

Θέμα 1

(α)[10] Για την συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$, αποδείξτε ότι έχει μία ρίζα πολλαπλότητας 2 και εφαρμόστε δύο βήματα μιας κατάλληλης επαναληπτικής μεθόδου *τετραγωνικής τάξης σύγκλισης* με αρχική τιμή $x_0 = 0.5$.

(β) [8] Έστω μια μέθοδος *σταθερού σημείου* $x_{n+1} = \phi(x_n)$ με $\phi(x) = x - \alpha + 2\alpha e^{-x}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ μία παράμετρος. Βρείτε το σταθερό σημείο x^* και προσδιορίστε για ποιές τιμές της παραμέτρου α η ακολουθεία των παραπάνω επαναλήψεων σταθερού σημείου μπορεί να συγκλίνει στο σταθερό σημείο και για ποιές αποκλίνει για $x_0 \in [0, x^*]$.

(γ) [14] Για το παρακάτω *μη-γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων* να γίνουν 2 βήματα της μεθόδου Newton-Raphson με αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0, 0]$, για την προσέγγιση της λύσης του,

$$\begin{aligned} x^3 + y &= 1, \\ y^3 - x &= -1. \end{aligned}$$

Θέμα 2

(α) Δίνονται τα δεδομένα που αποτελούν μετρήσεις μίας ποσότητας y στο χρόνο t :

t_i	1	2	3	4.5	5
y_i	1	1.6	2	2.4	2.5

(i)[9] Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής στα δεδομένα με χρήση *διαφερέμενων διαφορών*.

(ii)[13] Θέλουμε να προσαρμόσουμε το εξής μοντέλο $y = \frac{t}{at + b}$ στα παραπάνω δεδομένα. Υπολογίστε τις τιμές των a και b με τη μέθοδο *ελαχίστων τετραγώνων*.

(β)[8] Υπολογίστε τα a, b, c, d και e , ώστε η $S(x) = \begin{cases} s_1(x) = 1 + x - ax^2 + bx^3, & x \in [0, 1] \\ s_2(x) = c + d(x - 1) + e(x - 2)^2 + (x - 2)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$ να είναι *φυσική κυβική spline*.

Θέμα 3

(α)[8] Για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου μίας συνάρτησης f στο σημείο x_i χρησιμοποιούμε τον τύπο αριθμητικής διαφορίσης (παραγώγισης): $f''(x_i) = \alpha f(x_{i+1}) + \beta f(x_i) + \gamma f(x_{i-1})$ όπου $x_{i\pm 1} = x_i \pm h, h > 0$. Υπολογίστε τα α, β και γ και δείξτε ότι ο τύπος έχει ακρίβεια $O(h^2)$.

(β) [12] Ο παρακάτω πίνακας δίνει στο χρόνο, t (σε λεπτά της ώρας), την ταχύτητα, v (σε μέτρα/δευτερόλεπτο), που έχει ένα αυτοκίνητο

$t(\text{min})$	1	2	3.25	4.5	6	7	8	9	9.5	10
$v(\text{m/s})$	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

Υπολογίστε την απόσταση που έχει διανύσει το αυτοκίνητο χρησιμοποιώντας τον *καλύτερο συνδυασμό* των κανόνων ολοκλήρωσης: Τραπεζίου, Simpson 1/3 και Simpson 3/8.

(γ) [5+5] Δείξτε πως κατασκευάζεται ο τύπος ολοκλήρωσης *Gauss-Legendre* 2-σημείων και εφαρμόστε τον για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^4 te^{2t} dt$.

Θέμα 4

(α)[6] Δείξτε πώς κατασκευάζεται η μέθοδος *πρόβλεψης-διόρθωσης* (Heun) για την προσέγγιση λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών (Π.Α.Τ).

(β)[12] Για το Π.Α.Τ. $y' = 3t + y$, $y(1) = 2$ εφαρμόστε την μέθοδο Heun με βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$ για τη προσέγγιση του $y(2)$.

