωγή του επίπλου τύπου Γ;
6. Η επιχείρηση εξετάσει την περίπτωση παραγωγής ενός νέου τύπου επίπλου ο οποίος απαιτεί 20 ώρες κοπής, 3 ώρες γυαλίσματος και 2 ώρες συναρμολόγησης. Το μοναδιαίο κέρδος από την παραγωγή του επίπλου αυτού θα είναι €120. Χωρίς να λύσετε εκ νέου το πρόβλημα εξετάστε εάν θα μπορούσε να κριθεί συμφέρουσα η παραγωγή του επίπλου αυτού.
7. Η επιχείρηση έχει τη δυνατότητα να νοικιάσει μια επιπλέον μηχανή κοπής με κόστος ενοικίασης €10/ώρα. Εναλλακτικά, μπορεί να νοικιάσει μια επιπλέον μηχανή συναρμολόγησης με το ίδιο κόστος. Τι θα προτείνατε στην επιχείρηση όσον αφορά τη δυνατότητα ενοικίασης κάποιας από τις δύο αυτές μηχανές;

Άσκηση Α.4

Μία επιχείρηση παράγει τέσσερις τύπους γλυπτών σε τρία στάδια. Η τρέχουσα δυναμικότητα της επιχείρησης ανέρχεται σε 500 ώρες για το 1ο στάδιο, σε 200 ώρες για το 2ο στάδιο και σε 400 ώρες για το 3ο στάδιο. Δεδομένου ότι στόχος της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους από την παραγωγή των γλυπτών και συμβολίζοντας ως x_i την παραγόμενη ποσότητα από το γλυπτό τύπου i, τα στελέχη της επιχείρησης διαμόρφωσαν το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\max & 280x_1 + & 40x_2 + & 500x_3 + & 510x_4 & \\
\text{υ.π.} & 40x_1 + & 10x_2 + & 100x_3 + & 50x_4 & \leq 500 \\
& 20x_1 + & 10x_2 + & 50x_3 + & 20x_4 & \leq 200 \\
& & 50x_2 & & + 100x_4 & \leq 400 \\
& x_1\ , & x_2\ , & x_3\ , & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα διαμορφώθηκε ο ακόλουθος πίνακας simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	−15	0	0	1	−2	−0,1	60
500	3		0,4	0	1	0	0	0,02	−0,004	2,4
510	4		0	0,5	0	1	0	0	0,01	4
		$\mathbf{c}$	280	40	500	510	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	80	−215	0	0	0	−10	−3,1	3240

1. Προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον παραπάνω πίνακα simplex.
2. Παρουσιάστε το βέλτιστο πίνακα του δυϊκού.
3. Ποιος είναι ο αντίστροφος πίνακας της βάσης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του δυϊκού;
4. Ποια μεταβολή θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί στο μοναδιαίο κέρδος του 4ου τύπου γλυπτού χωρίς να μεταβληθεί στο βέλτιστο σχέδιο παραγωγής;
5. Τι κόστος ανά ώρα θα ήταν διατεθειμένη η επιχείρηση να αναλάβει προκειμένου να αυξήσει την παραγωγική της δυναμικότητα στο 2ο στάδιο; Πόσο θα μπορούσε να αυξήσει τη δυναμικότητα στο 2ο στάδιο με αυτό το κόστος;
6. Η επιχείρηση εξετάζει την παραγωγή ενός επιπλέον τύπου γλυπτού, το οποίο θα αποφέρει μοναδιαίο κέρδος €240 και απαιτεί 20 ώρες επεξεργασίας στο 1ο στάδιο, 15 ώρες στο 2ο στάδιο και 40 ώρες στο 3ο στάδιο. Θα προτείνατε στην επιχείρηση την παραγωγή αυτού του τύπου;

Άσκηση Α.5

Μια γαλακτοκομική εταιρία εξετάζει τη στελέχωση του τμήματος παρασκευής παγωτών. Λόγω της εποχικότητας του προϊόντος η εταιρία θεωρεί ότι πρέπει να εξεταστεί ο συνδυασμός μόνιμου και έκτακτου προσωπικού. Το κόστος του μόνιμου προσωπικού εκτιμάται στα €17,5/ώρα, ενώ το αντίστοιχο κόστος για το έκτακτο προσωπικό εκτιμάται στα €25/ώρα. Για την κάλυψη των αναγκών στο προσεχές τρίμηνο η επιχείρηση εκτιμά ότι απαιτούνται 390 ανθρωποώρες για τον πρώτο μήνα, 420 ανθρωποώρες για το δεύτερο μήνα και 340 ανθρωποώρες για τον τρίτο μήνα. Στόχος της εταιρίας είναι ο προσδιορισμός των ωρών εργασίας που θα καλυφθούν από μόνιμο και έκτακτο προσωπικό κάθε μήνα δεδομένου ότι το έκτακτο προσωπικό προσλαμβάνεται εφόσον δεν επαρκεί το μόνιμο προσωπικό (το μόνιμο προσωπικό θα προσληφθεί στην αρχή του τριμήνου και στη συνέχεια δεν θα πραγματοποιηθεί καμία άλλη πρόσληψη μόνιμου προσωπικού). Ως στέλεχος του τμήματος διοίκησης προσωπικού της επιχείρησης προτείνετε το ακόλουθο ΓΠ (ως a_i συμβολίζονται οι ανθρωποώρες που απαιτούνται το μήνα i):

$$
\begin{array}{ll}
\min & 25(y_1 + y_2 + y_3) + 52,5x \\
\text{υ.π.} & x + y_i \geq a_i, \quad i = 1, 2, 3 \\
& x, y_i \geq 0
\end{array}
$$

1. Εξηγήστε εν συντομία τις μεταβλητές και τους περιορισμούς του παραπάνω γραμμικού προγράμματος.
2. Πώς διασφαλίζεται στο παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα ότι το έκτακτο προσωπικό προσλαμβάνεται μόνο όταν δεν επαρκεί το μόνιμο προσωπικό;
3. Διατυπώσετε το γραμμικό πρόγραμμα στην κανονική μορφή $\max\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ και προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τη λύση που διαμορφώνεται από τις μεταβλητές απόκλισης.
4. Πώς επηρεάζει η μείωση της ωριαίας αποζημίωσης που θα δοθεί στο έκτακτο προσωπικό τη βέλτιστη στρατηγική και το αντίστοιχο κόστος;

Άσκηση Α.6

Μια εταιρεία παράγει σε καθημερινή βάση τρία προϊόντα, έστω Α, Β και Γ. Η παραγωγή τους απαιτεί τρεις διαφορετικές διαδικασίες οι οποίες έχουν χρονικούς περιορισμούς, ενώ στη συνέχεια τα ολοκληρωμένα προϊόντα αποθηκεύονται. Το γραμμικό πρόγραμμα που ακολουθεί έχει διαμορφωθεί με σκοπό την εύρεση του αριθμού των προϊόντων Α (x_1), Β (x_2) και Γ (x_3) που πρέπει να παράγονται σε τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος της εταιρείας:

$$\begin{array}{lrrrl}
\max & 40x_1 + & 35x_2 + & 45x_3 & \\
\text{υ.π.} & 2x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 & \leq 120 \\
 & 4x_1 + & 3x_2 + & x_3 & \leq 160 \\
 & 3x_1 + & 2x_2 + & 4x_3 & \leq 100 \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq 40 \\
 & x_1 \;, & x_2 \;, & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

1. Προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση.
2. Διατυπώστε το δυϊκό πρόβλημα. Πώς ερμηνεύονται οι δυϊκές μεταβλητές και ποιες είναι οι βέλτιστες τιμές τους;
3. Προσδιορίστε το διάστημα τιμών του μοναδιαίου κέρδους του προϊόντος Β, στο οποίο διατηρείται η βέλτιστη λύση του ερωτήματος (1).
4. Προσδιορίστε ένα διάστημα τιμών για τον διαθέσιμο αποθηκευτικό χώρο, στο οποίο διατηρείται η βέλτιστη βάση του ερωτήματος (1). Προσδιορίστε τη νέα βέλτιστη λύση για το άνω και κάτω όριο του διαστήματος τιμών και τη νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Άσκηση Α.7

Ο υπεύθυνος πωλήσεων μιας επιχείρησης εξετάζει τη σχέση που συνδέει τις πωλήσεις με δύο παράγοντες x_1 και x_2. Για το σκοπό αυτό έχει συλλέξει τα ακόλουθα ιστορικά στοιχεία:

Περίοδος	x_1	x_2	Πωλήσεις
1	2	3	1000
2	3	3	1250
3	3	4	1300

Ο υπεύθυνος πωλήσεων θεωρεί ότι η πρόβλεψη των πωλήσεων μπορεί να γίνει με ένα απλό γραμμικό μοντέλο της μορφής $w_1 x_{t1} + w_2 x_{t2} + \varepsilon_t$, όπου:

- x_{t1}, x_{t2} είναι τα διαθέσιμα στοιχεία των δύο παραγόντων για την περίοδο t,
- w_1, w_2 είναι άγνωστοι (μη αρνητικοί) συντελεστές στάθμισης των δύο παραγόντων,
- $\varepsilon_t = |w_1 x_{t1} + w_2 x_{t2} - y_t|$ είναι το σφάλμα πρόβλεψης του μοντέλου για την περίοδο t, όπου y_t είναι οι πραγματικές πωλήσεις της περιόδου t.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου διαμορφώνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{llcl}
\max & & -\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^- - \varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^- - \varepsilon_3^+ - \varepsilon_3^- & \\
\text{Υπό:} & 2w_1 + 3w_2 + \varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^- & & = 1000 \\
 & 3w_1 + 3w_2 & + \varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^- & = 1250 \\
 & 3w_1 + 4w_2 & + \varepsilon_3^+ - \varepsilon_3^- & = 1300 \\
 & w_1 \;,\; w_2 \;,\; \varepsilon_1^+ \;,\; \varepsilon_1^- \;,\; \varepsilon_2^+ \;,\; \varepsilon_2^- \;,\; \varepsilon_3^+ \;,\; \varepsilon_3^- & & \geq 0
\end{array}$$

1. Εξηγήστε τη σημασία των μεταβλητών απόφασης $\varepsilon_t^+, \varepsilon_t^-$, της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών.
2. Ποιες μεταβλητές θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως βασικές σε μία αρχική βασική εφικτή λύση ώστε να ξεκινήσει η διαδικασία επίλυσης χωρίς να χρειαστεί η εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών;
3. Ελέγξτε εάν η λύση του ακόλουθου πίνακα simplex είναι βέλτιστη. Εάν δεν είναι βέλτιστη περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να γίνει η αλλαγή της βάσης.

Βάση	w_1	w_2	ε_1^+	ε_1^-	ε_2^+	ε_2^-	ε_3^+	ε_3^-	$\mathbf{x}_B$
ε_1^+	−0.25	0	1	−1	0	0	−0.75	0.75	25
ε_2^+	0.75	0	0	0	1	−1	−0.75	0.75	275
w_2	0.75	1	0	0	0	0	0.25	−0.25	325

4. Παρουσιάστε (χωρίς κανέναν υπολογισμό) τον αντίστροφο πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στον πίνακα simplex του προηγούμενου ερωτήματος.

5. Γράψτε το δυϊκό γραμμικό πρόγραμμα (χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στο δοθέν ΓΠ).
6. Χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη θεωρία δυϊκότητας δείξτε ότι στη βέλτιστη λύση του δοθέντος ΓΠ ισχύει η εξίσωση $\varepsilon_t^+ \varepsilon_t^- = 0$.

Άσκηση Α.8

Μια επιχείρηση παράγει τέσσερις τύπους τσιμεντόλιθου. Η παραγωγή κάθε τύπου πραγματοποιείται σε τέσσερα στάδια. Τον προσεχή μήνα η επιχείρηση διαθέτει 800 ανθρωποώρες για το 1ο στάδιο, 1000 ανθρωποώρες για το 2ο στάδιο και 340 ανθρωποώρες για το 3ο στάδιο. Το 4ο στάδιο υλοποιείται από μια συνεργαζόμενη επιχείρηση η οποία δεν έχει αναφέρει κάποιο ανώτατο όριο παραγωγικής δυναμικότητας. Συμβολίζοντας ως x_i την ποσότητα παραγωγής κάθε τύπου τσιμεντόλιθου, τα στελέχη της επιχείρησης διαμόρφωσαν το ακόλουθο ΓΠ για το προσδιορισμό του πλάνου παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 8x_1 & + & 14x_2 & + & 30x_3 & + & 50x_4 & & \\
\text{υ.π.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 16x_4 & \leq & 800 \\
 & 1.5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 1000 \\
 & 0.5x_1 & + & 0.6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 340 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

1. Τι κέρδος αποφέρει η παραγωγή 10 τεμαχίων τσιμεντόλιθου τύπου 3; Πόσες ανθρωποώρες απαιτεί η παραγωγή αυτής της ποσότητας από τα στάδια 1, 2 και 3;
2. Λύνοντας το παραπάνω ΓΠ, τα στελέχη της επιχείρησης κατέληξαν στον ακόλουθο πίνακα simplex:

Βάση	1	2	3	4	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
2	0	1	11	19	1.5	−1	0
1	1	0	−12	−22	−2	2	0
$\overline{3}$	0	0	0,4	1,6	0,1	−0,4	1

   Δείξτε ότι η λύση αυτή είναι βέλτιστη και προσδιορίστε το βέλτιστο επίπεδο παραγωγής κάθε τύπου τσιμεντόλιθου.

3. Πόσο θα έπρεπε να ήταν το μοναδιαίο κέρδος για τον τσιμεντόλιθο τύπου 3 ώστε να κριθεί συμφέρουσα η παραγωγή του; Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο θα υλοποιηθεί η αλλαγή της βάσης στην περίπτωση αυτή.
4. Προκειμένου να αυξήσει τις διαθέσιμες ανθρωποώρες στο 1ο στάδιο, η επιχείρηση σκοπεύει να προσλάβει επιπλέον προσωπικό με ωρομίσθιο €4/ώρα. Θα προτείνατε την πρόσληψη του επιπλέον προσωπικού; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
5. Ο διευθυντής παραγωγής μένει ικανοποιημένος από το βέλτιστο πλάνο παραγωγής, αλλά εκφράζει κάποιες επιφυλάξεις σχετικά με τις διαθέσιμες ανθρωποώρες για το 1ο στάδιο. Προσδιορίστε το διάστημα τιμών για την παράμετρο αυτή, στο οποίο το βέλτιστο πλάνο παραμένει αμετάβλητο και υπολογίστε το νέο κέρδος που αντιστοιχεί στη μέγιστη δυνατή μείωση και αύξηση των διαθέσιμων ανθρωποωρών για το στάδιο 1.
6. Κατά την συζήτηση του πλάνου παραγωγής με την επιχείρηση η οποία έχει αναλάβει το 4ο στάδιο, τα στελέχη της θέτουν ως στοιχείο διαπραγμάτευσης οι ελάχιστες ανθρωποώρες για το 4ο στάδιο να ανέλθουν τουλάχιστον στις 1500. Ο περιορισμός αυτός εκφράζεται ως $2x_1+3x_2+5x_3+7x_4 \geq 1500$ και μετά την εισαγωγή του στο ΓΠ, ο πίνακας simplex διαμορφώνεται ως εξής:

Βάση	1	2	3	4	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
2	0	1	11	19	1,5	−1	0	0
1	1	0	−12	−22	−2	2	0	0
$\overline{3}$	0	0	0,4	1,6	0,1	−0,4	1	0
$\overline{4}$	0	0	4	6	0,5	1	0	1

   Χρησιμοποιώντας τον πίνακα αυτό δείξτε ότι η εισαγωγή του επιπλέον περιορισμού καθιστά το πρόβλημα αδύνατο.

Άσκηση Α.9

Ένας χρηματιστηριακός αναλυτής εξετάζει την επιλογή κατάλληλων μετοχών βάσει της απόδοσης και του κινδύνου τους. Για την αξιολόγηση του συνόλου των διαθέσιμων μετοχών, επιλέγει ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 8 μετοχών $s_1, s_2, \ldots, s_8$ για τις οποίες διαθέτει στοιχεία για την απόδοση και τον κίνδυνο που παρουσίασαν κατά την περίοδο 2000-2002:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
Απόδοση (x_1)	6,9	8,0	9,4	5,1	3,7	3,9	4,4	0,7
Κίνδυνος (x_2)	5,5	9,5	9,8	7,0	0,3	4,0	4,8	3,1

Παρατηρώντας την απόδοση των μετοχών το 2003 ο αναλυτής διαπιστώνει ότι οι μετοχές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: την κατηγορία K_1 με τις μετοχές θετικής απόδοσης (s_1, s_2, s_3, s_4) και την κατηγορία K_2 με τις μετοχές αρνητικής απόδοσης (s_5, s_6, s_7, s_8). Επιπλέον, ο αναλυτής παρατηρεί ότι μια γραμμική συνάρτηση $f(\mathbf{x}_i) = -\alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2}$ εξηγεί με απόλυτη ακρίβεια την ταξινόμηση των μετοχών ως εξής: εάν $f(\mathbf{x}_i) > 0$, τότε η μετοχή s_i ανήκει στην κατηγορία K_1, διαφορετικά ανήκει στην κατηγορία K_2, όπου $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})$ είναι το διάνυσμα με τις επιδόσεις της μετοχής στα κριτήρια της απόδοσης και του κινδύνου και τα $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ είναι άγνωστες παράμετροι.

