

Θέμα 1

- (α)[4] Ποιός είναι ο $(6.8125)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης και ποιός είναι ο $(10.0011)_2$ στο δεκαδικό;
 (β)[8] Αν το σύνολο αριθμών ενός υπολογιστή ορίζεται ως $M(\beta, t, L, U)$, απαντήστε τα παρακάτω:
 (1) Τι συμβολίζει κάθε μία από τις παραμέτρους του M ;
 (2) Δώστε τη γενική μορφή των αριθμών κινητής υποδιαστολής που $\in M$. Ποιά η μορφή κινητής υποδιαστολής του $(0.0040332)_4$.
 (3) Ποιός είναι, στο δεκαδικό, ο ελάχιστος θετικός και ποιός ο μέγιστος θετικός αριθμός μηχανής αν $M(2, 3, -2, 4)$;
 (4) Ποιό είναι το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης και ποιό το μηδέν της μηχανής αν $M(10, 5, -3, 3)$;

Θέμα 2

Έστω η $f(x) = x^3 + 2x - 1 = 0$.

- (α)[6] Αποδείξτε ότι έχει μια μόνο ρίζα, x^* , στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και υπολογίστε πόσα, τουλάχιστον, βήματα χρειάζεται η μέθοδος της διχοτόμησης για να τη προσεγγίσει με ακρίβεια 10^{-6} .
 (β)[8] Αποδείξτε αν η επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - x_n^3)$ συγκλίνει ή όχι στη x^* για $x_0 \in [0, 1/2]$.
 (γ)[10] Εφαρμόστε μία γνωστή σας επαναληπτική μέθοδο τετραγωνικής τάξης σύγκλισης με $x_0 = 1/2$ για να προσεγγίσετε τη x^* με ακρίβεια 10^{-6} .

Θέμα 3

(α)[6+6] Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής, $P(x)$, στα σημεία $x_1 = 1, x_2 = 2.25$ και $x_3 = 4$ και στη συνέχεια με βάση το θεώρημα σφάλματος της πολ. παρεμβολής δώστε μια εκτίμηση του σφάλματος στην προσέγγιση του $\sqrt{2}$ από το P .

(β)[8] Υπολογίστε την τετραγωνική spline $S(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \in [-1, 0] \\ dx^2 + ex + f, & x \in [0, 1] \end{cases}$, που παρεμβάλεται στα σημεία $(-1, 3), (0, 7)$ και $(1, -5)$ και για την οποία $S''(-1) = 0$.

(γ)[8] Για τα σημεία του ερωτήματος (β) υπολογίστε τη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που τα προσεγγίζει καλύτερα.

Θέμα 4

(α)[12] Το έργο, W , που παράγεται από μία θερμοδυναμική διεργασία μπορεί να υπολογιστεί ως $W = \int p dV$, όπου p είναι η πίεση και V ο όγκος. Χρησιμοποιώντας τον καλύτερο συνδυασμό των μεθόδων τραπεζίου, Simpson 1/3 και 3/8 υπολογίστε το έργο που παράγεται με βάση τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα:

Πίεση $p(kPa)$	336	294	266	261	260	249	193	165
Όγκος $V(m^3)$	0.5	2	3	4	6	8	10	11

(β)[10] Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με τον τύπο του Gauss 3 σημείων.

Θέμα 5

[20] Έστω το γενικό πρόβλημα αρχικών τιμών: $y' = f(t, y)$, $y(t^0) = y^0$:

- (i) Δείξτε πως παράγονται η άμεση και πώς η πεπλεγμένη μέθοδος Euler για το Π.Α.Τ. με χρήση αριθμητικών μεθόδων.
 (ii) Αν $f(t, y) = \alpha y, \alpha < 0, y(0) = 1$, αποδείξτε ποιά είναι τα όρια ευστάθειας των 2 μεθόδων.
 (iii) Αναφέρεται ένα πλεονέκτημα και ένα μειονέκτημα για την κάθε μέθοδο. Πότε και γιατί είναι προτιμότερη η χρήση της πεπλεγμένης Euler;
 (iv) Αν $f(t, y) = -\frac{1}{2y}$, $y(1) = 2$ το Π.Α.Τ έχει ακριβή λύση $y(t) = \sqrt{5 - t}$. Αν εφαρμόστε ένα βήμα της πεπλεγμένης μεθόδου Euler ποιά είναι η προσέγγιση που θα δώσει για το $y(2)$;

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΤΕ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 4 ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΣΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΣΑΣ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) $(6.8125)_{10} = (110.1101)_2$ και $(10.0011)_2 = (2.1875)_{10}$.

(β) (1) Θεωρεία βλ. Διαλέξεις 1 & 2

(2) Θεωρεία και $0.40332 \cdot 4^{-2}$.

(3) $\min = 0.100 \cdot 2^{-2} = (0.001)_2 = 1 \cdot 2^{-3} = 0.125$ και $\max = 0.111 \cdot 2^4 = (1110)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 + 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 14$

(4) $u = 0.5 \cdot \beta^{1-t} = 0.5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$ και $\epsilon ps = 5 \cdot 10^{-5}$ (βλ. Διαλ. 2, σελ. 20).

Θέμα 2

(α) Έχουμε $f(0) = -1$ και $f(1/2) = 1/8$ άρα ισχύει το Θ. Bolzano και εφόσον $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, x \in [0, 1/2]$ η f αύξουσα, έχουμε μοναδική ρίζα.

Για τη διχοτόμηση ισχύσει $|x_n - x^*| \leq \frac{1/2 - 0}{2^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow 2^{n+1} \leq 10^6 \Rightarrow n+1 > 6 \ln(10)/\ln(2) \approx 19.9316 \Rightarrow n > 20.9319$, άρα τουλάχιστον 21 βήματα.

