Μάθημα: Γραμμικός Προγραμματισμός

Διδάσκων: Δούμπος Μιχαήλ



2η Εργασία

Αυγέρης Σωτήριος: 2013010138

Ρασούλης Αλέξανδρος: 2015010123

Χανιά 2020

Περιεχόμενα

[**Ερώτημα 1: Περιγραφή του Γ.Π.** 1](#_Toc39020384)

[**Περιορισμοί** 1](#_Toc39020385)

[**Ερώτημα 2 : Παρουσίαση του Γ.Π.** 1](#_Toc39020386)

[**Ερώτημα 3: Διατύπωση Δυικού ΓΠ** 2](#_Toc39020387)

[**Πρωτεύον** 2](#_Toc39020388)

[**Δυικό** 2](#_Toc39020389)

[**Ερώτημα 4: Λύση ΓΠ** 4](#_Toc39020390)

[α) 4](#_Toc39020391)

[β) 4](#_Toc39020392)

[γ) 4](#_Toc39020393)

[δ) 4](#_Toc39020394)

[**Ερώτημα 5** 5](#_Toc39020395)

[**Ερώτημα 6: Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας** 5](#_Toc39020396)

[**Εφαρμογή κανόνων** 6](#_Toc39020397)

[**Λύση** 7](#_Toc39020398)

[**Ερώτημα 7: Μεταβολή ελάχιστου κόστους** 7](#_Toc39020399)

[α) 7](#_Toc39020400)

[β) 7](#_Toc39020401)

# **Ερώτημα 1: Περιγραφή του Γ.Π.**

Η αντικειμενική συνάρτηση έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος του συνολικού κόστους παραγωγής – αποθεματοποίησης των προϊόντων για δοσμένες χρονικές περιόδους και για συγκεκριμένο αριθμό προϊόντων αλλά και της μισθοδοσίας (κανονική και υπερωριακή), για αυτές τις χρονικές περιόδους.

## **Περιορισμοί**

1. Ο πρώτος περιορισμός αναφέρει ότι σε μια χρονική περίοδο t η ζήτηση ενός προϊόντος πρέπει να ισούται με το άθροισμα των μονάδων παραγωγής του και με την διαφορά του αποθέματος αυτού του προϊόντος την συγκεκριμένη περίοδο σε σχέση με την προηγούμενη.
2. Ο περιορισμός υποδεικνύει ότι το σύνολο των απαιτούμενων εργατοωρών για την παραγωγή του συνόλου των προϊόντων πρέπει να ισούται με το άθροισμα της κανονικής αλλά και υπερωριακής εργασίας που χρησιμοποιούνται στην περίοδο t.
3. Οι ώρες κανονικής εργασίας δεν επιτρέπεται να ξεπερνούν τις διαθέσιμες ώρες μιας συγκεκριμένης περιόδου.
4. Η υπερωριακή εργασία που χρησιμοποιήθηκε την περίοδο t δεν πρέπει να υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο ποσοστό p επί των ωρών κανονικής εργασίας της περιόδου.
5. Για κάθε προϊόν και για κάθε περίοδο λειτουργίας οι μονάδες που παράχθηκαν, τα αποθέματα του προϊόντος, οι ώρες κανονικής και υπερωριακής εργασίας πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδέν.

# **Ερώτημα 2 : Παρουσίαση του Γ.Π.**

0.5h/kg

Min

Υπό:

# **Ερώτημα 3: Διατύπωση Δυικού ΓΠ**

## **Πρωτεύον**

Το πρωτεύον θα είναι το ΓΠ του ερωτήματος 2.

Min

Υπό:

## **Δυικό**

Διαμόρφωση δυικού:

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυικού για σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί μια δυική μεταβλητή. Συνεπώς στη συγκεκριμένη περίπτωση μετατροπής του πρωτεύοντος ΓΠ σε δυικό ΓΠ, θα ισχύουν τα παρακάτω:  
Υπάρχουν 18 μεταβλητές και 15 περιορισμοί στο πρωτεύον ΓΠ άρα το δυικό θα έχει 15 μεταβλητές και 18 περιορισμούς.