Δεδομένου λοιπόν ότι δεν διαπιστώνεται επικάλυψη των κατηγοριών, ο αναλυτής θεωρεί η συνάρτηση f πρέπει να προσδιοριστεί έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το περιθώριο μεταξύ των δύο κατηγοριών, το οποίο ορίζεται ως $2/(\alpha_1 + \alpha_2)$. Με βάση αυτή τη μοντελοποίηση ο αναλυτής διαμόρφωσε το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & \alpha_1 + \alpha_2 & & \\
\text{υ.π.} & -\alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} & \geq & 1 \quad \forall\, s_i \in K_1 \\
& -\alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} & \leq & -1 \quad \forall\, s_i \in K_2 \\
& \alpha_0 \;,\; \alpha_1 \;,\; \alpha_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Ποιος είναι ο απλούστερος δυνατός τρόπος για να επιλυθεί το πρόβλημα; Εξηγήστε την απάντησή σας και παρουσιάστε την πρώτη επανάληψη της simplex.
2. Εάν στο αρχικό δείγμα των 8 μετοχών προστεθεί μια νέα μετοχή s_9 της κατηγορίας K_2 με απόδοση 6 και κίνδυνο 8, εξηγήστε γιατί δεν είναι πλέον δυνατή η χρησιμοποίηση του παραπάνω ΓΠ για τον καθορισμό της βέλτιστης συνάρτησης f; Παρουσιάστε ένα εναλλακτικό ΓΠ το οποίο αντιμετωπίζει το πρόβλημα.

Άσκηση A.10

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 28x_1 + 30x_2 + 20x_3 & & \\
\text{υ.π.} & 4x_1 + x_2 + 5x_3 & \leq & 3 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \geq & 3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
& x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Με βάση την ακόλουθη λύση της φάσης Ι, εξηγήστε γιατί το ΓΠ είναι εφικτό και διαμορφώστε τον αρχικό πίνακα της φάσης ΙΙ.

Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
2	1	1	1	0	0	0	1	1
$\bar{1}$	3	0	4	1	0	0	−1	2
$\bar{2}$	1	0	1	0	1	−1	4	1

2. Προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση του παραπάνω ΓΠ εφαρμόζοντας τη φάση ΙΙ.
3. Σε ποιο διάστημα τιμών μπορεί να κυμανθεί το β′ μέρος του περιορισμού 1 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση;
4. Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που παρέχει ο βέλτιστος πίνακας simplex, προσδιορίστε την επίδραση που θα είχε στο κόστος η αύξηση του β′ μέρους του 1ου περιορισμού κατά $\varepsilon > 0$, δεδομένου ότι η μεταβολή αυτή βρίσκεται εντός των ορίων του ερωτήματος (3). Επαναλάβετε το ερώτημα για το β′ μέρος του 2ου περιορισμού.
5. Πώς μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση εάν το β′ μέρος του 1ου περιορισμού γίνει 0,5;

Άσκηση A.11

Μία επιχείρηση παράγει τρεις τύπους προϊόντων αλουμινίου (Π1, Π2, Π3). Η παραγωγή κάθε προϊόντος απαιτεί επεξεργασία σε δύο στάδια (Σ1, Σ2). Την προσεχή περίοδο, η παραγωγική δυνατότητα της επιχείρησης ανέρχεται σε 600 ώρες για το στάδιο Σ1 και σε 1000 ώρες για το στάδιο Σ2. Την ίδια περίοδο, το διαθέσιμο απόθεμα αλουμινίου είναι 15 τόνοι.

Για τον προσδιορισμό του πλάνου παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος, διαμορφώθηκε το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4{,}2x_3 & & \\
\text{υ.π.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \le & 15 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \le & 6 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 1{,}5x_3 & \le & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \ge & 0
\end{array}$$

1. Τα προϊόντα Π1 και Π2 ήδη παράγονται από την επιχείρηση, ενώ το Π3 είναι νέο προϊόν, η παραγωγή του οποίου είναι υπό εξέταση. Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη μόνο τα προϊόντα Π1 και Π2, βρείτε το βέλτιστο πλάνο παραγωγής ξεκινώντας από τη λύση του ακόλουθου πίνακα:

Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	0	0	1	−5	2
2	0	1	0	2	−1
1	1	0	0	−1	1

2. Ποια τιμή θα ήταν διατεθειμένη να πληρώσει η επιχείρηση για κάθε έναν επιπλέον τόνο αλουμινίου, σύμφωνα με τη βέλτιστη λύση; Πόσους τόνους αλουμινίου θα μπορούσε να αγοράσει στην τιμή αυτή; Πόση θα ήταν η αύξηση του μέγιστου κέρδους εάν αγόραζε την επιπλέον ποσότητα αλουμινίου;
3. Παρουσιάστε το βέλτιστο πίνακα του δυϊκού και τον αντίστροφο πίνακα της βάσης του δυϊκού.
4. Αναμορφώστε το βέλτιστο πίνακα simplex του ερωτήματος (1) εισάγοντας το προϊόν Π3 και ελέγξτε εάν η προηγούμενη λύση παραμένει βέλτιστη.

Άσκηση Α.12

Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα (Π1, Π2, Π3) σε δύο στάδια (Σ1, Σ2). Η παραγωγή μίας μονάδας του Π1 απαιτεί 1,2 ώρες επεξεργασία στο στάδιο Σ1 και 0,8 ώρες στο στάδιο Σ2. Οι αντίστοιχοι χρόνοι για το προϊόν Π3 είναι 1,2 ώρες για το στάδιο Σ1 και 2,3 ώρες για το στάδιο Σ2. Το προϊόν Π2 απαιτεί επεξεργασία μόνο στο στάδιο Σ1, η οποία διαρκεί 1,7 ώρες. Την προσεχή περίοδο υπάρχουν 1.000 ώρες διαθέσιμες στο στάδιο Σ1 και 1.200 ώρες στο Σ2. Επιπλέον, η παραγωγή των προϊόντων απαιτεί τη χρήση μιας πρώτης ύλης, το διαθέσιμο απόθεμα της οποίας ανέρχεται σε 2.000 μονάδες. Η παραγωγή κάθε μονάδας από τα προϊόντα απαιτεί 2 μονάδες από την πρώτη ύλη για το Π1, 3 μονάδες για το Π2 και 4,5 μονάδες για το Π3. Το μοναδιαίο κέρδος από την παραγωγή των τριών προϊόντων είναι €3 για τα Π1−Π2 και €5 για το Π3.

1. Διαμορφώστε ένα ΓΠ για τον προσδιορισμό του βέλτιστου πλάνου παραγωγής.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον ακόλουθο πίνακα simplex. Παρουσιάστε τον αντίστροφο πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση.

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	0,67	0,90	0	1	0	−0,27	466,67
0	$\bar{2}$	−0,22	−1,53	0	0	1	−0,51	177,78
5	3	0,44	0,67	1	0	0	0,22	444,44
		3	3	5	0	0	0	
		0,78	−0,33	0	0	0	−1,11	2222,22

3. Θα προτείνατε την αγορά επιπλέον ποσότητας πρώτης ύλης στην τιμή των €0,5/μονάδα; Πόσες μονάδες πρώτης ύλης θα μπορούσε να αγοράσει η επιχείρηση σε αυτή την τιμή; Πόσο θα ήταν το μέγιστο κέρδος εάν αγόραζε 500 επιπλέον μονάδες πρώτης ύλης;
4. Η επιχείρηση εξετάζει την πιθανή παραγωγή ενός επιπλέον προϊόντος, κάθε μονάδα του οποίου απαιτεί 1,8 ώρες επεξεργασίας στο στάδιο Σ1 και 0,5 ώρες στο στάδιο Σ2, ενώ καταναλώνει 1,3 μονάδες πρώτης ύλης. Τι μοναδιαίο κέρδος θα πρέπει να αποφέρει το προϊόν αυτό ώστε να είναι συμφέρουσα η παραγωγή του;

Άσκηση Α.13

Μια επιχείρηση παράγει έναν τύπο ζωοτροφής. Η ημερήσια παραγωγή προσδιορίζεται σε αντιστοιχία με τη ζήτηση, η οποία ανέρχεται στα 2.000 κιλά/ημέρα. Η ζωοτροφή παράγεται μέσω της μίξης τριών υλικών (Α, Β, Γ). Το κόστος του υλικού Α είναι €2/κιλό, ενώ τα κόστη για τα υλικά Β και Γ είναι αντίστοιχα €1,5/κιλό και €1/κιλό. Η μίξη των υλικών θα πρέπει να γίνεται έτσι ώστε η τελική ζωοτροφή να αποτελείται τουλάχιστον κατά 10% από το υλικό Α και 20% από το υλικό Β.

1. Παρουσιάστε ένα ΓΠ για τον προσδιορισμό του βέλτιστου μίγματος που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής της ζωοτροφής.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση εφαρμόζοντας τη διαδικασία του μεγάλου M.
3. Παρουσιάστε (χωρίς κανένα υπολογισμό) τον αντίστροφο πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση, καθώς και τη βέλτιστη λύση του δυϊκού.
4. Σε ποιο διάστημα τιμών μπορεί να κυμανθεί το μοναδιαίο κόστος του υλικού Α χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη λύση;
5. Ένα νέος κανονισμός απαγορεύει τη χρησιμοποίηση του υλικού Γ σε αναλογία μεγαλύτερη των 600 κιλών ανά τόνο παραγόμενης ζωοτροφής. Εισάγετε αυτόν τον επιπλέον περιορισμό στο βέλτιστο πίνακα simplex και εξηγήστε εν συντομία τη διαδικασία που θα πρέπει να ακολουθηθεί για να βρεθεί η νέα βέλτιστη λύση.

Άσκηση Α.14

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{rrcrl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & \\ \text{υ.π.:} & x_1 & + & 2x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 8 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

1. Βρείτε τη βέλτιστη λύση εφαρμόζοντας τη μέθοδο simplex.
2. Παρουσιάστε τον πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση και τον αντίστροφό του.
3. Διαμορφώστε το βέλτιστο πίνακα simplex του δυϊκού.
4. Σε ποιο διάστημα τιμών μπορεί να κυμανθεί το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη βάση;
5. Τι επίπτωση έχει η αύξηση του δεξιού μέρους του 2ου περιορισμού κατά 2 μονάδες στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης; Δώστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του βέλτιστου πίνακα simplex, χωρίς όμως να υπολογίσετε τη νέα βέλτιστη λύση.

Άσκηση Α.15

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \min & x_1 & - & 3x_2 & - & 0{,}4x_3 & \\ \text{υ.π.:} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq 7 \\ & -2x_1 & + & 4x_2 & & & \leq 12 \\ & -4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq 14 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

1. Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα simplex και βρείτε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον πίνακα αυτό.

1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
2,5	0	2	1	0,25	0
−0,5	1	0	0	0,25	0
−2,5	0	3	0	−0,75	1

2. Πόσες βέλτιστες λύσεις έχει το ΓΠ; Εάν έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσατε να βρείτε μια εναλλακτική βέλτιστη λύση.
3. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο ερώτημα (α), βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού. Πόσες βέλτιστες λύσεις έχει το δυϊκό;
4. Έως ποιο "ποσό" θα ήσασταν διατεθειμένοι να "πληρώσετε" για την αύξηση του β′ μέρους του 2ου περιορισμού κατά μία μονάδα; Πόσες μονάδες του αντίστοιχου πόρου θα μπορούσατε να "προμηθευτείτε" στην "τιμή" αυτή;
5. Στο ΓΠ εισάγεται μια επιπλέον μεταβλητή απόφασης x_4. Συμβολίζοντας ως c_4 το συντελεστή της μεταβλητής αυτής στην αντικειμενική συνάρτηση και ως a_{14}, a_{24}, a_{34} τους συντελεστές στους περιορισμούς, δείξτε ότι εάν $c_4 + 0.2a_{14} + 0.8a_{24} \geq 0$, τότε η εισαγωγή αυτής της μεταβλητής δεν αλλάζει τη βέλτιστη λύση του ερωτήματος (α).

Άσκηση Α.16

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 + x_2 & & \\ \text{υ.π.:} & 12x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & -3x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ & x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 \ , \ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Παρουσιάστε το δυϊκό ΓΠ.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού ξεκινώντας από τη λύση του ακόλουθου πίνακα:

Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
1	1	0	0,2	$-1/15$	$-0{,}2$	1/3
2	0	1	0,8	1/15	$-0{,}8$	2/3

3. Παρουσιάστε τον βέλτιστο πίνακα simplex του πρωτεύοντος.
4. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα του πρωτεύοντος, βρείτε το διάστημα στο οποίο μπορεί να κυμανθεί ο συντελεστής της μεταβλητής x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη λύση.
5. Τροποιείστε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του ερωτήματος (β) εισάγοντας τον επιπλέον περιορισμό $x_1 + 7x_2 \geq 45$. Τι επίπτωση έχει στο ΓΠ η εισαγωγή του περιορισμού αυτού;

Άσκηση Α.17

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrrrcl} \text{Μεγιστοποίηση} & 1250x_1 + & 1050x_2 + & 750x_3 & & \\ \text{Υπό:} & x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 60 \\ & 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 & \leq & 75 \\ & x_1 \ , & x_2 \ , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Βρείτε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον ακόλουθο πίνακα simplex:

Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
3	0	0,5	1	1,5	-0,5	52,5
1	1	0,5	0	-0,5	0,5	7,5

2. Παρουσιάστε το βέλτιστο πίνακα simplex του δυϊκού.
3. Εάν υπήρχε δυνατότητα αύξησης ενός από τους πόρους που αντιστοιχούν στους περιορισμούς, ποιον θα προτείνατε; Πόσο θα μπορούσε να αυξηθεί το β′ μέρος του αντίστοιχου περιορισμού χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη λύση;
4. Ποια είναι η νέα βέλτιστη λύση εάν το β′ μέρος του 1ου περιορισμού αυξηθεί σε 100; Δώστε την απάντησή σας ξεκινώντας από τη βέλτιστη λύση του ερωτήματος (α), χωρίς όμως να λύσετε εκ νέου το ΓΠ.

Άσκηση Α.18

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & & \\ \text{υ.π.:} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 4 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα simplex, παρουσιάζοντας τη διαδικασία που ακολουθήσατε.

Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$						-1
4						1

2. Ξεκινώντας από τον παραπάνω πίνακα βρείτε τη βέλτιστη λύση.
3. Πόσες βέλτιστες λύσεις έχει το ΓΠ; Πώς θα άλλαζε η απάντησή σας εάν η αντικειμενική συνάρτηση ήταν $4x_1 + 3x_2 + 3x_2 + 2x_4$;

4. Πόσο θα μπορούσε να αυξηθεί το β′ μέρος του 1ου περιορισμού χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη βασική εφικτή λύση; Θα μπορούσατε (χωρίς να βρείτε τις νέες τιμές των βασικών μεταβλητών) να υπολογίσετε την επίδραση που θα είχε η αύξηση αυτή στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης;
5. Πώς αλλάζει η βέλτιστη λύση εάν το β′ μέρος του 1ου περιορισμού γίνει 10; Δώστε την απάντησή σας χωρίς να λύσετε το πρόβλημα εξ'αρχής.

Άσκηση Α.19

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{υ.π.:} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 9 \\ & 2x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1 + x_3 = 6 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \geq 0 \end{array}$$

1. Ο βέλτιστος πίνακας simplex της φάσης Ι διαμορφώνεται ως εξής:

Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$
2	1	1	0	1/3	0	0	1/3
3	1	0	1	0	0	0	1
$\bar{2}$	5	0	0	2/3	1	-1	11/3

   Συμπληρώστε τον πίνακα και εξηγήστε γιατί το ΓΠ είναι εφικτό.
2. Παρουσιάστε τον 1ο πίνακα simplex της φάσης ΙΙ και βρείτε τη βέλτιστη λύση του ΓΠ.
3. Χρησιμοποιώντας τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος υπολογίστε τη μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης για μια οριακή αύξηση του β′ του 1ου περιορισμού.
4. Πόσο θα μπορούσε να μεταβληθεί το β′ μέρος του 1ου περιορισμού χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη βασική εφικτή λύση;

Άσκηση Α.20

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ όπου λ είναι μια παράμετρος του προβλήματος:

$$\begin{array}{rl} \max & (-3+\lambda)x_1 + (1-2\lambda)x_2 \\ \text{Υπό:} & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα simplex εξηγώντας την επιλογή των βασικών μεταβλητών και τον υπολογισμό των $\mathbf{x}_B$.

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
		-1	0	1	-1	0	
		-1	1	0	1	0	
		0	0	0	1	1	
	$\mathbf{c}$						
	$\bar{\mathbf{c}}$						

2. Προσδιορίστε ένα εύρος τιμών για την παράμετρο λ για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις: (1) η παραπάνω ΒΕΛ είναι βέλτιστη, (2) το ΓΠ δεν είναι φραγμένο.
3. Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η αλλαγή της βάσης εάν $\lambda = 1$.
4. Σε ποιο διάστημα τιμών μπορεί να κυμανθεί το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού χωρίς να μεταβληθεί η παραπάνω ΒΕΛ;
5. Ποια θα είναι η νέα βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εάν το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού γίνει 0.7;

Άσκηση Α.21

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \;,\; x_2 \geq 0
\end{array}
$$

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα simplex της φάσης I και βάσει αυτού εξηγήστε γιατί το ΓΠ είναι εφικτό.