(β) Με βάση το Θ. συστολής για $\phi(x) = \frac{1}{2}(1 - x^3)$ έχουμε $\phi'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ άρα η ϕ φθίνουσα στο $[0, 1/2]$, και $\phi(0) = 1/2$ και $\phi(1/2) = 7/16$ άρα $\phi : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1/2]$ (πρώτη προϋπόθεση)

$$|\phi'(x)| = \frac{3}{2}x^2 < \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} < 1 \quad \text{εφόσον } \phi' \text{ αύξουσα (2η προϋπόθεση)}$$

Άρα η μέθοδος συγκλίνει.

(γ) Η γνωστή μέθοδος τετραγωνικής τάξης σύγκλισης είναι η Newton-Raphson όπου για $x_0 = 0.5$ και $f'(x) = 3x^2 + 2$ δίνει

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{0.125}{2.75} = 0.454545 \quad \text{και } |x_1 - x_0| = 0.045455$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.454545 - \frac{0.003005}{2.619835} = 0.453398 \quad \text{και } |x_2 - x_1| = 0.001147$$

$$x_3 = 0.453398 - \frac{0.000002}{2.61771} = 0.453398 \quad \text{και } |x_3 - x_1| \approx 0.0$$

Θέμα 3

(α) Εφόσον δίνονται 3 σημεία (και με $f(1) = 1, f(2.25) = 1.5$ και $f(4) = 2$) το $P(x)$ θα είναι 2ου βαθμού και μπορεί να υπολογιστεί είτε με πολυώνυμο Lagrange είτε στη μορφή Νεύτωνα και είναι

$$P_2(x) = 1 + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{105}(x-1)(x-2.25)$$

Για την εκτίμηση του σφάλματος στο $x = 2$ έχουμε

$$|P_2(2) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{3!} |(2-1)(2-2.25)(2-4)| \max_{x \in [1,4]} |f'''(x)| = \frac{1}{12} \max_{x \in [1,4]} \frac{3}{8} x^{-5/2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{8} = 0.03125.$$

(β) Εφόσον $S(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \in [-1, 0] \\ dx^2 + ex + f, & x \in [0, 1] \end{cases}$, η $S'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \in [-1, 0] \\ 2dx + e & x \in [0, 1] \end{cases}$ και έχουμε

$$S''(-1) = 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$S(-1) = a - b + c = 3 \Rightarrow -b + c = 3$$

$$S(0) = 7 \Rightarrow c = f = 7 \text{ άρα } b = 4$$

$$S'(0) \Rightarrow b = e \Rightarrow e = 4 \text{ και}$$

$$S(1) = -5 \Rightarrow d + e + f = -5 \Rightarrow d = -5 - 4 - 7 = -16 \text{ και άρα η}$$

$$S(x) = \begin{cases} 4x + 7, & x \in [-1, 0] \\ -16x^2 + 4x + 7, & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

(γ) Ψαχνουμε την βέλτιστη ευθεία $y = ax + b$ όπου από τα δεδομένα έχουμε

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1	3	1	-3
2	0	7	0	0
3	1	-5	1	-5
$\sum =$	0	5	2	-8

$$\text{και έχουμε τις κανονικές εξισώσεις} \begin{cases} 3b + 0a = 5 \\ 0b + 2a = -8 \end{cases} \quad \text{άρα } y = -4x + 5/3.$$

Θέμα 4

(α) Το έργο υπολογίζεται ως

$$W = \int_{0.5}^{11} p dV = \int_{0.5}^2 p dV + \int_2^4 p dV + \int_4^{10} p dV + \int_{10}^{11} p dV \approx \\ \approx Q^T + Q_{1/3}^S + Q_S^{3/8} + Q^T = 472.500 + 539.6666 + 1485.7500 + 179 = 2676.91660$$

(β) $I \approx 4967.1066$ Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 16 σελ. 7-8 (ίδιο ερώτημα με το παράδειγμα).

Θέμα 5

(i) Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ.6 και σελ. 23 ή Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 18 σελ. 5. (με χρήση μεθόδων αριθμητικής παραγωγής ή ολοκλήρωσης).

(ii) Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 15-16 και σελ. 24.

(iii) Η άμεση μέθοδος είναι ποιο οικονομική από άποψη υπολογιστικού κόστους (πράξεων) αλλά έχει σοβαρό περιορισμό ευστάθεια (στην επιλογή του βήματος ολοκλήρωσης). Η πεπλεγμένη είναι Α-ευσταθής αλλά χρειάζεται (γενικά) η λύση μίας μη-γραμμικής εξίσωσης σε κάθε βήμα (μεγάλο υπολογιστικό κόστος). Και οι δύο είναι χαμηλής (πρώτης) τάξης ακρίβειας. Η πεπλεγμένη είναι προτιμότερη στην προσέγγιση λύσεων άκαμπτων διαφορικών εξισώσεων γιατί δεν έχει περιορισμό ευστάθειας.

(iii) Η μέθοδος δίνει για $h = 1$ (ένα βήμα) από $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}y^{n+1})$:

$$y^1 = y^0 - 1 \cdot \frac{1}{2y^1} \Rightarrow 2(y^1)^2 - 2y^1y^0 + 1 = 0 \Rightarrow 2(y^1)^2 - 4y^1 + 1 = 0 \Rightarrow y_{1,2}^1 = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

όπου επιλέγουμε σαν προσέγγιση της $y^1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1.7071$ (ποιο κοντά στην αρχική συνθήκη $y(1) = 2$) και η πραγματική τιμή είναι $y(2) = \sqrt{5-2} = 1.7320$.