

Θέμα 1

(α)[9] Απαντήστε αναλυτικά στα παρακάτω ερωτήματα:

- (1) Τι είναι και τη μορφή έχουν οι *αριθμοί κινητής υποδιαστολής*; Ποιές είναι οι χαρακτηριστικές *παράμετροι* ενός συνόλου αριθμών κινητής υποδιαστολής σε έναν υπολογιστή; Ποιός είναι ο μικρότερος και ποιός ο μεγαλύτερος αριθμός ενός τέτοιου συνόλου;
- (2) Ποιά ποσότητα ονομάζουμε *μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης*; Ποιός είναι ο μεγαλύτερος αριθμός x στο σύνολο των αριθμών ενός υπολογιστή τέτοιος ώστε $x + 1 = 1$;
- (3) Πότε ένας αριθμητικός αλγόριθμος λέγεται *ευσταθής* και πότε ένα υπολογιστικό πρόβλημα λέγεται ότι είναι *καλής κατάστασης*;

(β)[3] Εκφράστε τον αριθμό $(19/6)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Θέμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - e^{-x}$, απαντήστε στα παρακάτω:

- (α)[6] Έχει η $f(x)$ μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$ και αν ναι, πόσα βήματα της μεθόδου της *διχοτόμησης* θα χρειαζόμασταν για να την προσεγγίσουμε με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων;
- (β)[6] Η μέθοδος *σταθερού σημείου* $x_{n+1} = 0.5e^{-x_n}$, $n = 0, 1, \dots$ συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)$ για κάθε $x_0 \in [0, 1]$;
- (γ)[9] Εφαρμόστε για την $f(x)$ μία επαναληπτική μέθοδο *τετραγωνικής τάξης* σύγκλισης με αρχική τιμή $x_0 = 0$ για να προσεγγίσετε τη ρίζα με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Θέμα 3

(α)[8] Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την $f(x) = \cos(x/2)$ με το πολυώνυμο $p(x)$ που την παρεμβάλλει στα σημεία $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Χωρίς να υπολογίσετε το $p(x)$, υπολογίστε ένα *άνω φράγμα του σφάλματος* της προσέγγισης όταν το $x = 0$ και όταν το $x = \pi/2$.

(β)[10] Υπολογίστε τη *φυσική* κυβική *spline* που παρεμβάλλει στα σημεία $(x_i, y_i) : (-3, 1), (0, 3)$ και $(2, 1)$.

(γ)[14] Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν την ποσότητα, r , ενός ρύπου στο νερό (σε mg/l) ανά ημέρα

t	1	2	3	4	5	6	7	8
r	8.0	12.3	15.5	16.8	17.1	15.8	15.2	14.0

Προσαρμόστε το μοντέλο $r(t) = \alpha t e^{\beta t}$ στα παραπάνω δεδομένα, υπολογίζοντας τα α και β .

Θέμα 4

(α)[10] Κατασκευάστε έναν *αριθμητικό τύπο* για την προσέγγιση της $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τις τιμές της $f : f(x - 2h), f(x)$ και $f(x + 3h)$ υπολογίζοντας το *πολυνώνυμο παρεμβολής* στα σημεία $x - 2h, x, x + 3h$ με χρήση διαιρεμένων διαφορών. [Bonus [5]: Ποιά είναι η τάξη ακρίβειας του τύπου που υπολογίσατε;]

(β)[7+8] Για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(f) = \int_1^2 x \ln(x) dx (\approx 0.6362943)$ χρησιμοποιήστε (i) τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 με χρήση 5 κόμβων και (ii) τον τύπο ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 2-σημείων.

Θέμα 5

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) $y' - ty^2 - 1 = 0$, $y(1) = 0$ για την $y(t)$.

(α)[9] Προσεγγίστε τη λύση $y(t)$ για $t \in [1, 3]$ εφαρμόζοντας 3 βήματα της μεθόδου Euler. Ποιά είναι η προσέγγιση του $y(3)$ και ποιά η ολική τάξη ακρίβειας της μεθόδου;

(β)[6] Για ένα Π.Α.Τ προτείνετε ή και περιγράψτε τουλάχιστον 2 μεθόδους που θα έδιναν ακριβέστερο αποτέλεσμα από αυτό της μεθόδου Euler.

Ποιά είναι τα βασικά *κριτήρια* που είναι σημαντικά στην επιλογή μιας υπολογιστικής μεθόδου για Π.Α.Τ.;

Σύνολο μονάδων διαγωνίσματος 110 με άριστα το 100

Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά στους υπολογισμούς σας

Η ακρίβεια των διατυπώσεών σας, υπολογισμών και τελικών αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Βλέπε ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ 2 & 3

(β) Ο αριθμός $19/6 = 3 + 1/6$ ακέραιο και κλασματικό μέρος στο δεκαδικό. Συνεπώς $(19/6)_{10} = (11.0010101 \dots)_2$, όπου από το 5ο δεκαδικό και μετά έχουμε επαναλαμβανόμενα δεκαδικά.