Αρχικά η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, άρα στο δυικό θα είναι σε μορφή μεγιστοποίησης. Για την κατασκευή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυικού χρησιμοποιήθηκαν τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος πολλαπλασιαζόμενα επί των αντίστοιχων μεταβλητών του δυικού. Να σημειωθεί ότι οι μεταβλητές του δυικού που αντιστοιχούν στους περιορισμούς των οποίων το δεξί μέλος είναι μηδέν δεν είναι απαραίτητο να αναφερθούν.

*max*

Για την κατασκευή των περιορισμών του δυικού θα ισχύουν οι εξής κανόνες:

* Για τις θετικές μεταβλητές του πρωτεύοντος οι περιορισμοί του δυικού θα είναι του τύπου «».
* Για τις μεταβλητές του πρωτεύοντος οι περιορισμοί του δυικού θα είναι του τύπου «».
* Για τις μεταβλητές που ανήκουν στο οι περιορισμοί τους θα είναι του τύπου «».

Υπό:



Για την διαμόρφωση των μεταβλητών του δυικού από το πρωτεύον ισχύουν οι εξής κανόνες:

* Για τους περιορισμούς του πρωτεύοντος **«»** οι μεταβλητές του δυικού θα είναι θετικές ή μηδέν.
* Για τους περιορισμούς του πρωτεύοντος **«»** οι μεταβλητές του δυικού θα είναι αρνητικές ή μηδέν.
* Για τους περιορισμούς του πρωτεύοντος **«»** οι μεταβλητές του δυικού θα ανήκουν στο .

Οι περιορισμοί του πρωτεύοντος από 1 έως 9 είναι του τύπου άρα οι μεταβλητές έως ανήκουν στο

Οι περιορισμοί του πρωτεύοντος από 10 έως 15 είναι τύπου άρα οι μεταβλητές έως θα είναι 0

Τελική μορφή δυικού ΓΠ:

max

Υπό:



,,,,,,,,∈

,,, , , 0

# **Ερώτημα 4: Λύση ΓΠ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Μήνες | Προϊόν Α’ | Προϊόν Β’ |
| 1ος | 300 | 3000 |
| 2ος | 850 | 5000 |
| 3ος | 500 | 4000 |

α) Το βέλτιστο πλάνο παραγωγής για τους επόμενους 3 μήνες είναι:

β) Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 45.950.

γ) 1ος μήνας 1800 , 2ος μήνας 3350, 3ος μήνας 2500.

δ) Βασικές μεταβλητές είναι οι εξής: , , , , , .

Όλες οι μεταβλητές απόφασης που δεν είναι βασικές, είναι εξ’ ορισμού ίσες με μηδέν. Κάθε μεταβλητή απόφασης που σε μια λύση ενός ΓΠ δεν είναι ίση με μηδέν πρέπει να είναι βασική εάν υποτεθεί ότι η λύση είναι βασική που στην περίπτωση μας με βάση το λογισμικό έχουμε ΒΕΛ.

# **Ερώτημα 5**

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του λογισμικού η βέλτιστη λύση δεν είναι εκφυλισμένη γιατί η λύση μας δεν εμπεριέχει βασικές μεταβλητές που να είναι μηδέν.

Στο διάνυσμα b η μεταβλητή =0 γεγονός που σημαίνει ότι είναι μη βασική. Από την αναφορά ευαισθησίας της λύσης του ΓΠ βλέπουμε πως το ΟΚΕ της μεταβλητής είναι μηδέν. Από τα παραπάνω δεδομένα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις αφού στη λύση μας υπάρχει μη βασική μεταβλητή με μηδενικό ΟΚΕ.