Σύνολο μονάδων διαγωνίσματος 110 με άριστα το 100

Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά στους υπολογισμούς σας

Η ακρίβεια των διατυπώσεών σας, υπολογισμών και των αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Διπλή ρίζα, x^* , δηλ. πολλαπλότητα $m = 2$ έχουμε όταν $f(x^*) = 0$ και $f'(x^*) = 0$. Έχουμε εδώ $f'(x) = e^x - 1$, από $f'(x) = 0 \Rightarrow x^* = 0$ (και $f(0) = 0$). Η κατάλληλη μέθοδος τετραγωνικής τάξης, είναι η τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson (όταν ξέρουμε την πολλαπλότητα m) που είναι

$$x_{n+1} = x_n - m \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1ο βήμα: $x_1 = x_0 - 2 \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - 2 \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} \approx 0.0415$

2ο βήμα: $x_2 = x_1 - 2 \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.0415 - 2 \frac{f(0.0415)}{f'(0.0415)} \approx 2.87 \cdot 10^{-4}$

(β) Για το σταθερό σημείο ισχύει $x^* = \phi(x^*) \Rightarrow x^* = x^* - \alpha + 2\alpha e^{-x^*} \Rightarrow 1 = 2e^{-x^*} \Rightarrow x^* = \ln 2 \approx 0.69$ και για να δούμε που συγκλίνει η ακολουθεία ελέγχουμε πού $|\phi'(x)| = |1 - 2\alpha e^{-x}| < 1 \Rightarrow 0 < \alpha e^{-x} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < e^{x^*} \Rightarrow 0 < \alpha < 2$. Συνεπώς, έχουμε πιθανή σύγκλιση για $\alpha \in (0, 2)$ και απόκλιση για $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Για $\alpha = 2$ ή 0 το κριτήριο της $|\phi'(x)|$ δεν μπορεί να δώσει σίγουρη απάντηση.

(γ) Έχουμε τις 2 εξισώσεις

$$f_1(x, y) = x^3 + y - 1 = 0;$$

$$f_2(x, y) = y^3 - x + 1 = 0.$$

Υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα και τον αντίστροφό του

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 1 \\ -1 & 3y^2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{J}^{-1}(x, y) = \frac{1}{9x^2y^2 + 1} \begin{bmatrix} 3y^2 & -1 \\ 1 & 3x^2 \end{bmatrix},$$

Με αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ έχουμε

$$\mathbf{J}_0^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{F}(0, 0) = \begin{bmatrix} f_1(0, 0) \\ f_2(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας (πρώτο βήμα της μεθόδου)

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{J}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για το δεύτερο

$$\mathbf{J}_1^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(1, 1) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{F}(1, 1) = \begin{bmatrix} f_1(1, 1) \\ f_2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

άρα

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{J}_1^{-1} \cdot \mathbf{F}(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

Θέμα 2

(α) (i) Το πολυώνυμο παρεμβολής εδώ θα είναι το πολύ 4ου βαθμού ($p_4 \in \mathbb{P}_4$) και στη μορφή Newton

$p_3(x) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1) + a_3(t - x_0)(t - t_1)(t - t_2) + a_4(t - x_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$. Ο πίνακας διαφορών είναι:

x_i	$y_i = \Delta^{(0)}$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$
1	1 ↘				
2	1.6 ↗	0.6 ↘			
3	2	0.4 ↗	-0.1 ↘		
4.5	2.4	0.2666	-0.05333 ↗	0.013333 ↘	
5	2.5	0.2	-0.03333	0.006666 ↗	-0.0016666

Άρα $a_0 = 1$, $a_1 = 0.6$, $a_2 = -0.1$, $a_3 = 0.01333$ και $a_4 = -0.001666$.

(ii) Αρχικά γραμμικοποιούμε το δοθέν μοντέλο ως: $\frac{1}{y} = a + b\frac{1}{t} \rightarrow \tilde{y} = a + b\tilde{t}$ και κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	$\tilde{t} = 1/t$	$\tilde{y} = 1/y$	$\tilde{t}^2$	$\tilde{t}\tilde{y}$
1	1	1	1	1
2	1/2	1/1.6	0.25	0.3125
3	1/3	1/2	0.1111	0.1666
4	1/4.5	1/2.4	0.0493	0.0926
5	1/5	1/2.5	0.04	0.0800
$\sum =$	2.2555	2.9416	1.4505	1.6517

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων δίνει

$$\begin{bmatrix} 1.4505 & 2.2555 \\ 2.2555 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6517 \\ 2.9416 \end{bmatrix}$$

με λύση $b \approx 0.7766$ και $a \approx 0.2329$.