1	2	$\bar{1}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_b$
1	0,5	−0,5	0,5	0	0	1
0	−0,5	1,5	−1,5	1	0	1
0	0,5	0,5	−0,5	0	1	0

2. Παρουσιάστε τον 1ο πίνακα της φάσης II και ξεκινώντας από αυτόν βρείτε τη βέλτιστη λύση του ΓΠ.
3. Σε ποιο διάστημα τιμών μπορεί να κυμανθεί ο συντελεστής της μεταβλητής απόφασης x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση του προηγούμενου ερωτήματος;
4. Τροποποιήστε το βέλτιστο πίνακα simplex του ερωτήματος (2) εισάγοντας τη νέα μεταβλητή απόφασης x_3 η οποία συμμετέχει στον 1ο περιορισμό με συντελεστή 1, στον 2ο με 6, στον 3ο με 1 και στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή 0,3. Αλλάζει η βέλτιστη λύση του ΓΠ;

Άσκηση Α.22

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max & 13x_1 + & 7x_2 + & 5x_3 & \\
\text{Υπό:} & -2.5x_1 - & 1.5x_2 + & 1.5x_3 & \leq 9 \\
 & x_1 + & x_2 & & \leq 5 \\
 & 0,75x_1 + & 0,25x_2 + & 0.25x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 \;, & x_2 \;, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα simplex και βρείτε τη βέλτιστη λύση συνεχίζοντας από αυτόν.

Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
2					1.5	-2	3.5
$\bar{1}$					1	2	18
1					-0.5	2	1.5

2. Πόσο θα μπορούσε να μειωθεί το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη βάση; Προσδιορίστε την επίδραση που θα είχε η μείωση αυτή στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χωρίς να υπολογίσετε τις νέες τιμές των βασικών μεταβλητών.
3. Εισάγετε τον περιορισμό $x_2 \leq 3$ στο βέλτιστο πίνακα simplex του ερωτήματος (1) και εξηγήστε τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για να βρεθεί η νέα βέλτιστη λύση (καθορισμός εισερχόμενης/εξερχόμενης μεταβλητής και οδηγού στοιχείου).

Άσκηση Α.23

Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα, τα οποία πουλά προς €15 (προϊόν 1) και €25 ανά μονάδα (προϊόν 2). Για την παραγωγή των προϊόντων απαιτούνται 100 ανθρωποώρες εργασίας από ειδικευμένο προσωπικό, 70 ανθρωποώρες εργασίας από ανειδίκευτο προσωπικό και 30 μονάδες κάποιας πρώτης ύλης. Επίσης, για λόγους που αφορούν τη θέση της επιχείρησης στην αγορά, η παραγωγή του προϊόντος 2 θα πρέπει να ανέλθει τουλάχιστον στις 3 μονάδες. Για τον προγραμματισμό της παραγωγής έχει διαμορφωθεί το ακόλουθο ΓΠ:

$$
\begin{array}{rrrl}
\max & 15x_1 + & 25x_2 & \\
\text{Υπό:} & 3x_1 + & 4x_2 & \leq 100 \\
 & 2x_1 + & 3x_2 & \leq 70 \\
 & x_1 + & 2x_2 & \leq 30 \\
 & & x_2 & \geq 3 \\
 & x_1 \;, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα simplex.

Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
$\bar{1}$	3	0	1	0	0	4	88
$\bar{2}$	2	0	0	1	0	3	61
$\bar{3}$	1	0	0	0	1	2	24
2	0	1	0	0	0	-1	3

2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον παραπάνω πίνακα simplex, επιλέγοντας ως εισερχόμενη μεταβλητή εκείνη που επιφέρει τη μεγαλύτερη συνολική αύξηση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
3. Θα συνιστούσατε την πρόσληψη επιπλέον προσωπικού ή την προμήθεια επιπλέον ποσότητας πρώτης ύλης; Εξηγήστε την απάντησή σας και ανάλογα καθορίστε: (α) το μέγιστο μοναδιαίο κόστος που θα δεχόταν η επιχείρηση να αναλάβει για να αυξήσει τους πόρους που προτείνετε (προσωπικό ή/και πρώτη ύλη), (β) τη μέγιστη αύξηση των προτεινόμενων πόρων που θα μπορούσε να γίνει με το κόστος αυτό και (γ) την επίπτωση που θα είχε στα συνολικά έσοδα από την πώληση των προϊόντων.
4. Πώς θα πρέπει να διαμορφωθεί το βέλτιστο πλάνο παραγωγής εάν το ελάχιστο επίπεδο παραγωγής του 2ου προϊόντος αυξηθεί κατά 13 μονάδες; Δώστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τον βέλτιστο πίνακα simplex του ερωτήματος (2).

Άσκηση Α.24

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{aligned}
\max\quad & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
\text{Υπό:}\quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα simplex:

Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
2					−0,4	1,2	1,6
$\bar{1}$					1,2	−5,6	27,2
3					1,2	−1,6	11,2

2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον πίνακα simplex του ερωτήματος 1.
3. Πόσο θα μπορούσε να μειωθεί το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη βασική λύση; Πόσο θα μεταβληθεί (αύξηση ή μείωση) η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εάν το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού μειωθεί κατά 3 μονάδες;
4. Τροποποιήστε τον βέλτιστο πίνακα simplex του ερωτήματος (2) ώστε να ελέγξετε εάν είναι δυνατόν να αυξηθεί περαιτέρω η τιμή της μεταβλητής απόφασης x_3, δεδομένου ότι είναι αποδεκτή μια μείωση της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης του δοθέντος ΓΠ έως 5% σε σχέση με τη λύση του ερωτήματος (2).

Άσκηση Α.25

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{aligned}
\max\quad & 15x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{Υπό:}\quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 10 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\
& x_1\ ,\quad x_2\ ,\quad x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα simplex.

Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
2	1.5	1	0	0.25	0	−0.25
$\bar{2}$	3	0	0	0.5	1	−2.5
3	−1	0	1	−0.5	0	1.5

2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον παραπάνω πίνακα simplex.
3. Υπολογίστε τη μέγιστη μείωση που μπορεί να γίνει στο δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση. Επαναλάβατε τον υπολογισμό για τη μέγιστη αύξηση στο δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού. Ποια θα είναι η νέα

μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εάν υλοποιηθεί αυτή η αύξηση στον 3ο περιορισμό; Δώστε την απάντησή σας χωρίς να βρείτε τη νέα βέλτιστη λύση.
4. Διαμορφώστε τον πλήρη βέλτιστο πίνακα simplex του δυϊκού από τη βέλτιστη λύση του ερωτήματος (2).

Άσκηση Α.26

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{υ.π.:} & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1 \ ,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα simplex της διαδικασίας του μεγάλου M και βρείτε τη βέλτιστη λύση ξεκινώντας από τον πίνακα αυτό.

Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
$\bar{1}$	0	2	1	0	0	-1	3
1	1	0	0	0	0	1	3
$\bar{2}$	0	-1	0	1	-1	2	1

2. Παρουσιάστε τον πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση και τον αντίστροφό του (χωρίς όμως να τον υπολογίσετε αλγεβρικά).
3. Σε ποιο διάστημα τιμών θα μπορούσε να κυμανθεί ο συντελεστής της μεταβλητής απόφασης x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση;
4. Υπολογίστε τις τιμές των βασικών μεταβλητών εάν το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού αυξηθεί κατά 5 μονάδες. Εξηγήστε τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για να βρεθεί η νέα βέλτιστη λύση, συνεχίζοντας από τη βέλτιστη λύση που βρήκατε στο ερώτημα (1).

Άσκηση Α.27

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{Υπό:} & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 \ ,\ x_2 \ ,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

1. Χρησιμοποιείστε τις αναφορές που δίνονται για να συμπληρώσετε τον παρακάτω βέλτιστο πίνακα simplex χωρίς να υπολογίσετε αλγεβρικά τα στοιχεία που λείπουν. Παρουσιάστε με σαφήνεια τα στοιχεία των αναφορών που χρησιμοποιήσατε.

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
2	1	1	-1	0	0	-1	
3	3	0	2	1	0	1	
0	$\bar{2}$	0	3	0	1	0	
		2	-1	3	0	0	
		0	-5	0	0		8

2. Με βάση τα αποτελέσματα των αναφορών, υπολογίστε το όφελος που θα προκύψει (αύξηση στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης), εάν το δεξιό μέρος του 1ου περιορισμού αυξηθεί κατά 6 μονάδες. Παρουσιάστε με σαφήνεια τα στοιχεία των αναφορών που χρησιμοποιήσατε στην απάντησή σας.
3. Το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού αυξάνεται κατά 3 μονάδες. Υπολογίστε τις νέες τιμές των βασικών μεταβλητών στον πίνακα του ερωτήματος (1) και περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να συνεχίσει η διαδικασία από τον πίνακα αυτό (χωρίς να κάνετε τους αλγεβρικούς υπολογισμούς της διαδικασίας).
4. Υπολογίστε τα όρια στα οποία μπορούν να κυμανθούν οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης $x_1,\ x_2,\ x_3$ στην αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη βασική εφικτή λύση του 1ου ερωτήματος. Παρουσιάστε αναλυτικά τους υπολογισμούς σας.
5. Συνεχίζοντας από το βέλτιστο πίνακα του 1ου ερωτήματος βρείτε τη βέλτιστη λύση εάν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει $2{,}5x_1 - x_2 + 2x_3$.

Αναφορές Άσκησης Α.27

Αποτελέσματα Excel

Αναφορά λύσης

Objective Cell (Max)

Name	Original Value	Final Value
Obj. function	0	8

Variable Cells

Name	Original Value	Final Value	Integer
x1	0	1	Contin
x2	0	0	Contin
x3	0	2	Contin

Constraints

Name	Cell Value	Status	Slack
C1	3	Binding	0
C2	3	Not Binding	2
C3	2	Binding	0

Αναφορά ευαισθησίας

Variable Cells

Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
x1	1	0	2	1	1E+30
x2	0	-5	-1	5	1E+30
x3	2	0	3	1E+30	1

Constraints

Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
C1	3	2	3	1E+30	1
C2	3	0	1	2	1E+30
C3	2	1	2	1	2

Αποτελέσματα Lingo

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              8.000000

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        1.000000            0.000000
                             X2        0.000000            5.000000
                             X3        2.000000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        8.000000            1.000000
                             C1        0.000000            2.000000
                             C2        2.000000            0.000000
                             C3        0.000000            1.000000


Ranges in which the basis is unchanged:

                                    Objective Coefficient Ranges:

                                  Current        Allowable        Allowable
                   Variable   Coefficient         Increase         Decrease
                         X1      2.000000         1.000000         INFINITY
                         X2     -1.000000         5.000000         INFINITY
                         X3      3.000000         INFINITY         1.000000

                                        Righthand Side Ranges:

                                  Current        Allowable        Allowable
                        Row           RHS         Increase         Decrease
                         C1      3.000000         INFINITY         1.000000
                         C2      1.000000         2.000000         INFINITY
                         C3      2.000000         1.000000         2.000000
```

Αποτελέσματα LP_Solve

Objective | Constraints | Sensitiv

Variables	result
	8
x1	1
x2	0
x3	2

Objective | Constraints | Sensitiv

Constraints	result
	8
C1	3
C2	3
C3	2

Objective | Constraints | Sensitivity

Objective | Duals

Variables	from	till
objective	8	8
x1	-inf	3
x2	-inf	4
x3	2	+inf

Objective | Constraints | Sensitivity

Objective | Duals

Variables	value	from	till
objective	8	8	8
C1	2	2	+inf
C2	0	-inf	+inf
C3	1	0	3
x1	0	-inf	+inf
x2	-5	-1	0.666...
x3	0	-inf	+inf

Άσκηση Α.28

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \\
\text{Υπό:} & x_1 & & & - & 2x_3 & & & \leq 1 \\
& & & x_2 & & & - & x_4 & \leq 6 \\
& -2x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & \leq 12 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Προσδιορίστε τα παρακάτω στοιχεία χρησιμοποιώντας τις αναφορές που δίνονται (χωρίς κανέναν υπολογισμό και εξηγώντας με σαφήνεια τα στοιχεία των αναφορών που χρησιμοποιήσατε στις απαντήσεις σας):
   α) Βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης και της αντικειμενικής συνάρτησης.

β) Οριακά καθαρά εισοδήματα των μεταβλητών απόφασης.
γ) Βέλτιστες τιμές των δυϊκών μεταβλητών και της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού.

Αναφορές Άσκησης Α.28

Αποτελέσματα Excel

Αναφορά λύσης

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$G$6	Αντικειμ. συν.	0	23

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$G$1	x1	0	1	Contin
$G$2	x2	0	10	Contin
$G$3	x3	0	0	Contin
$G$4	x4	0	4	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$B$6	1ος περιορισμός	1	$B$6<=$C$6	Binding	0
$B$7	2ος περιορισμός	6	$B$7<=$C$7	Binding	0
$B$8	3ος περιορισμός	12	$B$8<=$C$8	Binding	0

Αναφορά ευαισθησίας

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$G$1	x1	1	0	-1	2	2
$G$2	x2	10	0	2	1E+30	1
$G$3	x3	0	-4	4	4	1E+30
$G$4	x4	4	0	1	1	2

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$6	1ος περιορισμός	1	2	1	1E+30	1
$B$7	2ος περιορισμός	6	0.5	6	8	20
$B$8	3ος περιορισμός	12	1.5	12	1E+30	8

Αποτελέσματα Lingo

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              23.00000

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        1.000000            0.000000
                             X2        10.00000            0.000000
                             X3        0.000000            4.000000
                             X4        4.000000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        23.00000            1.000000
                    CONSTRAINT1        0.000000            2.000000
                    CONSTRAINT2        0.000000           0.5000000
                    CONSTRAINT3        0.000000            1.500000

Ranges in which the basis is unchanged:

                                      Objective Coefficient Ranges:

                                Current        Allowable        Allowable
              Variable      Coefficient         Increase         Decrease
                    X1        -1.000000         2.000000         2.000000
                    X2         2.000000         INFINITY         1.000000
                    X3         4.000000         4.000000         INFINITY
                    X4         1.000000         1.000000         2.000000

                                          Righthand Side Ranges:

                                Current        Allowable        Allowable
                   Row              RHS         Increase         Decrease
           CONSTRAINT1         1.000000         INFINITY         1.000000
           CONSTRAINT2         6.000000         8.000000         20.00000
           CONSTRAINT3         12.00000         INFINITY         8.000000
```

Αποτελέσματα LP_Solve

Objective | Constraints | Sens

Variables	result
	23
x1	1
x2	10
x3	0
x4	4

Objective | Constraints | Sensitivity

Constraints	result
	23
CONSTRAINT1	1
CONSTRAINT2	6
CONSTRAINT3	12

Objective | Constraints | Sensitivity
Objective | Duals

Variables	from	till
objective	23	23
x1	-3	1
x2	1	+inf
x3	-inf	8
x4	-1	2

Objective | Constraints | Sensitivity
Objective | Duals

Variables	value	from	till
objective	23	23	23
CONSTRAINT1	2	0	+inf
CONSTRAINT2	0.5	-14	14
CONSTRAINT3	1.5	4	+inf
x1	0	-inf	+inf
x2	0	-inf	+inf
x3	-4	-0.5	2
x4	0	-inf	+inf

2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση συνεχίζοντας από τον παρακάτω πίνακα simplex.

Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	1	0	-2	0	1	0	0	1
$\bar{2}$	0	2	4	0	2	1	1	20
4	0	1	4	1	2	0	1	14

3. Παρουσιάστε τον πίνακα της βάσης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη που βρήκατε στο παραπάνω ερώτημα καθώς και τον αντίστροφό του (χωρίς να τον υπολογίσετε αλγεβρικά).
4. Υπολογίστε τα όρια στα οποία μπορεί να κυμανθεί το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση του ερωτήματος (2) καθώς και το αντίστοιχο εύρος στο οποίο μπορεί να κυμανθεί η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (χωρίς να υπολογίσετε νέες λύσεις).

Άσκηση Α.29

Για το ακόλουθο ΓΠ δίνεται η βέλτιστη ΒΕΛ στον παρακάτω πίνακα simplex:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \\
\text{Υπό:} & x_1 \qquad - 2x_3 & \leq 4 \\
 & x_2 \qquad & \leq 8 \\
 & -2x_1 + x_2 + 8x_3 & \leq 12 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
2	2	0	1	0	0	1	0	
4	3	−0,25	0	1	0	−0,125	0,125	
0	$\bar{1}$	0,5	0	0	1	−0,25	0,25	
	$\mathbf{c}$	−3	2	4	0	0	0	
	$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0			

α) Συμπληρώστε τον πίνακα χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες αναφορές. Εξηγήστε με σαφήνεια τα στοιχεία των αναφορών που χρησιμοποιήσατε.

Αποτελέσματα Excel Solver

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$I$6	f	0	18

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$I$2	x1	0	0	Contin
$I$3	x2	0	8	Contin
$I$4	x3	0	0.5	Contin

Constraints

Cell	Name	Formula	Status	Slack
$D$6	Περιορισμός 1	$D$6<=$E$6	Not Binding	5
$D$7	Περιορισμός 2	$D$7<=$E$7	Binding	0
$D$8	Περιορισμός 3	$D$8<=$E$8	Binding	0

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient
$I$2	x1	0	-2	-3
$I$3	x2	8	0	2
$I$4	x3	0.5	0	4

Constraints

Cell	Name	Shadow Price	Constraint R.H. Side
$D$6	Περιορισμός 1	0	4
$D$7	Περιορισμός 2	1.5	8
$D$8	Περιορισμός 3	0.5	12

Αποτελέσματα LINGO

```
Objective value:                    18.00000

                  Variable           Value        Reduced Cost
                        X1        0.000000            2.000000
                        X2        8.000000            0.000000
                        X3       0.5000000            0.000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1        18.00000            1.000000
               CONSTRAINT1        5.000000            0.000000
               CONSTRAINT2        0.000000            1.500000
               CONSTRAINT3        0.000000           0.5000000
```

Αποτελέσματα LP_Solve

Objective | Constraints | Sensitiv

Variables	result
	18
x1	0
x2	8
x3	0.5

Objective | Constraints | Sensitivi

Constraints	result
	18
CONSTRAINT1	-1
CONSTRAINT2	8
CONSTRAINT3	12

Objective | Constraints | Sensitivi

Objective | Duals

Variables	value
objective	18
CONSTRAINT1	0
CONSTRAINT2	1.5
CONSTRAINT3	0.5
x1	-2
x2	0
x3	0

β) Υπολογίστε τα όρια στα οποία μπορεί να κυμανθούν οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης 1 και 3 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη ΒΕΛ.
γ) Υπολογίστε τα όρια στα οποία μπορεί να κυμανθεί το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη ΒΕΛ.
δ) Βρείτε τη νέα βέλτιστη λύση εάν το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού μειωθεί κατά 6 μονάδες.