Θέμα 2

(α) Έχουμε $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) \approx 1.63 > 0$ και επίσης $f'(x) = 2 + e^{-x} > 0 \forall x \in [0, 1]$. Συνεπώς η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο και είναι αύξουσα άρα έχουμε μοναδική ρίζα.

Για τα βήματα της διχοτόμησης έχουμε $\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-5} \Rightarrow n \geq 17$.

(β) Ελέγχουμε αν ισχύουν οι 2 προϋποθέσεις το Θ. Συστολής για την $\phi(x) = \frac{e^{-x}}{2}$, εφόσον αυτή προέρχεται από την $f(x)$.

(1)

$$\max_{x \in [0,1]} |\phi'(x)| = \max_{x \in [0,1]} |-0.5e^{-x}| \leq \frac{1}{2} < 1$$

(2) Εφόσον $\phi'(x) = -0.5e^{-x} < 0$ η ϕ φθίνουσα $\forall x \in [0, 1]$ και $\phi(0) = 0.5$ και $\phi(1) \approx 0.184$ συνεπώς $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$.

Άρα η μέθοδος συγκλίνει στο σταθερό της σημείο που είναι και η ρίζα της $f(x)$, $\forall x_0 \in [0, 1]$.

(γ) Μια τετραγωνικής τάξης μέθοδος είναι η γνωστή μας Newton-Raphson (για την οποία ισχύουν όλες οι καλές προϋποθέσεις του Θ. Συγκλισης). Συνεπώς έχουμε

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ όπου για } x_0 = 0 \text{ παίρνουμε}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{-1}{3} = 1/3 = 0.333333$$

$$x_2 = 0.351689 \text{ και } |x_1 - x_0| \approx 0.018356$$

$$x_3 = 0.351734 \text{ και } |x_3 - x_2| \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \text{ όπου βλέπουμε ότι έχουμε πετύχει τη ζητούμενη ακρίβεια.}$$

Θέμα 3

(α) Το απόλυτο σφάλμα της συγκεκριμένης πολ. παρεμβολής δίνεται ως

$$|f(x) - p(x)| = \frac{1}{3!} \max |(x-1)(x-2)(x-3)| \|f'''(x)\|_\infty$$

Εφόσον $f'''(x) = \frac{1}{8} \sin(x/2)$ τότε $\|f'''(x)\|_\infty \leq 1/8$, συνεπώς $|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \max |(x-1)(x-2)(x-3)|$.
Για $x = 0$

$$|f(0) - p(0)| \leq \frac{1}{48} \max |(0-1)(0-2)(0-3)| = \frac{1}{8} = 0.125$$

Για $x = \pi/2$

$$|f(\pi/2) - p(\pi/2)| \leq \frac{1}{48} \max |(\pi/2-1)(\pi/2-2)(\pi/2-3)| \approx 0.0073$$

(β) Έστω ότι η spline δίνεται ως $S(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, & x \in [-3, 0] \\ s_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, & x \in [0, 2] \end{cases}$, εφαρμόζοντας τις συνθήκες συνέχειας και τις συνοριακές συνθήκες για φυσική $S'''(-3) = 0 = S'''(2)$ έχουμε για

$$S'(x) = \begin{cases} s'_1(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1, & x \in [-3, 0] \\ s'_2(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2, & x \in [0, 2] \end{cases} \text{ και } S''(x) = \begin{cases} s''_1(x) = 6a_1x + 2b_1, & x \in [-3, 0] \\ s''_2(x) = 6a_2x + 2b_2, & x \in [0, 2] \end{cases}.$$

$$s_1''(-3) = -18a_1 + 2b_1 = 0 \text{ και } s_2''(2) = 12a_2 + 2b_2 = 0 \quad (1), \text{ όμως}$$

$$s_1(0) = d_1 = 3 \text{ και } s_2(0) = d_2 = 3 \text{ και}$$

$$s_1'(0) = c_1 = s_2'(0) = c_2 \text{ και } s_1''(0) = 2b_1 = s_2''(0) = 2b_2 \text{ άρα } c_1 = c_2 = c \text{ και } b_1 = b_2 = b, \text{ επίσης}$$

$$s_1(-3) = -27a_1 + 9b - 3c + 3 = 1 \text{ και } s_2(2) = 8a_2 + 4b + rc + 3 = 1 \quad (2). \text{ Άρα έχουμε}$$

$$\text{από σχέσεις (1) } a_1 = b/9 \text{ και } a_2 = -b/6 \text{ άρα αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2)}$$

$$6b - 3c + 3 = 1 \text{ και } 8b/3 + 2c + 3 = 1 \text{ έχουμε } b = -1/2 \text{ και } c = -1/3 \text{ άρα } a_1 = -1/18 \text{ και } a_2 = 1/12.$$