(γ) Υπολογίζοντας τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους των s_1 και s_2 έχουμε:

$s_1''(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ και $s_1''(2) = 0 \Rightarrow e = 0$ (από συνοριακές συνθήκες φυσικής spline)

Η συνέχεια της $S(x)$ στο $x = 1$ δίνει $2 + b = c - 1$.

Η συνέχεια της $S'(x)$ στο $x = 1$ δίνει $1 + 3b = d + 3$.

Η συνέχεια της $S''(x)$ στο $x = 1$ δίνει $6b = -6$. Συνεπώς, $b = -1$, $c = 2$ και $d = -5$.

Θέμα 3

(α) Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 13, σελ. 3 και 5. Έχουμε $\alpha = 1/h^2$, $\beta = -2/h^2$ και $\gamma = 1/h^2$.

(α) Στην ουσία θέλουμε να προσεγγίσουμε το $\int_1^{10} u dt$ =(απόσταση) και εφαρμόζουμε τους 3 τύπους βλέποντας ποιοί από τους κόμβους που έχουμε μπορούν να ομαδοποιηθούν άρα, από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ με $h = 1$ Τραπεζίο, από $t = 2$ μέχρι $t = 4.5$ με $h = 1.25$ Simpson 1/3, από $t = 4.5$ μέχρι $t = 6$ με $h = 1.5$ Τραπεζίο, από $t = 6$ μέχρι $t = 9$ με $h = 1$ Simpson 3/8 και από $t = 9$ μέχρι $t = 10$ με $h = 0.5$ Simpson 1/3. Δηλ.

$$\int_1^{10} u dt = \int_1^2 u dt + \int_2^{4.5} u dt + \int_{4.5}^6 u dt + \int_6^9 u dt + \int_9^{10} u dt$$

Προσοχή: πριν εφαρμόσουμε τους τύπους πρέπει η μονάδα μέτρησης του χρόνου να είναι ίδια γιατί ο χρόνος δίνεται σε λεπτά της ώρας και η ταχύτητα σε μέτρα/δευτερόλεπτο. Συνεπώς, πρέπει να μετατρέψουμε είτε την ταχύτητα είτε το χρόνο πολλαπλασιάζοντας με το 60. Άρα,

$$\int_1^2 u dt \approx \frac{1 \cdot 60}{2} [5 + 6] = 330m$$

$$\int_2^{4.5} u dt \approx \frac{1.25 \cdot 60}{3} [6 + 4 \cdot 5.5 + 7] = 875m$$

$$\int_{4.5}^6 u dt \approx \frac{1.5 \cdot 60}{2} [7 + 8.5] = 697.50m$$

$$\int_6^9 u dt \approx \frac{3 \cdot 1 \cdot 60}{8} [8.5 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 7] = 1293.750m$$

$$\int_9^{10} u dt \approx \frac{0.5 \cdot 60}{3} [7 + 4 \cdot 7 + 5] = 400m$$

Άρα συνολικά $\int_1^{10} u dt \approx 3596.26m = 3.5962km$.

(β) Βλέπε ΔΙΑΛΕΞΗ 16 σελ. 5 και σελ. 7. (ίδιο παράδειγμα).

Θέμα 4

(α) Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 18, σελ. 5-6

(β) Με $f(t, y) = 3t + y$ έχουμε:

Βήμα 1:

$$t^1 = t^0 + h = 1 + 1/2 = 3/2$$

$$\tilde{y}^1 = y^0 + hf(t^0, y^0) = 2 + hf(1, 2) = 2 + \frac{1}{2}5 = 4.5 \text{ (προβλεψη)}$$

$$y^1 = y^0 + \frac{h}{2}(f(t^0, y^0) + f(t^1, \tilde{y}^1)) = 2 + \frac{h}{2}(f(1, 2) + f(3/2, 4.5)) = 2 + \frac{1}{4}(5 + 9) = 5.5$$

Βήμα 2:

$$t^2 = t^1 + h = 3/2 + 1/2 = 2$$

$$\tilde{y}^2 = y^1 + hf(t^1, y^1) = 5.5 + hf(3/2, 5.5) = 5.5 + \frac{3}{2}10 = 10.5 \text{ (προβλεψη)}$$

$$y^2 = y^1 + \frac{h}{2}(f(t^1, y^1) + f(t^2, \tilde{y}^2)) = 5.5 + \frac{h}{2}(f(3/2, 5.5) + f(2, 10.5)) = 5.5 + \frac{1}{4}(10 + 16.5) = 12.125 \approx y(2).$$