Άσκηση Α.30

Για το ακόλουθο ΓΠ δίνεται μία ΒΕΛ στον παρακάτω πίνακα simplex::

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \\
\text{Υπό:} & 2x_1 + \ \ x_2 + 5x_3 & \leq 10 \\
 & x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 & \leq 5 \\
 & x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 & \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$		0	0	3	1	−0,25	−1,75	7
2	2		0	1	0	0	0,25	−0,25	1
3	1		1	0	1	0	0	1	1
		$\mathbf{c}$	3	2	4	0	0	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	1	0	−0,5	−2,5	5

α) Βρείτε τη βέλτιστη λύση συνεχίζοντας τη μέθοδο simplex από τον πίνακα που δίνεται.
β) Υπολογίστε τα όρια στα οποία μπορούν να κυμανθούν οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης 1 και 2 στην αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη ΒΕΛ.
γ) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα 100%, εξετάστε εάν η ταυτόχρονη αλλαγή των συντελεστών των μεταβλητών απόφασης 1 και 2 στην αντικειμενική συνάρτηση, σε $c_1 = 3{,}5$ και $c_2 = 6$, θα μεταβάλει τη βέλτιστη ΒΕΛ.
δ) Πώς θα μεταβληθεί η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, εάν το δεξιό μέρος του 3ου περιορισμού αυξηθεί σε 1,5 (αύξηση 0,5), δεδομένου ότι η αλλαγή αυτή είναι εντός των ορίων στα οποία δεν μεταβάλλεται η βέλτιστη ΒΕΛ; Δώστε την απάντησή σας χωρίς να υπολογίσετε τις νέες τιμές των μεταβλητών απόφασης. Στη συνέχεια υπολογίστε τις νέες τιμές των μεταβλητών.

Β. Ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός

Άσκηση Β.1

Μια επιχείρηση εξετάζει την ανάπτυξη ενός σχεδίου παραγωγής για ένα προϊόν κατά τις προσεχείς T χρονικές περιόδους. Για κάθε περίοδο t είναι γνωστά τα ακόλουθα στοιχεία: (α) η ζήτηση d_t, (β) το μοναδιαίο κόστος παραγωγής p_t, (γ) το κόστος αποθεματοποίησης h_t το οποίο αφορά το τελικό απόθεμα της περιόδου t, (δ) ένα σταθερό κόστος c_t το οποίο υφίσταται μόνο εάν υπάρξει παραγωγή την περίοδο t.

1. Διαμορφώστε ένα ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα για τον καθορισμό του βέλτιστου πλάνου παραγωγής το οποίο ικανοποιεί τη ζήτηση, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα.
2. Αναμορφώστε το πρόβλημα του ερωτήματος (1) στην περίπτωση όπου μπορεί να υπάρχει ανικανοποίητη ζήτηση. Στην περίπτωση αυτή, το μοναδιαίο κόστος έλλειψης την περίοδο θεωρείται γνωστό και ίσο με b_t.
3. Υποθέστε ότι η παραγωγή μπορεί να πραγματοποιηθεί το πολύ σε N περιόδους, αλλά δεν είναι δυνατόν να μην υπάρξει παραγωγή σε δύο διαδοχικές περιόδους. Πώς μπορεί να ληφθεί αυτό υπόψη στο πρόβλημα;

Άσκηση Β.2

Μια επιχείρηση εξετάζει την υλοποίηση τεσσάρων επενδυτικών έργων Ε1, Ε2, Ε3, Ε4. Η αναμενόμενη απόδοση καθώς και τα κεφάλαια (σε εκατ. €) που απαιτούνται για την υλοποίηση των έργων την προσεχή τριετία συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Απόδοση	Έτος 1	Έτος 2	Έτος 3
Ε1	10%	0,5	0,3	0,2
Ε2	12%	1	0,8	0,2
Ε3	25%	1,5	1,5	0,3
Ε4	3%	0,1	0,4	0,1

Τα διαθέσιμα κεφάλαια της επιχείρησης ανέρχονται σε €3,1 εκατ. το έτος 1, σε €2,5 εκατ. το έτος 2 και σε €0,4 εκατ. το έτος 3. Επιπλέον, σημειώνονται οι εξής σχέσεις μεταξύ των έργων: (α) τα έργα Ε3 και Ε4 είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα (η υλοποίηση του ενός αποκλείει την υλοποίηση του άλλου), (β) πρέπει να υλοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα έργα Ε1 και Ε2, (γ) η υλοποίηση του έργου Ε1 έχει νόημα μόνο εάν υλοποιηθεί το έργο Ε4.

Θεωρώντας ότι στόχος της επιχείρησης είναι να καθορίσει τα έργα που θα υλοποιηθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί η αναμενόμενη συνολική απόδοση, αναπτύξτε το κατάλληλο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού που αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιχείρησης.

Άσκηση Β.3

Το Υπουργείο Περιβάλλοντος, Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων εξετάζει την κατασκευή 10 νέων χώρων υγειονομικής ταφής απορριμμάτων (ΧΥΤΑ). Υποψήφιες είναι 20 τοποθεσίες $s_1, s_2, \ldots, s_{20}$. Τα κόστη κατασκευής και λειτουργίας των ΧΥΤΑ στις τοποθεσίες αυτές είναι γνωστά και συμβολίζονται ως $c_1, c_2, \ldots, c_{20}$, ενώ οι αντίστοιχες δυναμικότητες επεξεργασίας των ΧΥΤΑ στις επιλεγμένες τοποθεσίες συμβολίζονται ως $p_1, p_2, \ldots, p_{20}$ και είναι επίσης γνωστές. Στόχος είναι η επιλογή των κατάλληλων τοποθεσιών που ελαχιστοποιούν το κόστος, δεδομένων των ακόλουθων περιορισμών: (1) η επιλογή της τοποθεσίας s_2 απαιτεί την επιλογή και της τοποθεσίας s_3, (2) η επιλογή της s_1 αποκλείει την επιλογή της s_4, (3) πρέπει να κατασκευαστεί τουλάχιστον ένας ΧΥΤΑ στις περιοχές s_5 και s_9, (4) η συνολική δυναμικότητα των ΧΥΤΑ που θα κατασκευαστούν πρέπει να υπερβαίνει μια δεδομένη δυναμικότητα P. Διαμορφώστε ένα ακέραιο πρόγραμμα που μπορεί να βοηθήσει στη χωροθέτηση των ΧΥΤΑ.

Άσκηση Β.4

Ένα σημαντικό πρόβλημα στην κρυπτογράφηση είναι αυτό του αθροίσματος ενός υποσυνόλου αριθμών, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Δεδομένου ενός πεπερασμένου συνόλου ακέραιων αριθμών $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, υπάρχει κάποιο υποσύνολο $N' \subseteq N$ τέτοιο ώστε το άθροισμα S των αριθμών που ανήκουν στο N' να είναι ίσο με κάποιον (δεδομένο) ακέραιο αριθμό a;

Διαμορφώστε ένα ακέραιο πρόγραμμα με το οποίο μπορείτε να επιλέξετε το υποσύνολο N' έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η απόλυτη διαφορά $|S - a|$.

Άσκηση Β.5

Δίνεται το ακόλουθο ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{array}{lrcrl}
\max & -3x_1 & + & 5x_2 & \\
\text{υ.π.} & 5x_1 & - & 7x_2 & \geq 3 \\
 & x_1 & & & \leq 3 \\
 & & & x_2 & \leq 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq 0, \text{ακέραιες}
\end{array}$$

1. Παρουσιάστε το πρόβλημα γραφικά και χρησιμοποιείστε τη γραφική αναπαράσταση ώστε να βρείτε τη βέλτιστη λύση αγνοώντας το γεγονός ότι οι μεταβλητές απόφασης είναι ακέραιες.
2. Εφαρμόστε τη μέθοδο κλάδου και φράγματος για να βρείτε τη βέλτιστη ακέραια λύση (χρησιμοποιείστε τη γραφική αναπαράσταση για να λύσετε όλα τα επιμέρους γραμμικά προγράμματα).

Άσκηση Β.6

Το δασαρχείο ενός νομού εξετάζει την εγκατάσταση δεξαμενών σε διάφορα σημεία των δασικών εκτάσεων του νομού ώστε να βελτιωθούν οι δυνατότητες πυρόσβεσης. Οι δασικές εκτάσεις του νομού έχουν χωριστεί σε m περιοχές, ενώ το πλήθος των σημείων στα οποία μπορούν να εγκατασταθούν οι δεξαμενές συμβολίζεται ως n. Η τοποθέτηση μιας δεξαμενής σε ένα συγκεκριμένο σημείο μπορεί να εξυπηρετήσει διάφορες περιοχές. Δίνεται λοιπόν ένας πίνακας A διαστάσεων $m \times n$ κάθε στοιχείο a_{ij} του οποίου ορίζεται ως $a_{ij} = 1$ εάν η περιοχή i μπορεί να εξυπηρετηθεί με την κατασκευή δεξαμενής στο σημείο j, διαφορετικά $a_{ij} = 0$. Θεωρώντας ότι κάθε δεξαμενή έχει το ίδιο κόστος κατασκευής ανεξαρτήτως του σημείου στο οποίο κατασκευάζεται, στόχος του δασαρχείου είναι να κατασκευαστεί ο μικρότερος αριθμός δεξαμενών που απαιτούνται έτσι ώστε κάθε περιοχή να μπορεί να εξυπηρετηθεί από τουλάχιστον μία δεξαμενή. Διαμορφώστε ένα πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για τον καθορισμό της βέλτιστης χωροθέτησης των δεξαμενών.

Άσκηση Β.7

Συμμετέχετε σε ένα παιχνίδι λέξεων στο οποίο πρέπει να χρησιμοποιήσετε κάθε γράμμα της αλφαβήτου το πολύ $n_\alpha,\ n_\beta,\ \ldots,\ n_\omega$ φορές με στόχο να σχηματίσετε λέξεις από ένα δεδομένο σύνολο λέξεων D. Για κάθε λέξη $i \in D$, ως $\alpha_i,\ \beta_i,\ \ldots,\ \omega_i$ συμβολίζεται το πλήθος των εμφανίσεων κάθε γράμματος στη λέξη αυτή. Για παράδειγμα, θεωρώντας ότι η πρώτη λέξη του D είναι η λέξη “γραμμή”, τότε $\alpha_1 = \gamma_1 = \eta_1 = \rho_1 = 1$ και $\mu_1 = 2$.

1. Δεδομένου ότι για κάθε λέξη i που σχηματίζετε κερδίζετε πόντους s_i, διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ για την επιλογή των λέξεων που μεγιστοποιούν τη συνολική βαθμολογία που θα συγκεντρώσετε.
2. Αναμορφώστε το ακέραιο ΓΠ του ερωτήματος (α) για κάθε μία από τις εξής παραλλαγές του παιχνιδιού:

    α) Μεγιστοποίηση του πλήθους των λέξεων που κατασκευάζονται.

β) Για κάθε ζεύγος λέξεων i και j ($i \neq j$) που επιλέγονται δίνεται επιπλέον βαθμολογία s_{ij} ανάλογα με το βαθμό ομοιότητας των λέξεων.

γ) Χρήση το πολύ 100 χαρακτήρων (χωρίς κανένα περιορισμό όσον το πλήθος των φορών που θα χρησιμοποιηθεί κάθε γράμμα).

Άσκηση Β.8

Εντοπίστε και διορθώστε τα λάθη στις ακόλουθες προτάσεις:

1. Θεωρώντας μια μεγάλη θετική σταθερά $M \gg 0$ και μεταβλητές απόφασης $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $y \in \{0, 1\}$, οι ακόλουθοι περιορισμοί υποδηλώνουν ότι $f_1(\mathbf{x}) \leq b_1$ και $f_2(\mathbf{x}) \leq b_2$.

$$f_1(\mathbf{x}) - My \leq b_1 \qquad f_2(\mathbf{x}) - M(1-y) \leq b_2$$

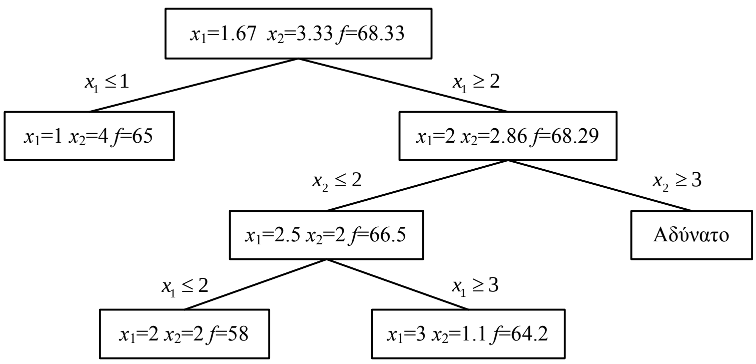
2. Θεωρώντας σταθερές $d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{R}$ και μεταβλητές απόφασης $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $y_j \in \{0, 1\}$ ($j = 1, \ldots N$), οι ακόλουθοι περιορισμοί υποδηλώνουν ότι $f(\mathbf{x}) \geq 1$.

$$f(\mathbf{x}) - (d_1y_1 + d_2y_2 + \cdots + d_Ny_N) = 0 \qquad y_1 + y_2 + \cdots + y_N = 1$$

3. Το σύνολο των εφικτών λύσεων της γραμμικής χαλάρωσης ενός ακέραιου ΓΠ είναι υποσύνολο των εφικτών λύσεων του ακέραιου ΓΠ.
4. Για ένα ακέραιο ΓΠ σε μορφή μεγιστοποίησης, το κάτω φράγμα που υπολογίζεται στη μέθοδο κλάδου & φράγματος, αναπαριστά την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο χώρο των εφικτών λύσεων.

Άσκηση Β.9

Λύνοντας ένα πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (πρόβλημα μεγιστοποίησης) με τη μέθοδο κλάδου και φράγματος διαμορφώνεται το ακόλουθο δέντρο επίλυσης:

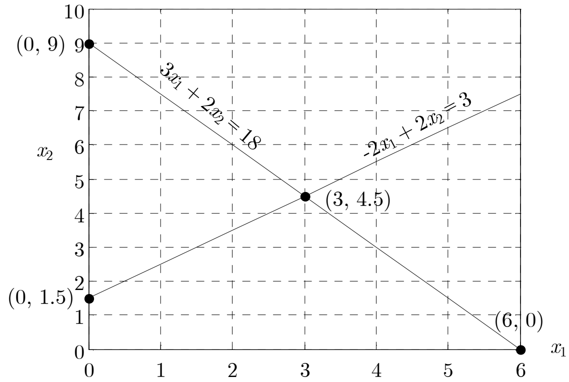


Είναι δυνατός ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης βάσει του παραπάνω δέντρου; Εάν ναι, τότε προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση, διαφορετικά εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να συνεχιστεί η διαδικασία επίλυσης.

Άσκηση Β.10

Δίνεται το ακόλουθο ακέραιο πρόγραμμα και η γραφική του αναπαράσταση:

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 5x_2 \\
\text{Υπό:} \quad & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ και ακέραιες}
\end{aligned}$$



1. Εφαρμόστε τον αλγόριθμο κλάδου και φράγματος για να βρείτε τη βέλτιστη λύση. Παρουσιάστε το δέντρο επίλυσης.
2. Ποιες αλλαγές θα πρέπει να γίνουν στο παραπάνω ακέραιο πρόγραμμα έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι η x_1 μπορεί να πάρει μόνο μία από τις τιμές 0, 0.5, 1, 1.5 ή 2.

Άσκηση B.11

Ένα σύνολο n αντικειμένων βάρους $w_1, \ldots, w_n$ το καθένα, πρέπει να συσκευαστούν το πολύ σε m κουτιά, καθένα από τα οποία μπορεί να μεταφέρει αντικείμενα συνολικού βάρους C. Δοθέντος του ακέραιου ΓΠ

$$\begin{array}{lll} \min & y_1 + y_2 + \cdots + y_m & \\ \text{υ.π.} & w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \cdots + w_n x_{nj} - C y_j \leq 0 & \forall\, j = 1, 2, \ldots, m \\ & x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im} = 1 & \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} & \forall\, i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

απαντήστε στα ακόλουθα:

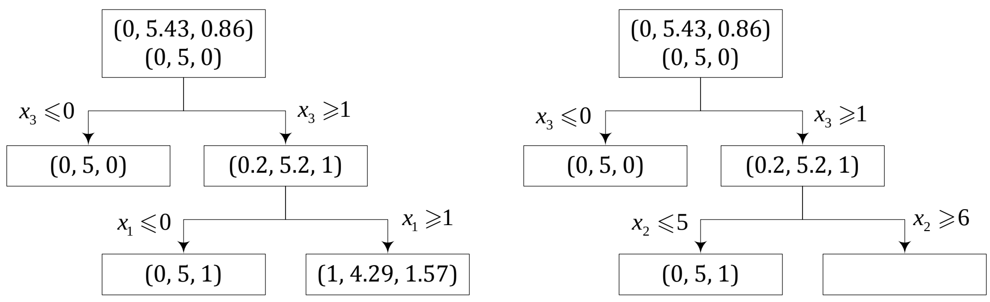
1. Ποια είναι η ερμηνεία του παραπάνω ακέραιου ΓΠ;
2. Πώς μοντελοποιούνται οι ακόλουθοι περιορισμοί: (α) τα αντικείμενα k και ℓ δεν πρέπει να τοποθετηθούν στο ίδιο κουτί, (β) στο κουτί b πρέπει να τοποθετηθεί τουλάχιστον ένα αντικείμενο.