Για την εύρεση μιας εναλλακτικής βέλτιστης ΒΕΛ θα επιδιώξουμε να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα των μεταβλητών απόφασης που έχουν μηδενική τιμή, προσθέτοντας ταυτόχρονα έναν ακόμα περιορισμό που θα φροντίζει για την διατήρηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης με βάση την προηγούμενη λύση. Η λύση αυτής της εξίσωσης:

, , , , ,

# **Ερώτημα 6: Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας**

Για να βρεθούν οι εφικτές λύσεις του δυικού από την λύση του πρωτεύοντος θα πρέπει να ισχύουν οι εξής κανόνες:   
α) i=1…..15  
β) i=1…..18

**Επομένως:**



## **Εφαρμογή κανόνων**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | |  |
| 1 | 0 | 300 | 0 |  | |
| 2 | 0 | 0 |  |  | |
| 3 | 0 | 850 | 0 |  | |
| 4 | 0 | 250 | 0 |  | |
| 5 | 0 | 500 | 0 |  | |
| 6 | 0 | 0 |  |  | |
| 7 | 0 | 3000 | 0 |  | |
| 8 | 0 | 0 |  |  | |
| 9 | 0 | 5000 | 0 |  | |
| 10 | 1700 | 0 |  | 0 | |
| 11 | 150 | 4000 | 0 | 0 | |
| 12 | 0 | 0 |  |  | |
| 13 | 540 | 1800 | 0 | 0 | |
| 14 | 1005 | 0 |  | 0 | |
| 15 | 750 | 3350 | 0 | 0 | |
| 16 |  | 0 |  |  | |
| 17 |  | 2500 | 0 |  | |
| 18 |  | 0 |  |  | |



## **Λύση**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | =6 |
| =0,2 | =6 |
| 0 | =6,2 |
| 0 | =3 |
| 0 | =3 |
| =6,4 | =3,1 |
| 0 | =-5 |
| =0,1 | =-5 |
| 0 | =-5,2 |
| =-3 |  |
| 0 |  |
| =3,2 | =-0,2 |
| 0 |  |
| =5 |  |
| 0 |  |
| =5 |  |
| 0 |  |
| =4,8 |  |

Στον διπλανό πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της λύσης μας με την χρήση του θεωρήματος συμπληρωματικής χαλαρότητας.

**max**

Παίρνουμε την αντικειμενική συνάρτηση και αντικαθιστούμε με τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα. Το αποτέλεσμα της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 45.950 όσο και βέλτιστη λύση που υπολογίστηκε από το λογισμικό.

Επομένως η λύση του δυικού είναι και μοναδική διότι η λύση που δίνεται για το πρωτεύον δεν είναι εκφυλισμένη, άρα τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών στο δυικό θα είναι αυστηρά αρνητικά.

# **Ερώτημα 7: Μεταβολή ελάχιστου κόστους**

max

α) Αφού μειώθηκαν οι διαθέσιμες ώρες κανονικής εργασίας για τον πρώτο μήνα ο δέκατος περιορισμός του πρωτεύοντος θα ελαττωθεί κατά 100 άρα θα αλλάξει ο συντελεστής στην αντικειμενική συνάρτηση για την μεταβλητή . Παρατηρούμε πως δεν μεταβάλλεται το αποτέλεσμα μας: 300\*6 + 600\*6 + 750\*6,2 + 3000\*3 + 5000\*3 + 4000\*3,1 + 3400\*0 + 3500\*0 + 2500\*-0,2= 45.950

β) Η αύξηση της ζήτησης του 2ου προϊόντος για τον δεύτερο μήνα, σημαίνει ότι ο 5ος περιορισμός του πρωτεύοντος θα αυξηθεί κατά εκατό μονάδες, συνεπώς θα υπάρξει και η αντίστοιχη μεταβολή στον συντελεστή της μεταβλητής της αντικειμενικής συνάρτησης: 300\*6 + 600\*6 + 750\*6,2 + 3000\*3 + 5100\*3 + 4000\*3,1 + 3400\*0 + 3500\*0 + 2500\*-0,2= 46.250