(γ) Με τη μέθοδο **ελαχίστων τετραγώνων** γραμμικοποιούμε

$$\ln\left(\frac{r}{t}\right) = \ln(\alpha) + \beta t \Rightarrow Y = A + Bt$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	t_i	$Y_i = \ln(r_i/t_i)$	t_i^2	$t_i Y_i$
1	1	2.0794	1	
2	2	1.8164	4	
3	3	1.6411	9	
4	4	1.4351	16	
5	5	1.2296	25	
6	6	0.6983	36	
7	7	0.7755	49	
8	8	0.5596	64	
$\Sigma =$	36	10.50	204	38.242

Λύνοντας τις κανονικές εξισώσεις έχουμε

$$\begin{bmatrix} 204 & 36 \\ 36 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.242 \\ 10.50 \end{bmatrix}$$

$$A \approx 2.28 \Rightarrow \alpha = e^{2.28} \approx 9.77 \text{ και } B = \beta \approx -0.215.$$

Θέμα 4

(α) Το πολυώνυμο παρεμβολής εδώ θα είναι το πολύ 2ου βαθμού ($p_2 \in \mathbb{P}_2$) και στη μορφή Newton $p_2(t) = a_0 + a_1(t - x + 2h) + a_2(t - x + 2h)(t - x)$, $t \in [x - 2h, x + 3h]$. Ο πίνακας διαφορών είναι:

x_i	$y_i = \Delta^{(0)}$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$
$x - 2h$	$f(x - 2h)$		
x	$f(x)$	$\frac{f(x) - f(x - 2h)}{2h}$	
$x + 3h$	$f(x + 3h)$	$\frac{f(x + 3h) - f(x)}{3h}$	$\frac{2f(x + 3h) - 5f(x) + 3f(x - 2h)}{30h^2}$

Άρα $a_0 = f(x - 2h)$, $a_1 = \frac{f(x) - f(x - 2h)}{2h}$ και $a_2 = \frac{2f(x + 3h) - 5f(x) + 3f(x - 2h)}{30h^2}$ και $p_2'(x) = a_1 + a_2(2t - 2x + 2h)$ · άρα για $t = x$ έχουμε

$$p_2'(t) = a_1 + a_2 2h = \frac{f(x) - f(x - 2h)}{2h} + \frac{2f(x + 3h) - 5f(x) + 3f(x - 2h)}{15h} = \frac{4f(x + 3h) + 5f(x) - 9f(x - 2h)}{30h}.$$

Bonus: Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + \frac{9}{2}h^2 f''(x) + \frac{9}{2}h^3 f'''(x) + O(h^4) \text{ βρίσκουμε ότι}$$

$$4f(x+3h) + 5f(x) - 9f(x-2h) = 30f'(x)h + 30h^3 f'''(x) + O(h^4) \text{ όπου διαιρώντας με } 30h \text{ έχουμε}$$

$$\frac{4f(x+3h) + 5f(x) - 9f(x-2h)}{30h} = f'(x) + h^2 f'''(x) + O(h^3) \text{ άρα η προσέγγισή μας είναι } O(h^2).$$

(β) (i) Οι κόμβοι είναι $x_i = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ άρα ο σύνθετος τύπος Simpson 1/3 δίνει με $h = 1.25$

$$I(f) \approx [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)] = \dots = 0.636309$$

(ii) Κάνουμε πρώτα αλλαγή μεταβλητής στο $[-1, 1]$ και εφαρμόζουμε τον τύπο με $x_i = \pm 1/\sqrt{3}$ και $w_i = 1$

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 w_i f\left(\frac{1}{2}x_i + \frac{3}{2}\right) = 0.6361495.$$

Θέμα 5

(α) Εφόσον θέλουμε 3 βήματα έχουμε $h = (3-1)/3 = 2/3$ και για $f(t, y) = ty^2 + 1$ έχουμε

$$y^1 = y^0 + hf(t^0, y^0) = 2/3$$

$$y^2 = y^1 + hf(t^1, y^1) = \dots = 148/81$$

$$y^3 = y^2 + hf(t^2, y^2) = \dots = 453914/59049 \approx 7.68707. \text{ Η μέθοδος έχει πρώτης τάξης ακρίβεια δηλ. } O(h).$$

(β) Ακριβέστερες μέθοδοι είναι, για παράδειγμα, η μέθοδος Τραπεζίου, η μέθοδος Heun και οι μέθοδοι Runge-Kutta με αριθμό σταδίων μεγαλύτερο ή ίσο του 2 π.χ. η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta 4 σταδίων.

Τα βασικά κριτήρια είναι: (1) η τάξη ακρίβειας της μεθόδου, (2) η ευστάθεια της μεθόδου (περιοχή απόλυτης ευστάθειας), ιδίως για άκαμπτα προβλήματα και (3) η υπολογιστική πολυπλοκότητα (υπολογιστικός χρόνος) δηλ. το πλήθος των πράξεων που απαιτούνται σε κάθε βήμα εφαρμογής μιας μεθόδου.