Άσκηση B.12

Δίνεται το ακόλουθο ακέραιο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrl} \min & 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 & \\ \text{υ.π.} & -x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 & \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

1. Συμπληρώστε τα ακόλουθα δέντρα επίλυσης της μεθόδου κλάδου και φράγματος, και εξηγήστε (ξεχωριστά για κάθε δέντρο) γιατί η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (0, 5, 1)$ είναι βέλτιστη.



(α) (β)

2. Περιγράψτε τις αλλαγές που πρέπει να γίνουν στο παραπάνω ακέραιο ΓΠ για να διασφαλιστεί ότι $x_2 \in \{1.7, 3, 4.4, 5.5\}$.

Άσκηση B.13

Μια διαφημιστική εταιρία σχεδιάζει ένα πλάνο προώθησης ενός προϊόντος. Για το σκοπό αυτό εξετάζονται έξι διαφημιστικά μέσα (Δ1 έως Δ6). Το κοινό στο οποίο απευθύνεται κάθε διαφημιστικό μέσο (πλήθος αποδεκτών) και το αντίστοιχο διαφημιστικό κόστος παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6
Αποδέκτες (σε χιλιάδες)	1.000	200	300	400	450	450
Κόστος (σε χιλιάδες €)	500	150	300	250	250	100

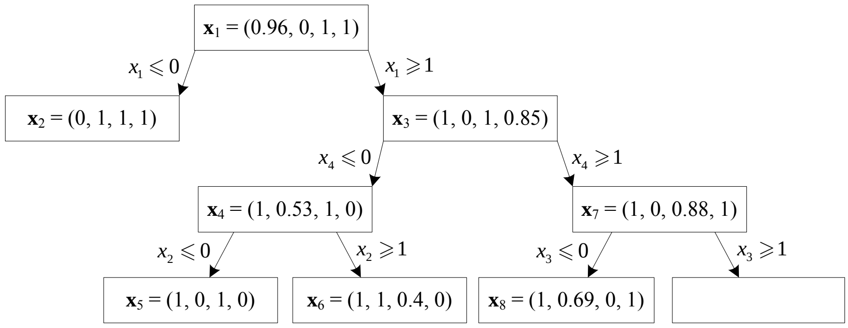
Ο προϋπολογισμός της διαφημιστικής καμπάνιας ανέρχεται στα €1.800.000 και στόχος είναι η επιλογή των κατάλληλων διαφημιστικών μέσων ώστε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των αποδεκτών της καμπάνιας. Διαμορφώστε ένα κατάλληλο ακέραιο ΓΠ λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη τα ακόλουθα:

1. Η επιλογή του διαφημιστικού μέσου Δ6 απαιτεί και την επιλογή του Δ4.
2. Δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη επιλογή των διαφημιστικών μέσων Δ2 και Δ5.
3. Πρέπει να επιλεχθεί τουλάχιστον ένα από τα ζεύγη {Δ1, Δ4} και {Δ2, Δ3}.

Άσκηση Β.14

Χρησιμοποιείστε το ακόλουθο δέντρο της μεθόδου κλάδου και φράγματος για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του αντίστοιχου ακέραιου ΓΠ.

$$\begin{array}{ll} \max & 10x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ \text{υ.π.} & 97x_1 + 32x_2 + 25x_3 + 20x_4 \leqslant 139 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{array}$$



Άσκηση Β.15

Μια αυτοκινητοβιομηχανία εξετάζει την παραγωγή τριών μοντέλων Α, Β και Γ. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται οι απαιτήσεις κάθε μοντέλου (ανά τεμάχιο) σε σίδηρο και εργατοώρες καθώς και το μοναδιαίο κέρδος.

	Α	Β	Γ
Σίδηρος (τόνοι/αυτοκ.)	1,5	3	5
Εργατοώρες (ώρες/αυτοκ.)	30	25	40
Κέρδος (ευρώ/αυτοκ.)	2.000	3.000	4.000

Η επιχείρηση θέλει να προσδιορίσει τη ποσότητα που θα πρέπει να παράγει από κάθε μοντέλο ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος, με δεδομένο ότι διαθέτει 6.000 τόνους σιδήρου και 60.000 εργατοώρες. Επιπλέον, εάν κριθεί συμφέρουσα η παραγωγή κάποιου μοντέλου, τότε θα πρέπει να κατασκευαστούν τουλάχιστον 1.000 αυτοκίνητα. Διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ που μοντελοποιεί το πρόβλημα της επιχείρησης.

Άσκηση Β.16

Έχετε μια ηλεκτρονική συλλογή C αποτελούμενη από n μουσικά κομμάτια m καλλιτεχνών. Οι διάρκειες των κομματιών είναι $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (σε δευτερόλεπτα), ενώ $A_j \subset C$ είναι το σύνολο των κομματιών του καλλιτέχνη j. Από τη συλλογή θέλετε να επιλέξετε κάποια κομμάτια για εγγραφή σε ένα CD διάρκειας 80 λεπτών.

1. Διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ για την επιλογή του μέγιστου αριθμού κομματιών, λαμβάνοντας υπόψη ότι από κάθε καλλιτέχνη θα πρέπει να επιλεχθεί το πολύ ένα κομμάτι.
2. Τα κομμάτια ομαδοποιούνται σε p μουσικά είδη. Δεδομένου ότι G_ℓ είναι το σύνολο των κομματιών που ανήκουν στο είδος ℓ και n_ℓ είναι το πλήθος των αντίστοιχων κομματιών, εξηγήστε τη σημασία των παρακάτω περιορισμών και των δυαδικών μεταβλητών απόφασης $y_\ell \in \{0, 1\}$ ($\ell = 1, 2, \ldots, p$):

$$\sum_{i \in G_\ell} x_i - n_\ell y_\ell \leq 0$$
$$\sum_{i \in G_\ell} x_i - y_\ell \geq 0$$
$$y_1 + y_2 + \cdots + y_p \leq 3$$

Άσκηση Β.17

Μια επιχείρηση εξετάζει την εισαγωγή στην παραγωγή τεσσάρων νέων προϊόντων (Π1, Π2, Π3, Π4). Το κόστος προετοιμασίας της γραμμής παραγωγής είναι €50.000 για το προϊόν Π1, €40.000 για το προϊόν Π2, €70.000 για το προϊόν Π3, και €60.000 για το προϊόν Π4. Τα έσοδα (ανά τεμάχιο) από την παραγωγή κάθε προϊόντος είναι €70 για το προϊόν Π1, €60 για το προϊόν Π2, €90 για το προϊόν Π3, και €80 για το προϊόν Π4. Με τα δεδομένα αυτά η επιχείρηση θα πρέπει να αποφασίσει ποια προϊόντα θα προωθήσει στην παραγωγή και ποιο θα είναι το επίπεδο παραγωγής των προϊόντων αυτών. Επιπλέον θα πρέπει να ληφθούν υπόψη τα ακόλουθα:

1. Δεν είναι δυνατή η παραγωγή περισσότερων από δύο διαφορετικά προϊόντα.
2. Τα προϊόντα Π3 και Π4 μπορούν να παραχθούν μόνο εάν προχωρήσει η παραγωγή κάποιου από τα προϊόντα Π1 και Π2.

Άσκηση Β.18

Μια εταιρία ηλεκτρισμού σκοπεύει να εγκαταστήσει αυτόματους μετρητές κατανάλωσης ρεύματος στους πελάτες της. Οι μετρητές αυτοί μεταδίδουν ασύρματα τα στοιχεία της κατανάλωσης σε κατάλληλους δέκτες, οι οποίοι με τη σειρά τους είναι συνδεδεμένοι με το κεντρικό σύστημα της εταιρίας για την έκδοση των λογαριασμών. Σε μια συγκεκριμένη περιοχή, υπάρχουν 10 καταναλωτές σε καθέναν από τους οποίους αντιστοιχεί ένας μετρητής. Για την κάλυψη της περιοχής αυτής, η εταιρία μπορεί να τοποθετήσει δέκτες σε 8 προκαθορισμένα σημεία, τα οποία επικοινωνούν με τους μετρητές ως εξής:

Δέκτες	1	2	3	4	5	6	7	8
Μετρητές	1, 2, 3	2, 3, 9	5, 6, 7, 8	7, 9, 10	1, 3, 6, 8	1, 4, 7, 9	4, 5, 9	1, 4, 8

Διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ το οποίο θα βοηθήσει την εταιρία να εγκαταστήσει τον ελάχιστο αριθμό δεκτών που απαιτούνται, δεδομένου ότι κάθε δέκτης μπορεί να επεξεργαστεί στοιχεία το πολύ από 3 μετρητές.

Άσκηση Β.19

Μια εταιρία εξετάζει ένα πρόγραμμα εκπαίδευσης του προσωπικού της, το οποίο περιλαμβάνει 10 μαθήματα. Πέντε εταιρίες συμβούλων επιχειρήσεων παρέχουν τη δυνατότητα εκπαίδευσης στα αντικείμενα αυτά. Κάθε εταιρία j χρεώνει ένα κόστος c_{ij} για κάθε μάθημα i που θα προσφέρει και επιπλέον ένα σταθερό κόστος T_j, το οποίο είναι ανεξάρτητο του πλήθους των σεμιναρίων που θα αναλάβει. Στόχος της επιχείρησης είναι η επιλογή των εταιριών που θα αναλάβουν το πρόγραμμα εκπαίδευσης με το μικρότερο συνολικό κόστος. Για το σκοπό αυτό, τα στελέχη της επιχείρησης διαμόρφωσαν το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{5} T_j y_j & \\
\text{Υπό:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_{ij} - 10y_j \leq 0 & \forall\, j = 1, 2, \ldots, 5 \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 & \forall\, i = 1, 2, \ldots, 10 \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} & \forall\, i = 1, 2, \ldots, 10,\ j = 1, 2, \ldots, 5
\end{array}$$

1. Ποια είναι η ερμηνεία του παραπάνω ακέραιου ΓΠ;
2. Πώς μοντελοποιούνται οι ακόλουθοι περιορισμοί: (1) μπορεί να επιλεχθεί το πολύ μία από τις εταιρίες συμβούλων k και ℓ, (2) πρέπει να επιλεχθούν τουλάχιστον 2 εταιρίες συμβούλων.

Άσκηση Β.20

Για την εξυπηρέτηση των υγειονομικών αναγκών μιας περιφέρειας, η αρμόδια αρχή εξετάζει την κατασκευή κέντρων υγείας σε J προεπιλεγμένα σημεία. Η περιφέρεια έχει χωριστεί σε L περιοχές (γνωστού) πληθυσμού $p_1, p_2, \ldots, p_L$. Επίσης, για κάθε περιοχή i είναι γνωστή η απόστασή της (d_{ij}) από κάθε σημείο j όπου μπορεί να κατασκευαστεί ένα κέντρο υγείας. Ο συνολικός προϋπολογισμός που είναι διαθέσιμος για την κατασκευή των κέντρων υγείας είναι B. Το κόστος κατασκευής ενός κέντρου στο σημείο j που θα εξυπηρετεί πληθυσμό s_j έχει εκτιμηθεί ότι ανέρχεται σε $1000s_j$. Για τη διαμόρφωση του βέλτιστου σχεδιασμού, η αρμόδια αρχή έχει διατυπώσει το ακόλουθο ακέραιο ΓΠ:

$$
\begin{array}{lll}
\min & D & \\
\text{Υπό:} & x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{iJ} = 1 & i = 1, 2, \ldots, L \\
& (x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{Lj}) - Ly_j \leq 0 & j = 1, 2, \ldots, J \\
& (x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{Lj}) - y_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, J \\
& D - (d_{i1}x_{i1} + d_{i2}x_{i2} + \ldots + d_{iJ}x_{iJ}) \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, L \\
& s_j - (p_1 x_{1j} + p_2 x_{2j} + \ldots + p_L x_{Lj}) = 0 & j = 1, 2, \ldots, J \\
& 1000s_1 + 1000s_2 + \ldots + 1000s_J \leq B & \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\},\ D, s_j \geq 0 & i = 1, \ldots, L,\ j = 1, \ldots, J
\end{array}
$$

1. Εξηγήστε με σαφήνεια την έννοια των μεταβλητών απόφασης, της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών.
2. Συμβολίζοντας ως $z \in \{0, 1\}$ μια δυαδική μεταβλητή απόφασης, εξηγήστε τι ακριβώς υποδηλώνει η προσθήκη των ακόλουθων δύο περιορισμών:

$$y_1 + y_2 - 2z \geq 0 \qquad y_3 + y_4 + 2z \geq 2$$

Άσκηση Β.21

Η καθημερινή λειτουργία μιας επιχείρησης απαιτεί την ολοκλήρωση 4 εργασιών οι οποίες μπορούν να εκτελεστούν από 4 μηχανές. Ο χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση των εργασιών από κάθε μηχανή δίνεται στον παρακάτω πίνακα μαζί με το χρόνο προετοιμασίας των μηχανών (όλοι οι χρόνοι δίνονται σε λεπτά). Διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ η λύση του οποίου θα μπορούσε να βοηθήσει την επιχείρηση να καθορίσει το βέλτιστο πλάνο εκτέλεσης των εργασιών από τις μηχανές που ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο εκτέλεσης των εργασιών και προετοιμασίας των μηχανών, δεδομένου ότι κάθε εργασία πρέπει να εκτελεστεί από μόνο μία μηχανή.

	Εργασίες				Χρόνος
Μηχανές	1	2	3	4	προετ.
1	42	70	93	*	30
2	*	85	45	*	40
3	58	*	*	37	50
4	58	*	55	62	60

Άσκηση Β.22

Μια επιχείρηση εξετάζει την εισαγωγή στην παραγωγή δύο νέων προϊόντων (Π1, Π2). Το κόστος προετοιμασίας της γραμμής παραγωγής είναι €50.000 για το προϊόν Π1 και €80.000 για το Π2. Τα έσοδα (ανά τεμάχιο) από την παραγωγή κάθε προϊόντος είναι €10 για το προϊόν Π1 και €15 για το Π2. Η παραγωγή μπορεί να γίνει σε δύο εργοστάσια (Ε1, Ε2). Η δυνατότητα παραγωγής του εργοστασίου Ε1 ανέρχεται στα 50 τεμάχια/ώρα για το προϊόν Π1 και στα 40 τεμάχια/ώρα για το Π2. Αντίστοιχα, το εργοστάσιο Ε2 μπορεί να παράγει 40 τεμάχια/ώρα από το προϊόν Π1 και 25 τεμάχια/ώρα από το προϊόν Π2. Η διαθεσιμότητα των εργοστασίων την προσεχή περίοδο ανέρχεται στις 500 ώρες για το Ε1 και τις 700 ώρες για το Ε2. Η επιχείρηση θέλει να εξετάσει εάν είναι συμφέρουσα η παραγωγή των δύο προϊόντων, με δεδομένο ότι μόνο ένα από τα δύο εργοστάσια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή τους. Για το σκοπό αυτό διαμόρφωσε το ακόλουθο ακέραιο ΓΠ (όπου M είναι ένας μεγάλος θετικός αριθμός):

$$
\begin{array}{ll}
\max & 10x_1 + 15x_2 - 50000y_1 - 80000y_2 \\
\text{Υπό:} & x_1 - My_1 \leq 0 \\
& x_2 - My_2 \leq 0 \\
& 0{,}02x_1 + 0{,}025x_2 - Mz \leq 500 \\
& 0{,}025x_1 + 0{,}04x_2 - M(1 - z) \leq 700 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \text{ακέραιοι}, \quad y_1, y_2, z \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Εξηγήστε με σαφήνεια την έννοια των μεταβλητών απόφασης, της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών.

Άσκηση Β.23

Μια επιχείρηση εξετάζει την κατασκευή τριών εργοστασίων στις περιοχές Ε1, Ε2 και Ε3 για την εξυπηρέτηση τριών πελατών της (Π1, Π2, Π3). Το κόστος κατασκευής κάθε εργοστασίου ανέρχεται στα 500 χιλ. ευρώ. Το κόστος αποστολής (χιλ. ευρώ ανά 1000 μονάδες προϊόντος) από κάθε εργοστάσιο προς κάθε πελάτη καθώς και η ελάχιστη ποσότητα (χιλ. μονάδες) που πρέπει να παραλάβει κάθε πελάτης δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Π1	Π2	Π3
Ε1	5	4	2
Ε2	8	7	2
Ε3	3	3	1
Ζήτηση	20	40	50

1. Δεδομένου ότι η παραγωγή κάθε εργοστασίου δεν μπορεί να υπερβεί τις 100 χιλ. μονάδες, διατυπώστε ένα ακέραιο ΓΠ για τον καθορισμό των εργοστασίων που πρέπει να κατασκευαστούν και του τρόπου με τον οποίο θα αξιοποιηθούν (ποσότητες που πρέπει να σταλούν από τα εργοστάσια στους πελάτες) για να ικανοποιηθεί η ζήτηση των πελατών με το μικρότερο κόστος.
2. Προσαρμόστε το ακέραιο ΓΠ λαμβάνοντας υπόψη ότι εάν αποφασιστεί η κατασκευή του εργοστασίου στην περιοχή Ε1, τότε θα πρέπει η παραγωγή του να είναι τουλάχιστον 30 χιλ. μονάδες.

Άσκηση Β.24

Μια επιχείρηση κατασκευής αεροσκαφών βρίσκεται σε συζητήσεις με τρεις πελάτες (Π1, Π2, Π3), οι οποίοι ενδιαφέρονται για τρεις διαφορετικούς τύπους αεροσκαφών (κάθε πελάτης ενδιαφέρεται για έναν τύπο). Ο πελάτης Π1 έχει εκδηλώσει ενδιαφέρον για την αγορά το πολύ τριών αεροσκαφών, ο πελάτης Π2 ενδιαφέρεται για το πολύ δύο και ο Π3 για το πολύ πέντε αεροσκάφη. Η επιχείρηση έχει εκτιμήσει το κέρδος (εκατ. €) συναρτήσει των αεροσκαφών που θα παραδώσει σε κάθε πελάτη ως εξής:

	Ποσότητα				
Πελάτες	1	2	3	4	5
Π1	-1	2	4		
Π2	1	5			
Π3	1	3	5	6	7

Κάθε αεροσκάφος που θα κατασκευαστεί για τον πελάτη Π1 απαιτεί το 20% της παραγωγικής ικανότητας της επιχείρησης. Αντίστοιχα, κάθε αεροσκάφος που θα κατασκευαστεί για τους πελάτες Π2 και Π3 απαιτεί το 40% και 20% αντίστοιχα της διαθέσιμης παραγωγικής δυναμικότητας.

Διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ για το προσδιορισμό της προσφοράς που θα πρέπει να καταθέσει η επιχείρηση σε κάθε πελάτη (πόσα αεροσκάφη να παραδώσει) δεδομένου ότι κάθε πελάτης θα πρέπει να παραλάβει τουλάχιστον ένα αεροσκάφος. Στη μοντελοποίησή σας χρησιμοποιήστε αποκλειστικά δυαδικές μεταβλητές.

Άσκηση Β.25

Μια επιχείρηση διαθέτει m πωλητές, οι οποίοι ξεκινώντας όλοι από ένα συγκεκριμένο σημείο 0 πρέπει να επισκεφτούν n άλλους προορισμούς και να επιστρέψουν στο σημείο εκκίνησης (κάθε πωλητής μπορεί να επισκεφτεί το πολύ $n-m+1$ προορισμούς). Δεδομένου ότι ο χρόνος που απαιτείται για τη μετακίνηση μεταξύ των προορισμών i και j είναι c_{ij}, η διαμόρφωση των διαδρομών που πρέπει να ακολουθήσουν οι πωλητές μπορεί να γίνει λύνοντας το ακέραιο ΓΠ:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{Υπό:} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = m, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{j0} = m & \\
& \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, 2, \ldots, n \\
& \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, 2, \ldots, n \\
& t_i - t_j + (n-m+1)x_{ij} \leq n - m & i, j = 1, 2, \ldots, n \ (i \neq j) \\
& x_{ij}, \in \{0, 1\} & i, j = 0, 1, \ldots, n \ (i \neq j) \\
& t_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

όπου $x_{ij} = 1$ εάν η μετακίνηση από τον προορισμό i στον προορισμό j είναι μέρος της διαδρομής κάποιου πωλητή. Εξηγήστε την έννοια του παραπάνω ακέραιου ΓΠ.

Άσκηση Β.26

Μία τοπική περιφέρεια εξετάζει την κατασκευή τριών μονάδων επεξεργασίας (Μ1, Μ2, Μ3) για τον καθαρισμό μιας λίμνης από δύο τύπους λυμάτων (Λ1 και Λ2). Για κάθε μονάδα, ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το κόστος κατασκευής (C, σε ευρώ), το μοναδιαίο κόστος λειτουργίας (O, σε ευρώ ανά τόνο νερού που θα επεξεργάζεται μία μονάδα επεξεργασίας), την ποσότητα κάθε τύπου λύματος που μπορεί μια μονάδα να αφαιρέσει από κάθε τόνο νερού που θα επεξεργαστεί (P, σε τόνους), καθώς και την ελάχιστη (L) και μέγιστη (U) ποσότητα νερού που μπορεί να επεξεργαστεί κάθε μονάδα (σε τόνους).

			P			
Μονάδες	C	O	Λ1	Λ2	L	U
Μ1	500.000	2	0,40	0,30	20.000	100.000
Μ2	300.000	3	0,25	0,20	20.000	200.000
Μ3	200.000	4	0,20	0,25	20.000	150.000

Περιβαλλοντικές οδηγίες επιβάλουν την αφαίρεση τουλάχιστον 80.000 τόνων του λύματος Λ1 και 50.000 τόνων του Λ2. Παρουσιάστε ένα ακέραιο ΓΠ για την επίτευξη των απαιτήσεων αυτών με το ελάχιστο κόστος.

Άσκηση Β.27

Ένας ραδιοφωνικός σταθμός κάνει διαφημιστικά διαλείμματα του ενός λεπτού. Για την επόμενη ώρα έχει λάβει οχτώ διαφημιστικά μηνύματα, οι διάρκειες των οποίων είναι: 15, 16, 20, 25, 30, 35, 40 και 50 δευτερόλεπτα. Παρουσιάστε ένα ακέραιο ΓΠ για τον καθορισμό του ελάχιστου αριθμού διαλειμμάτων που απαιτούνται για την κάλυψη όλων των διαφημιστικών καταχωρήσεων, δεδομένου ότι κάθε μήνυμα θα πρέπει να περιληφθεί σε ένα μόνο διάλειμμα και ότι τα μηνύματα των 20 και 25 δευτερολέπτων πρέπει να ενταχθούν σε διαφορετικά διαλείμματα.

Άσκηση Β.28

Στα πλαίσια ενός ευρωπαϊκού προγράμματος επενδύσεων έχουν κατατεθεί N προτάσεις χρηματοδότησης για αναπτυξιακά και επενδυτικά έργα. Για κάθε έργο i έχουν εκτιμηθεί οι απαιτήσεις του σε κεφάλαια (c_i) και τα οικονομικά οφέλη που θα αποφέρει (p_i).

1. Παρουσιάστε ένα ακέραιο ΓΠ για την επιλογή το πολύ K προτάσεων, ώστε να μεγιστοποιηθεί το αθροιστικό οικονομικό όφελος, δεδομένου ότι η συνολική χρηματοδότηση δεν πρέπει να υπερβεί το διαθέσιμο προϋπολογισμό C.
2. Εκτός από τα οφέλη που αποφέρει η αυτοτελής υλοποίηση ενός έργου, υπάρχει η δυνατότητα επίτευξης συνεργιών. Προκειμένου να ενσωματωθεί το στοιχείο αυτό στη μοντελοποίηση, οι προτάσεις έχουν ενταχθεί σε R ομάδες ανάλογα με τις πιθανές συνέργειες που μπορούν να αναπτυχθούν μεταξύ τους. Ειδικότερα, εφόσον υλοποιηθούν όλες οι επενδύσεις μιας ομάδας j, τότε θα επιτευχθεί ένα όφελος s_j (επιπλέον του αθροιστικού οφέλους από την αυτοτελή υλοποίηση των επιμέρους επενδύσεων). Προσαρμόστε το ακέραιο ΓΠ του προηγούμενου ερωτήματος ενσωματώνοντας τη μοντελοποίηση των συνεργιών.

Άσκηση Β.29

Για τη βελτίωση της ενεργειακής απόδοσης ενός κτιρίου εξετάζονται 10 εναλλακτικές επιλογές (Ε1-Ε10). Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το κόστος (K) των επιλογών και την ποσοστιαία βελτίωση (B) που επιφέρουν στην ενεργειακή απόδοση του κτιρίου (σε σχέση με την παρούσα κατάσταση).

	Ε1	Ε2	Ε3	Ε4	Ε5	Ε6	Ε7	Ε8	Ε9	Ε10
K (χιλ. ευρώ)	5	2	10	4	6	7	3	4	8	7
B (σε %)	5	3	7	8	5	2	7	3	10	7

Διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ για την πραγματοποίηση των καλύτερων επιλογών που θα μεγιστοποιήσουν τη συνολική (αθροιστική) ποσοστιαία βελτίωση της ενεργειακής απόδοσης του κτιρίου, δεδομένου ότι:

1. Το κόστος της ενεργειακής αναβάθμισης του κτιρίου δεν πρέπει να υπερβεί τα 30.000 ευρώ.
2. Οι επιλογές Ε4, Ε5 και Ε6 αφορούν εναλλακτικούς τρόπους φωτισμού και επομένως έχει νόημα να υλοποιηθεί το πολύ μία από τις επιλογές αυτές.

3. Η επιλογή Ε10 μπορεί να υλοποιηθεί μόνο εάν υλοποιηθεί η Ε2.
4. Βάσει του νομοθετικού πλαισίου για την ενεργειακή απόδοση κτιρίων, είναι απαραίτητο να υλοποιηθεί είτε τουλάχιστον μία από τις επιλογές Ε1 και Ε7 ή/και τουλάχιστον μία από τις Ε3 και Ε8.

Άσκηση Β.30

Μια επιχείρηση εξετάζει την ανάθεση της διαχείρισης των n πελατών της στους πωλητές που διαθέτει. Για κάθε πελάτη i έχουν εκτιμηθεί τα έσοδα c_i που αναμένεται να αποφέρει τον επόμενο χρόνο. Η επιχείρηση θέλει να χρησιμοποιήσει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό πωλητών για την εξυπηρέτηση των πελατών της, δεδομένου ότι:

1. Κάθε πελάτης θα πρέπει να ανατεθεί σε έναν μόνο πωλητή.
2. Κάθε πωλητής πρέπει να διαχειριστεί πελάτες συνολικής αξίας τουλάχιστον L και το πολύ U.

Παρουσιάστε ένα ακέραιο ΓΠ για το καθορισμό της βέλτιστης ανάθεσης των πελατών στους πωλητές.

Άσκηση Β.31

Ένας πωλητής πρέπει να επισκεφτεί n προορισμούς (μία φορά τον καθένα) και να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης. Γνωρίζοντας τις αποστάσεις d_{ij} για κάθε ζεύγος προορισμών $\{i, j\}$, η διαμόρφωση της βέλτιστης διαδρομής που ελαχιστοποιεί τη συνολική απόσταση μπορεί να γίνει μέσω της λύσης του παρακάτω ακέραιου ΓΠ:

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} & \\
\text{υ.π.} & \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i \neq j} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i,j \in S} x_{ij} \leqslant |S| - 1 & \forall S \subset \{1, 2, \ldots, n\},\ 1 < |S| < n-1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i, j = 1, \ldots, n
\end{array}$$

1. Εξηγήστε με σαφήνεια την παραπάνω μοντελοποίηση (ερμηνεία μεταβλητών, αντικειμενικής, περιορισμών).
2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του προβλήματος (μεταβλητές, περιορισμοί); Εξηγήστε εν συντομία την απάντησή σας.

   α) n^2 μεταβλητές και $3n$ περιορισμοί
   β) $2n$ μεταβλητές και $3n$ περιορισμοί
   γ) $n(n-1)$ μεταβλητές και περιορισμοί της τάξης 2^n
   δ) n^2 μεταβλητές και περιορισμοί της τάξης 2^n
   ε) $n(n-1)$ μεταβλητές και περιορισμοί της τάξης n^2

3. Θα μπορούσε η μοντελοποίηση να απλοποιηθεί σημαντικά εάν το πρόβλημα είναι συμμετρικό (δηλαδή $d_{ij} = d_{ji}$);

Άσκηση Β.32

Εξηγήστε/διορθώστε τα λάθη στις παρακάτω προτάσεις:

α) Για τη λύση ακέραιων ΓΠ με τη διαδικασία κλάδου και φράγματος προτιμάται ο δυϊκός αλγόριθμος γιατί η λύση του δυϊκού είναι γενικά υπολογιστικά ευκολότερη από τη λύση του πρωτεύοντος.
β) Το ΚΦ στη διαδικασία κλάδου και φράγματος αντιστοιχεί στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη χειρότερη ακέραια λύση και το ΑΦ στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την καλύτερη ακέραια λύση.
γ) Ακέραια λύση είναι εκείνη για την οποία η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ακέραιος αριθμός.
δ) Η γραμμική χαλάρωση ενός ακέραιου ΓΠ αναφέρεται στη στρογγυλοποίηση μιας μη ακέραιας λύσης προς την πλησιέστερη ακέραια εφικτή λύση.
ε) Έστω μεταβλητές απόφασης $x, y \geq 0$ και $z \in \{0,\ 1\}$. Ο περιορισμός $x + y \geq 10z$ εξασφαλίζει ότι εάν $x + y \geq 10$, τότε $z = 1$.
στ) Εάν ένα ακέραιο ΓΠ έχει δύο εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{x}''$, τότε έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις, γιατί κάθε γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{x}''$ είναι επίσης μια βέλτιστη λύση, όπως σε οποιοδήποτε ΓΠ.

Άσκηση Β.33

Ένας τηλεπικοινωνιακός πάροχος θέλει να εγκαταστήσει έως 3 υπαίθριους κατανεμητές για την επέκταση του δικτύου του. Οι κατανεμητές μπορούν να εγκατασταθούν σε 5 προκαθορισμένα σημεία (Κ1, ..., Κ5) για να καλύψουν 4 περιοχές (Π1, ..., Π4). Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις αποστάσεις (σε χλμ.) για κάθε ζεύγος κατανεμητή-περιοχής. Διατυπώστε ένα ακέραιο ΓΠ για την κατανομή των περιοχών στους κατανεμητές ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνολική απόσταση κάλυψης, δεδομένου ότι κάθε περιοχή θα πρέπει να καλυφθεί από ένα μόνο κατανεμητή, ενώ κάθε κατανεμητής μπορεί καλύψει το πολύ δύο περιοχές.

	K1	K2	K3	K4	K5
Π1	0,5	1,2	1	0,5	0,2
Π2	1	0,3	0,6	0,3	0,5
Π3	1,1	1	0,3	0,9	1,2
Π4	0,8	0,4	1,2	0,7	1

Άσκηση Β.34

Για την υλοποίηση 4 εργασιών (Ε1-Ε4) υπάρχουν διαθέσιμοι 5 εργαζόμενοι (Π1-Π5). Οι εργασίες Ε1 και Ε4 απαιτούν 2 άτομα ενώ οι υπόλοιπες μπορούν να εκτελεστούν μόνο από έναν εργαζόμενο. Κάθε εργαζόμενος μπορεί να εκτελέσει το πολύ δύο εργασίες. Οι εργαζόμενοι Π2 και Π3 δεν μπορούν να συνεργαστούν μεταξύ τους, οπότε δεν πρέπει να τοποθετηθούν στις ίδιες εργασίες. Διαμορφώστε ένα ακέραιο ΓΠ για την ανάθεση του ελάχιστου αριθ-μού εργαζομένων στις εργασίες.

Άσκηση Β.35

Μία εταιρεία διαχείρισης ακινήτων προγραμματίζει την κατασκευή 3 ακινήτων τα επόμενα 4 χρόνια. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη διάρκεια κάθε κατασκευής (σε έτη), το προσωπικό που απαιτείται ετησίως και τα ετήσια έσοδα από κάθε ακίνητο μετά την ολοκλήρωσή του. Στόχος είναι ο προγραμματισμός της κατασκευής των ακινήτων ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά έσοδα έως το τέλος του 4ου έτους, δεδομένου ότι το ακίνητο 2 θα πρέπει να ολοκληρωθεί έως το τέλος του 4ου έτους (τα υπόλοιπα μπορούν να ολοκληρωθούν μετά την 4ετία). Χρησιμοποιώντας μεταβλητές $x_{it} \in \{0, 1\}$, τέτοιες ώστε

Ακίνητα	Διάρκεια έργου (έτη)	Προσωπικό	Ετήσια έσοδα (χιλ. €)
1	2	30	50
2	2	20	30
3	3	20	40

$x_{it} = 1$ εάν η κατασκευή του ακινήτου i ξεκινήσει στην αρχή του έτους t, απαντήστε στα ακόλουθα:

α) Εκφράστε την αντικειμενική συνάρτηση (έσοδα 4ετίας) σε σχέση με τις μεταβλητές απόφασης.
β) Παρουσιάστε περιορισμούς που εξασφαλίζουν ότι: (1) η κατασκευή κάθε ακινήτου θα ξεκινήσει σε ένα από τα 4 χρόνια, (2) σε κάθε έτος μπορεί να ξεκινήσει η κατασκευή μόνο ενός ακινήτου, και (3) το προσωπικό που θα απασχολείται κάθε χρόνο στις κατασκευές δεν θα υπερβαίνει τα 60 άτομα.

Άσκηση Β.36

Μια επιχείρηση που διαχειρίζεται δεξαμενόπλοια έχει αναλάβει τη μεταφορά 10000lt diesel, 13500lt απλής αμόλυβδης βενζίνης και 16000lt super αμόλυβδης. Το πλοίο που θα χρησιμοποιηθεί διαθέτει 5 δεξαμενές χωρητικότητας 9500, 7500, 6000, 6800 και 8500 λίτρων. Με δεδομένο ότι κάθε δεξαμενή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μεταφορά ενός μόνο είδους καυσίμου, στόχος να κατανεμηθούν τα καύσιμα στις δεξαμενές ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική ποσότητα που θα μεταφερθεί. Διατυπώστε το πρόβλημα ως ένα ακέραιο ΓΠ, εξηγώντας τις μεταβλητές απόφασης και τους περιορισμούς που θα χρησιμοποιήσετε.

Γ. Θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού

Άσκηση Γ.1

Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{υ.π.} & x_1 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1 , \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Διατυπώστε το πρόβλημα σε κανονική μορφή και βρείτε τη βέλτιστη λύση χωρίς να εισάγετε τεχνητές μεταβλητές.

2. Με βάση τις λύσεις που εξετάστηκαν κατά την επίλυση του προβλήματος απαντήστε στα ακόλουθα
   α) Πόσες είναι βασικές λύσεις και πόσες βασικές εφικτές λύσεις;
   β) Για κάθε λύση παρουσιάστε την αντίστοιχη λύση του δυϊκού.
   γ) Πόσες από τις λύσεις του δυϊκού που προσδιορίσατε στο ερώτημα (β) είναι βασικές εφικτές λύσεις για το δυϊκό πρόβλημα;

Άσκηση Γ.2

Διαμορφώστε ένα γραμμικό πρόγραμμα για να διαπιστώσετε εάν το ακόλουθο σύστημα έχει λύση:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -\,6x_2 & +\;\;x_3 & -\;\;x_4 & = & 5 \\ & -\,2x_2 & +\,2x_3 & -\,3x_4 & \geq & 3 \\ 3x_1 & & -\,2x_3 & +\,4x_4 & = & -1 \\ x_1 & & ,\;\;x_3 & ,\;\;x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση Γ.3

Η λύση του γραμμικού προγράμματος

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}\right\} \quad (\text{ΓΠ-}A)$$

με τη μέθοδο του μεγάλου M, βασίζεται στη λύση του ακόλουθου «επαυξημένου» γραμμικού προγράμματος:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} - M\mathbf{e}^\top \mathbf{y} \\ \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0 \end{array}\right\} \quad (\text{ΓΠ-}M)$$

όπου $\mathbf{y}$ είναι το διάνυσμα με τις τεχνητές μεταβλητές και $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα-στήλη.

1. Δείξτε ότι το ΓΠ-M δεν μπορεί να είναι αδύνατο.
2. Διαμορφώστε το δυϊκό του ΓΠ-M. Εάν το ΓΠ-M είναι μη φραγμένο τι συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί για το δυϊκό του;
3. Με βάση την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα, θα συμφωνούσατε με τον ισχυρισμό ότι εάν το ΓΠ-M είναι μη φραγμένο, τότε το ΓΠ-A είναι επίσης μη φραγμένο;

Άσκηση Γ.4

1. Δύο γραμμικά προγράμματα θεωρούνται ταυτόσημα εάν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο με κάποιον από τους εξής μετασχηματισμούς: (1) πολλαπλασιάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση με -1 ώστε αυτή να μεταβληθεί από ελαχιστοποίηση σε μεγιστοποίηση και αντίστροφα, και/ή (2) πολλαπλασιάζοντας κάποιους περιορισμούς με -1 ώστε να αλλάξει η φορά τους. Για παράδειγμα, τα γραμμικά προγράμματα $\max\{\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0\}$ και $\min\{-\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \mid -\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant -\mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0\}$ είναι ταυτόσημα. Με βάση αυτή την παρατήρηση, παρουσιάστε κατάλληλες συνθήκες για τα $\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}$ ώστε το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0\}$ να είναι ταυτόσημο με το δυϊκό του. Δώστε ένα παράδειγμα ενός γραμμικού προγράμματος που ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές και είναι ταυτόσημο με το δυϊκό του.
2. Δείξτε ότι εάν $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, τότε κάθε εφικτή λύση του ΓΠ $\max\{\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}\}$ είναι βέλτιστη.

Άσκηση Γ.5

Εφαρμόζοντας τη φάση I σε ένα ΓΠ διαμορφώνεται ο ακόλουθος βέλτιστος πίνακας simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	4	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
0	1		1	0	0,50	0	0,13	0	−0,13	2,5
−1	$\bar{\bar{2}}$		0	0	0	0	−0,25	1	0,25	0
0	2		0	1	1,17	0,33	0,29	0	0,04	5,83
		$\mathbf{c}$	0	0	0	0	−1	−1	−1	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	0	0	−1,25	0	−0,75	0

1. Με βάση αυτή τη λύση μπορείτε να πείτε εάν περιττεύει κάποιος περιορισμός του προβλήματος; Παρουσιάστε τον πρώτο πίνακα simplex της φάσης II και τον αντίστροφο πίνακα της βάσης.
2. Επαναλάβατε το ερώτημα (1) στην περίπτωση όπου $y_{\bar{\bar{2}}4} = -1$.

Άσκηση Γ.6

Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{υ.π.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le 0 \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

1. Διαμορφώστε το δυϊκό πρόβλημα.
2. Δείξτε ότι είτε η λύση $\mathbf{x} = 0$ είναι βέλτιστη είτε το πρόβλημα δεν είναι φραγμένο.

Άσκηση Γ.7

Κατά την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος σε πρότυπη μορφή διαμορφώνεται ο εξής πίνακας simplex:

Βάση	1	2	3	4	5	$\mathbf{x}_B$
3	1	α	1	0	0	4
4	β	-4	0	1	0	1
5	γ	3	0	0	1	δ
$\bar{\mathbf{c}}$	ε	-2	0	0	0	-10

Για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις προσδιορίστε κατάλληλες συνθήκες για τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ που τις επαληθεύουν.

1. Η λύση του πίνακα είναι βέλτιστη αλλά όχι μοναδική.
2. Η λύση του πίνακα είναι εκφυλισμένη βασική δυνατή λύση αλλά όχι βέλτιστη.
3. Το πρόβλημα δεν είναι φραγμένο.
4. Η λύση του πίνακα δεν είναι βέλτιστη. Ανάλογα με τις πιθανές τιμές των παραμέτρων προσδιορίστε τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η αλλαγή της βάσης και τη νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Άσκηση Γ.8

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές ή λάθος δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

1. Εάν μία εφικτή λύση είναι βέλτιστη, τότε είναι βασική εφικτή λύση.
2. Εάν στη βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$ ενός γραμμικού προγράμματος υπάρχει κάποιος περιορισμός i ώστε $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i$, τότε η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή είναι $u_i = 0$. Αντίστοιχα, εάν $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i$, τότε $u_i > 0$.
3. Μία επιχείρηση διαθέτει δύο αποθήκες για να εξυπηρετήσει δύο πελάτες. Κάθε αποθήκη διαθέτει 100 τεμάχια από κάποιο προϊόν, ο πελάτης 1 ζητά 150 τεμάχια και ο πελάτης 2 ζητά 50 τεμάχια. Από την κάθε αποθήκη μεταφέρονται 75 τεμάχια στον πελάτη 1 και 25 στον πελάτη 2. Η λύση αυτή είναι βασική εφικτή λύση.
4. Η αλλαγή των δεξιών μερών των περιορισμών ενός γραμμικού προγράμματος το οποίο έχει βέλτιστη λύση είναι πιθανό να καταστήσει το πρόβλημα μη φραγμένο.

Άσκηση Γ.9

Διαμορφώστε ένα γραμμικό πρόγραμμα ώστε να εξετάσετε εάν υπάρχει λύση στο ακόλουθο σύστημα ανισοτήτων:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\le -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &\le -1 \\ x_1 \ , \quad x_2 \ , \quad x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Λύστε το γραμμικό πρόγραμμα και δείξτε ότι με βάση τη βέλτιστη λύση το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση Γ.10

Μετατρέψτε το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα σε πρότυπη μορφή κατάλληλη για την εφαρμογή της simplex και διαμορφώστε το δυϊκό του (αφού πρώτα μετατρέψετε το γραμμικό πρόγραμμα σε κανονική μορφή).

$$\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 + x_2 - 3x_3 & & \\
\text{υ.π.} & x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 11 \\
& x_1 - x_2 + x_3 & = & -1 \\
& -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & \geq & 8 \\
& 7x_1 + 11x_2 - 9x_3 & \geq & 0 \\
& x_1 \ , \ x_2 & \geq & 0 \\
& x_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

Άσκηση Γ.11

Στις γραπτές εξετάσεις του μαθήματος «Γραμμικός Προγραμματισμός» σας ζητείτε η λύση του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & x_1 + 3x_2 & & \\
\text{υ.π.} & x_1 + x_2 & \geq & 3 \\
& x_1 - x_2 & \geq & 2 \\
& x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\
& x_1 \ , \ x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Για τη λύση αυτού του γραμμικού προγράμματος ζητάτε τη «βοήθεια» ενός συμφοιτητή σας, ο οποίος σας δίνει τον ακόλουθο πίνακα simplex και στη συνέχεια αποχωρεί από την αίθουσα.

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
	$\bar{1}$					$-1/3$	$2/3$	
	2					$1/3$	$1/3$	
	1					$-2/3$	$1/3$	
		$\mathbf{c}$						
		$\bar{\mathbf{c}}$						

1. Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν στον παραπάνω πίνακα και ελέγξτε εάν η λύση αυτή είναι βέλτιστη. Εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίσατε τις τιμές των βασικών μεταβλητών.
2. Διαμορφώστε τον βέλτιστο πίνακα του δυϊκού.

Άσκηση Γ.12

Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 5x_1 + x_2 - 12x_3 & & \\
\text{υ.π.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 10 \\
& 5x_1 + 3x_2 & \leq & 16 \\
& x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Λύνοντας το πρόβλημα καταλήγετε στον ακόλουθο βέλτιστο πίνακα simplex:

$\mathbf{c}_B$	Βάση		1	2	3	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	2		0	1	5	5	-3	2
5	1		1	0	-3	-3	2	2
		$\mathbf{c}$	5	1	-12	$-M$	0	
		$\bar{\mathbf{c}}$	0	0	-2	$10-M$	-7	12

Με βάση αυτόν τον πίνακα simplex καθορίστε τη νέα βέλτιστη λύση εάν το δεξιό μέρος του δεύτερου περιορισμού αυξηθεί από 16 σε 17.

Άσκηση Γ.13

Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ \text{υ.π.} & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ge 0 \end{array}$$

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βρίσκετε τη βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^* = (0,\ 10/3,\ 0)$. Η αντίστοιχη βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι $\mathbf{u}^* = (0,\ 7/3)$. Θεωρώντας ότι η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει ως $3x_1 + 7x_2 + 3x_3$ και ότι ο πρώτος περιορισμός γίνεται $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7$, δείξτε (χωρίς να λύσετε το πρόβλημα) ότι η προηγούμενη λύση παραμένει βέλτιστη.

Άσκηση Γ.14

Εντοπίστε και διορθώστε τα λάθη στις ακόλουθες προτάσεις:

1. Όταν ένα ΓΠ έχει περιορισμούς ισότητας, τότε σε αυτούς εισάγονται τεχνητές μεταβλητές ώστε να ξεκινήσει η διαδικασία επίλυσης από μία αρχική βασική εφικτή λύση που είναι εφικτή στο αρχικό ΓΠ.
2. Εάν το πρωτεύον ΓΠ είναι μη φραγμένο, τότε στη βέλτιστη λύση του δυϊκού, η τιμή της δυϊκής αντικειμενικής συνάρτησης θα πρέπει να είναι ίση με το μηδέν.
3. Εάν δεν μπορεί να επιλεχθεί κάποια μεταβλητή ώστε να εξαχθεί από τη βάση σε κάποια επανάληψη της μεθόδου simplex, τότε το ΓΠ είναι αδύνατο.
4. Κάθε βασική λύση είναι ένα ακραίο σημείο του χώρου των εφικτών λύσεων.
5. Σε μία βασική λύση, κάθε μεταβλητή απόφασης που είναι ίση με μηδέν είναι μη βασική.
6. Η φάση Ι στη μέθοδο των δύο φάσεων χρησιμοποιείται για να ελέγξουμε εάν το ΓΠ είναι φραγμένο.
7. Στο δυϊκό αλγόριθμο simplex, εάν δεν μπορεί να επιλεχθεί κάποια μεταβλητή για να εισέλθει στη βάση, τότε το δυϊκό είναι αδύνατο και αντίστοιχα το πρωτεύον είναι επίσης αδύνατο.

Άσκηση Γ.15

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 - 6x_2 \\ \text{υ.π.} & -x_1 - x_2 - x_3 \le -2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ge 0 \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό γραμμικό πρόγραμμα.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού με τη γραφική μέθοδο. Είναι αυτή η βέλτιστη λύση μοναδική; Ποια είναι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος;
3. Για κάθε βασική εφικτή λύση (ΒΕΛ) του δυϊκού καθορίστε τις δυϊκές μεταβλητές που είναι βασικές (λάβετε υπόψη και τις μεταβλητές απόκλισης).
4. Κάθε ΒΕΛ του δυϊκού αντιστοιχεί σε μία βασική λύση του πρωτεύοντος. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα προσδιορίστε τις βασικές μεταβλητές του πρωτεύοντος που αντιστοιχούν σε κάθε ΒΕΛ του δυϊκού.
5. Ποιες από τις βασικές λύσεις του πρωτεύοντος που αντιστοιχούν στις ΒΕΛ του δυϊκού, είναι εφικτές;

Άσκηση Γ.16

Δίνεται το ακόλουθο (εφικτό) ΓΠ με παραμέτρους $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rl} \min & a_1x_1 + a_2x_2 - b_1y_1 - b_2y_2 \\ \text{υ.π.} & x_1 - y_1 = c_1 \\ & x_2 - y_2 = c_2 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \le 0 \end{array}$$

1. Βρείτε μια εφικτή λύση (x_1, x_2, y_1, y_2) εκφρασμένη συναρτήσει των παραμέτρων c_1, c_2.
2. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ. Θα μπορούσε το δυϊκό να είναι μη φραγμένο;
3. Χρησιμοποιώντας το δυϊκό καθορίστε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a_1, a_2, b_1, b_2, ώστε το παραπάνω ΓΠ να έχει βέλτιστη λύση.

Άσκηση Γ.17

Ένα ΓΠ της μορφής $\max\{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0\}$ με $\mathbf{b} \geqslant 0$ έχει την ακόλουθη βέλτιστη λύση. Ποιο είναι το ΓΠ;

Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{x}_B$
1	1	-2	0	1	1	-1	2
3	0	5	1	1	-1	2	1
$\bar{\mathbf{c}}$	0	-5	0	-2	-1	-4	17

Άσκηση Γ.18

Βρείτε τη βέλτιστη λύση στο ακόλουθο ΓΠ σε μία επανάληψη της simplex. Εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο επιλέξατε την εισερχόμενη μεταβλητή.

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\
\text{υ.π.} & 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{array}
$$

Άσκηση Γ.19

Διορθώστε τα λάθη στις ακόλουθες προτάσεις:

1. Στη μέθοδο κλάδου και φράγματος η λύση των επιμέρους ΓΠ γίνεται συνήθως με το δυϊκό αλγόριθμο simplex γιατί γενικά η λύση του δυϊκού είναι υπολογιστικά ευκολότερη από τη λύση του πρωτεύοντος.
2. Κάθε βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα μεταφοράς με m πηγές και n προορισμούς έχει το πολύ $m + n - 1$ διαδρομές.
3. Μεταβολές εκτός των ορίων σε κάποιο από τα δεξιά μέρη των περιορισμών ενός ΓΠ που έχει βέλτιστη λύση, είναι πιθανό να καταστήσουν το πρόβλημα μη φραγμένο. Η πιθανότητα αυτή διερευνάται με τη μέθοδο των δύο φάσεων.
4. Εάν το δυϊκό ΓΠ της φάσης Ι είναι μη φραγμένο, τότε το πρωτεύον πρόβλημα της φάσης Ι είναι αδύνατο.
5. Εάν η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος δεν είναι μοναδική, τότε και η βέλτιστη λύση του δυϊκού δεν είναι μοναδική.

Άσκηση Γ.20

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$
\begin{array}{lrcrl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & \\
\text{υ.π.} & -x_1 & + & 2x_2 & \le 5 \\
& x_1 & + & x_2 & \le 4 \\
& x_1 & & & \le 3 \\
& x_1 & , & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

1. Δείξτε γραφικά ότι η λύση $(x_1, x_2) = (3, 1)$ είναι βέλτιστη. Είναι η βέλτιστη λύση μοναδική;
2. Ποιες είναι οι βασικές μεταβλητές που αντιστοιχούν στην παραπάνω λύση; Εξηγήστε εν συντομία τον τρόπο με τον οποίο βρήκατε τις βασικές μεταβλητές και παρουσιάστε τον πίνακα της βάσης.
3. Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα simplex (εξηγώντας εν συντομία τη διαδικασία που ακολουθήσατε) και ξεκινώντας από αυτόν βρείτε τη βέλτιστη λύση.

Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$					1
$\bar{2}$					-1
1					1

4. Σε ποιο διάστημα τιμών μπορεί να κυμανθεί ο συντελεστής της μεταβλητής x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη λύση;
5. Από το βέλτιστο πίνακα simplex του πρωτεύοντος και τις αντιστοιχίες πρωτεύοντος - δυϊκού, βρείτε το διάστημα τιμών στο οποίο μπορεί να κυμανθεί ο συντελεστής της δυϊκής μεταβλητής u_1 στην αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού χωρίς να μεταβληθεί η βέλτιστη λύση.

6. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού από τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος.

Άσκηση Γ.21

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \min & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \\ \text{υ.π.} & & & x_2 & - & x_3 & \geq 4 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

1. Είναι το πρόβλημα εφικτό; Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.
2. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ σε κανονική μορφή αφού πρώτα διαμορφώσετε το πρωτεύον σε κανονική μορφή. Είναι το δυϊκό εφικτό; Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.
3. Χρησιμοποιώντας τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα δύο ερωτήματα, εξηγήστε εάν το πρωτεύον έχει βέλτιστη λύση, είναι αδύνατο ή μη φραγμένο.

Άσκηση Γ.22

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl} \max & & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 8x_5 & \\ \text{υ.π.} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = 3 \\ & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & \geq 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

1. Διαμορφώστε το δυϊκό ΓΠ, χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στο παραπάνω ΓΠ.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού γραφικά.
3. Ποιες από τις μεταβλητές του πρωτεύοντος είναι βασικές στη (βέλτιστη) βασική εφικτή λύση που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του δυϊκού; Βρείτε τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος.

Άσκηση Γ.23

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \min & 1/3x_1 & + & x_2 & & & \\ \text{υ.π.:} & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geq 15 \\ & x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & \geq 12 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

1. Εξηγήστε με ποιον τρόπο θα μπορούσατε να βρείτε τη βέλτιστη λύση χωρίς να εισάγετε τεχνητές μεταβλητές (παρουσιάστε τον 1ο πίνακα simplex και προσδιορίστε την εισερχόμενη και εξερχόμενη μεταβλητή).
2. Δεδομένου ότι η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (15,\ 0,\ 0)$ είναι βέλτιστη, εξηγήστε γιατί η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (7.5,\ 2.5,\ 0)$ είναι επίσης βέλτιστη. Πόσες βέλτιστες λύσεις έχει το ΓΠ; Θα μπορούσε να εντοπιστεί η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (7.5,\ 2.5,\ 0)$ μέσω αλγορίθμων τύπου simplex; Εξηγήστε εν συντομία τις απαντήσεις σας.
3. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας για να βρείτε τη λύση του δυϊκού που αντιστοιχεί στη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (15,\ 0,\ 0)$.

Άσκηση Γ.24

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \max & -3x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & \\ \text{υ.π:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq 3 \\ & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq -5 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = 2 \\ & x_1 & , & x_2 & & & & & \geq 0 \\ & & & & & & & x_4 & \leq 0 \\ & & & & & x_3 & & & \in \mathbb{R} \end{array}$$

1. Διαμορφώστε το δυϊκό ΓΠ, χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στο παραπάνω ΓΠ.
2. Η βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$ του παραπάνω ΓΠ είναι τέτοια ώστε $x_1^* - 2x_2^* + 3x_3^* + 4x_4^* < 3$. Βάσει του στοιχείου αυτού, σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε για την τιμή της δυϊκής μεταβλητής του 1ου περιορισμού στη βέλτιστη λύση του δυϊκού;

Α: Είναι αυστηρά θετική	Γ: Είναι ίση με μηδέν
Β: Είναι αυστηρά αρνητική	Δ: Δεν προκύπτει κάποιο συμπέρασμα

3. Για κάποια εφικτή λύση του δυϊκού, η αντικειμενική συνάρτηση (του δυϊκού) είναι ίση με 9.5. Βάσει του στοιχείου αυτού, σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του παραπάνω ΓΠ;

Α: Είναι μικρότερη από 9.5	Γ: Είναι ίση με 9.5
Β: Είναι μεγαλύτερη από 9.5	Δ: Δεν προκύπτει κάποιο συμπέρασμα

Άσκηση Γ.25

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrrrl}
\max & -3x_1 + & x_2 + & 2x_3 & \\
\text{υ.π.:} & & x_2 + & 2x_3 & \leq 3 \\
& x_1 & - & 3x_3 & \geq 1 \\
& 2x_1 + & 3x_2 & & \geq 2 \\
& x_1 \;, & x_2 \;, & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

1. Γράπτε το δυϊκό ΓΠ.
2. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία της δυϊκότητας δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0.

Άσκηση Γ.26

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrrl}
\text{Μεγιστοποίηση} & 2x_1 & - \; 4x_2 & \\
\text{Υπό:} & x_1 & - \;\; x_2 & \leq 1 \\
& x_1 \;, & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

1. Παρουσιάστε το δυϊκό ΓΠ και βρείτε τη βέλτιστη λύση απλά εξετάζοντας τη μορφή του.
2. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος από τη λύση του δυϊκού.
3. Ποιες τιμές του συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση της μεταβλητής απόφασης x_1 καθιστούν το δυϊκό αδύνατο; Σε ποιο συμπέρασμα οδηγεί η θεωρία δυϊκότητας για το πρωτεύον στην περίπτωση αυτή;

Άσκηση Γ.27

Δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα για ένα πρόβλημα μεταφοράς με δύο αποθήκες (Α1, Α2) και τρεις πελάτες (Π1, Π2, Π3):

	Κόστη μεταφ.			
	Π1	Π2	Π3	Απόθεμα
Α1	10	5	15	50
Α2	7	20	9	30
Ζήτηση	20	20	40	

1. Παρουσιάστε ένα ΓΠ για το προσδιορισμό του πλάνου που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος μεταφοράς.
2. Διαμορφώστε το δυϊκό ΓΠ.
3. Ένα πλάνο μεταφοράς είναι το ακόλουθο: μεταφορά 20 μονάδων από την αποθήκη Α1 στον πελάτη Π1, 20 μονάδων από την αποθήκη Α1 στον πελάτη Π2, 10 μονάδων από την αποθήκη Α1 στον πελάτη Π3 και 30 μονάδων από την αποθήκη Α2 στον πελάτη Π3. Χρησιμοποιείστε στοιχεία από τη θεωρία δυϊκότητας για να δείξετε ότι η λύση αυτή είναι βέλτιστη.

Άσκηση Γ.28

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & \\ \text{υ.π.:} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 4 \\ & x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = 8 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

1. Παρουσιάστε το δυϊκό ΓΠ.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού γραφικά.
3. Χρησιμοποιείστε στοιχεία από τη θεωρία δυϊκότητας για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του δοθέντος ΓΠ από τη βέλτιστη λύση του δυϊκού.

Άσκηση Γ.29

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{Υπό:} & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ.
2. Με δεδομένο ότι η βέλτιστη λύση του ΓΠ είναι η $(x_1, x_2, x_3) = (5/3, 0, 3)$, βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού (χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο simplex).
3. Στο ΓΠ εισάγεται μια νέα μεταβλητή $x_4 \geq 0$, με συντελεστή $c_4 = 2$ στην αντικειμενική συνάρτηση και συντελεστές $a_{14} = 6, a_{24} = 2$ στους δύο περιορισμούς. Αξιοποιώντας τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα διερευνήστε την επίδραση που έχει η εισαγωγή αυτής της μεταβλητής στη βέλτιστη λύση του ερωτήματος (2) για το πρωτεύον ΓΠ.

Άσκηση Γ.30

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 - z \\ \text{Υπό:} & x_0 + 7x_1 + 4x_2 - z \geq 0 \\ & x_0 + 4x_1 + 9x_2 + z \leq 0 \\ & -y_1 \leq x_1 \leq y_1 \\ & -y_2 \leq x_2 \leq y_2 \\ & x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \ y_1, y_2, z \geq 0 \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ αφού πρώτα μετατρέψετε το πρωτεύον σε μορφή προβλήματος μεγιστοποίησης με περιορισμούς της μορφής $\leq$.
2. Εξετάστε εάν το δυϊκό είναι εφικτό και με βάση την απάντησή σας εξηγήστε τι συμπεραίνετε για το πρωτεύον (έχει βέλτιστη λύση, είναι αδύνατο, είναι μη φραγμένο).

Άσκηση Γ.31

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \\ \text{Υπό:} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = 4 \\ & x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & \geq 0 \\ & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_3 \geq 0} \\ & \multicolumn{8}{l}{x_2, x_4 \in \mathbb{R}} \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στο παραπάνω ΓΠ.

2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού (χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο simplex) και υπολογίστε τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δοθέντος ΓΠ.
3. Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα εάν το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού γίνει -4;

Άσκηση Γ.32

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ, όπου τα a_i και b_i ($i = 1, \ldots, 4$) είναι δεδομένοι συντελεστές:

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \text{Υ.π.} & -x_1 - a_1x_2 - b_1x_3 - y_1 \leq -1 \\ & -x_1 - a_2x_2 - b_2x_3 - y_2 \leq -1 \\ & x_1 + a_3x_2 + b_3x_3 - y_3 \leq -1 \\ & x_1 + a_4x_2 + b_4x_3 - y_4 \leq -1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R} \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \geq 0 \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στις μεταβλητές απόφασης και τους περιορισμούς του δοθέντος ΓΠ.
2. Χρησιμοποιείστε στοιχεία από τη θεωρία δυϊκότητας για να δείξετε ότι εάν $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ και $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$, τότε η λύση με $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ και $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ είναι βέλτιστη.

Άσκηση Γ.33

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - x_6 - x_7 - x_8 \\ \text{Υ.π.} & -x_1 + x_3 + x_6 \geq 0 \\ & x_1 - x_2 + x_4 + u_7 \geq 0 \\ & x_2 + x_5 + x_8 \geq 0 \\ & -x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \leq 0 \\ & x_3,\ x_4,\ x_5\ \geq 0 \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στο παραπάνω ΓΠ.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού ΓΠ, δεδομένου ότι η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος είναι $x_1 = x_2 = x_6 = -0{,}5$ και $x_5 = 0{,}5$.

Άσκηση Γ.34

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrrrrl} \min & 2x_1 & + x_2 & + x_3 & + 3x_4 & \\ \text{Υπό:} & x_1 & + x_2 & & + 2x_4 & = -2 \\ & -2x_1 & & - x_3 & - x_4 & \leq 4 \\ & x_1 & - x_2 & + x_3 & & \geq 6 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \geq 0} \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ (χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στους περιορισμούς ή τις μεταβλητές απόφασης του δοθέντος ΓΠ).
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού (χωρίς να εφαρμόσετε τη simplex), δεδομένου ότι η βέλτιστη λύση του δοθέντος ΓΠ είναι $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (0,\ -18,\ -12,\ 8)$.
3. Παραμένει η λύση του ερωτήματος (2) βέλτιστη στο πρωτεύον εάν διαγραφεί ο 3ος περιορισμός από το παραπάνω ΓΠ; Είναι η λύση του ερωτήματος (2) μια βασική εφικτή λύση στην περίπτωση αυτή;

Άσκηση Γ.35

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrrl} \max & 3x_1 & - 4x_2 & \\ \text{Υπό:} & -x_1 & + 2x_2 & \geq\ 2 \\ & x_1 & & \leq -1 \\ & & x_2 & \leq\ 1 \\ & -2x_1 & + \ x_2 & \geq\ 3 \\ & \multicolumn{3}{l}{x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0} \end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στο παραπάνω ΓΠ.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση με τη γραφική μέθοδο. Ποια είναι η αντίστοιχη βέλτιστη λύση του δυϊκού;
3. Πώς αλλάζουν οι βέλτιστες λύσεις του δοθέντος ΓΠ και του δυϊκού του στην περίπτωση όπου η αντικειμενική συνάρτηση διατυπωθεί σε μορφή ελαχιστοποίησης;

Άσκηση Γ.36

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ, όπου $\lambda \leqslant 0$ είναι μη θετική σταθερά:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & -2x_1 - (1-\lambda)x_2 - x_3 - 4x_4 & & \\
\text{Υπό:} & x_1 + x_2 + 2x_4 & = & -2 \\
 & 2x_1 + x_3 + x_4 & \geqslant & -4 \\
 & x_1, x_2 \leqslant 0, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \geqslant 0 & &
\end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ (χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στο ΓΠ).
2. Χρησιμοποιείστε στοιχεία από τη θεωρία δυϊκότητας για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του παραπάνω ΓΠ για όλες τις τιμές της παραμέτρου λ.

Άσκηση Γ.37

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 12x_4 & & \\
\text{Υπό:} & -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 & \leq & 0 \\
 & \frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 & \leq & 0 \\
 & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ. Πώς αλλάζει το δυϊκό εάν η αντικειμενική συνάρτηση του παραπάνω ΓΠ εκφραστεί σε μορφή ελαχιστοποίησης (δηλαδή $\min\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 12x_4$);
2. Χρησιμοποιείστε τις σχέσεις πρωτεύοντος-δυϊκού για να δείξετε ότι εάν το πρωτεύον είναι σε μορφή μεγιστοποίησης τότε είναι μη φραγμένο, ενώ εάν είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Άσκηση Γ.38

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 & & \\
\text{Υπό:} & \frac{1}{2}x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 2 \\
 & x_1,\ x_3, x_4 \leq 0,\ x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

1. Γράψτε το δυϊκό ΓΠ και βρείτε τη βέλτιστη λύση του αξιοποιώντας την απλή μορφή που έχει.
2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος (τιμές μεταβλητών και αντικειμενικής συνάρτησης) από τη λύση του δυϊκού.
3. Πώς αλλάζουν οι βέλτιστες λύσεις πρωτεύοντος (Π) και δυϊκού (Δ) εάν ο περιορισμός του πρωτεύντος γίνει $x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq -2$; Εξηγήστε εν συντομία την απάντησή σας.

   α) Π: αδύνατο και Δ: αδύνατο
   β) Π: αδύνατο και Δ: μη φραγμένο
   γ) Π: αδύνατο και Δ: μη φραγμένο ή αδύνατο
   δ) Π: μη φραγμένο και Δ: αδύνατο
   ε) Π: μη φραγμένο και Δ: μη φραγμένο
   στ) Οι λύσεις δεν αλλάζουν

Άσκηση Γ.39

Δίνεται το ακόλουθο ΓΠ:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{Υπό:} & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & \geq & 0 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 & \leq & 3 \\
 & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\
 & x_1,\ x_4 \in \mathbb{R}, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

α) Γράψτε το δυϊκό ΓΠ.
b) Υπολογίστε τις μεταβλητές απόκλισης για τις παρακάτω εφικτές λύσεις. Ποιες από τις λύσεις αυτές είναι ΒΕΛ; Εξηγήστε την απάντησή σας.

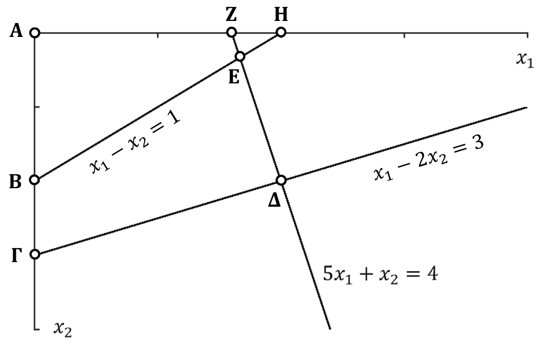
   Λύση Α: $x_3 = x_4 = 1/3, x_1 = x_2 = 0$
   Λύση Β: $x_1 = 1,25, x_2 = 2,5, x_4 = 4,75, x_3 = 0$
   Λύση Γ: $x_1 = 2,5, x_4 = 3,5, x_2 = x_3 = 0$
   Λύση Δ: $x_1 = -1/6, x_2 = 5/3, x_3 = 1/9, x_4 = 41/18$

γ) Δεδομένου ότι υπάρχει εφικτή λύση στο δυϊκό, στην οποία η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι ίση με 5, ποια(ες) λύση(εις) είναι βέλτιστη(ες); Πόσες βέλτιστες λύσεις έχει το ΓΠ;
δ) Ποιες είναι οι τιμές των δυϊκών μεταβλητών στη βέλτιστη λύση του δυϊκού;

Άσκηση Γ.40

Δίνεται το παρακάτω ΓΠ και η γραφική του αναπαράσταση:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{Υπό:} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & 5x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$



Α (0, 0)
Β (0, −1)
Γ (0, −1,5)
Δ (1, −1)
Ε (5/6, −1/6)
Ζ (0,8, 0)
Η (1, 0)

α) Ποιο είναι το σύνολο των εφικτών λύσεων; Ποια από τα σημεία (Α, Β, ..., Η) είναι βασικές λύσεις και ποια βασικές εφικτές λύσεις; Ποια είναι η βέλτιστη λύση; Εξηγήστε σύντομα τις απαντήσεις σας.
β) Υπολογίστε τις μεταβλητές απόκλισης των περιορισμών 1 και 3 στη βέλτιστη λύση.
γ) Γράψτε το δυϊκό ΓΠ.
δ) Με βάση την τιμή της μεταβλητής απόκλισης του 3ου περιορισμού (ερώτημα β), τι συμπεραίνετε για την αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή; (1) $u_3 = 0$, (2) $u_3 \neq 0$, (3) δεν προκύπτει κάποιο συμπέρασμα. Ομοίως, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τη δυϊκή μεταβλητή του 1ου περιορισμού; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Άσκηση Γ.41

Δίνεται το παρακάτω ΓΠ:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{Υπό:} \quad & -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -3 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 0{,}5 \\ & 2x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

α) Παρουσιάστε ένα ΓΠ ώστε να εξεταστεί εάν το παραπάνω ΓΠ είναι εφικτό. Εξηγήστε εν συντομία πως από τη λύση του ΓΠ που θα προτείνετε θα εξάγετε συμπέρασμα για το εάν το ΓΠ της εκφώνησης είναι εφικτό ή όχι.
β) Γράψτε το δυϊκό για το ΓΠ που δίνεται, χωρίς να κάνετε καμία αλλαγή στη διατύπωση του πρωτεύοντος.
γ) Η βέλτιστη λύση του παραπάνω ΓΠ είναι $x_1 = 2$, $x_2 = 0,75$, $x_3 = 0$. Υπολογίστε τις μεταβλητές απόκλισης των περιορισμών 2 και 3 και βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού μέσω της συμπληρωματικής χαλαρότητας.
δ) Εάν το δεξιό μέρος του 2ου περιορισμού του παραπάνω ΓΠ γίνει 2, τότε το παραπάνω ΓΠ είναι αδύνατο. Με αυτό το δεδομένο, εξηγήστε γιατί η αλλαγή αυτή καθιστά μη φραγμένο το δυϊκό του συγκεκριμένου ΓΠ.