

Θέμα 1

(α)[8] Έστω υποθετικός υπολογιστής εφοδιασμένος με το σύνολο αριθμών μηχανής $M(\beta, t, L, U) \equiv M(2, 4, -3, 3)$. Στο διάστημα $(0, 0.1]$ των πραγματικών δεκαδικών αριθμών, πόσοι αριθμοί του συνόλου M υπάρχουν μέσα σε αυτό (δηλ. ποιοί πραγματικοί παριστάνονται ακριβώς από το M στο $(0, 0.1]$);

(β)[10] Σε έναν υπολογιστή με σύνολο αριθμών μηχανής *κινητής υποδιαστολής* $M(10, 3, -10, 10)$ όπου εφαρμόζεται στρογγύλευση και αποκοπή, υπολογίστε το άθροισμα $S_5 = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k^3}$, με (i) προσθέτοντας τους όρους του αθροίσματος σε αύξουσα σειρά και (ii) προσθέτοντάς τους σε φθίνουσα σειρά. Ποιός τρόπος δίνει το μικρότερο σχετικό σφάλμα σε σχέση με την πραγματική τιμή του αθροίσματος και γιατί;

Θέμα 2

Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := x - e \ln x - 1$.

(α)[6] Δείξτε ότι η $f(x) = 0$ έχει 2 πραγματικές θετικές ρίζες, προσδιορίζοντας ακριβώς τη μία και δείχνοντας ότι η άλλη είναι στο διάστημα $(5, 6)$, κάνοντας και, πρόχειρα, τη γραφική της παράσταση.

(β)[8] Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $x = \phi(x) = e \ln x + 1$. Δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in [5, 6]$, η ακολουθία $x_n, n \geq 0$ που παράγει η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = \phi(x_n)$ συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)$ στο διάστημα $(5, 6)$.

(γ)[9] Με $x_0 = 4$, υπολογίστε τον όρο x_2 της ακολουθίας που δίνει η μέθοδος Newton-Raphson για την $f(x)$. Δείξτε ότι η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)$ στο διάστημα $(5, 6)$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας με βάση τη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου και τις ιδιότητες της f).

Θέμα 3

(α)[12] Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη μηνιαία δαπάνη $f(x)$ (σε ευρώ) για καύσιμα σε σχέση με το ετήσιο οικογενειακό εισόδημα x (σε χιλιάδες ευρώ). Να προσδιοριστεί η δαπάνη $f(50)$ με τη βοήθεια του πολυωνύμου παρεμβολής (i) Lagrange και (ii) Newton με χρήση διαιρεμένων διαφορών. Ποιά από τις 2 προσεγγίσεις δίνει καλύτερα αποτελέσματα και γιατί;

x	20	40	60
$f(x)$	55	155	320

(β)[12] Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν το δείκτη ατμοσφαιρικής ρύπανης, x , (σε κλίμακα από 1-10) και τις αντίστοιχες εισαγωγές σε νοσοκομεία, y , κατά τη διάρκεια ημερών με καύσωνα

x	2	4	5.5	7.7
y	11	21	36	65

Να βρεθεί (προσεγγιστικά) ο αριθμός των εισαγωγών σε ημέρα που ο δείκτης ρύπανσης είναι 6.5 με χρήση του μοντέλου $y(x) = Ax^B$.

Θέμα 4

(α)[6] Υπολογίστε τα βάρη του κανόνα αριθμητικής παραγώγισης $f'(a) = w_1 f(-a) + w_2 f(0) + w_3 f(a)$.

(β)[5+4+5] Για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(f) = \int_1^4 \frac{3}{x^4} dx$ εφαρμόστε: (i) το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 για 4 υποδιαστήματα, (ii) τον απλό τύπο Simpson 3/8 και (iii) τον τύπο Gauss-Legendre 2-σημείων. Ποιο αποτέλεσμα θα εμπιστευόσασταν περισσότερο σε σχέση με την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος;

Θέμα 5

(α)[8] Υπολογίστε τις περιοχές απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου Euler καθώς και της πεπλεγμένης μεθόδου Euler για προβλήματα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.).

(β)[6+3] Έστω το Π.Α.Τ. $y' - \frac{y}{t} = 2t$, $y(1) = 2$, για την $y(t)$. Προσεγγίστε τη λύση $y(t)$ για $t \in [1, 2]$ εφαρμόζοντας 2 βήματα της μεθόδου Euler για τον υπολογισμό του $y(2)$. Αν η γενική λύση της διαφορικής είναι $y(t) = \frac{2t+C}{t}$, $C \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το απόλυτο σφάλμα που κάνουμε προσεγγίζοντας τη $y(2)$ με τη μέθοδο Euler.

Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά στους υπολογισμούς σας (όπου δεν απαιτούνται παραπάνω). Η ακρίβεια των διατυπώσεών σας, υπολογισμών και τελικών αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Θέλουμε όλους τους αριθμούς του συνόλου M της μορφής $(x)_2 = 0.1d_2d_3d_4 \cdot 2^e$, $-3 \leq e \leq 3$ που δίνουν $0 < x \leq (0.1)_{10}$. Όμως, για $-2 \leq e \leq 3$ όλοι οι αριθμοί είναι $\geq (0.1000 \cdot 2^{-2})_2 = (2^{-3})_{10} = (0.125)_{10}$. Συνεπώς, οι δυνατοί συνδυασμοί ψηφίων και δυνάμεων των αριθμών του συνόλου M που ανήκουν στο $(0, 1]$ είναι

$$0.1000 \cdot 2^{-3} = 0.06250$$

$$0.1001 \cdot 2^{-3} = 0.073125$$

$$0.1010 \cdot 2^{-3} = 0.078125$$

$$0.1100 \cdot 2^{-3} = 0.93750$$

$$0.1011 \cdot 2^{-3} = 0.0859375$$

$$0.1110 \cdot 2^{-3} = 0.109375$$

$$0.1101 \cdot 2^{-3} = 0.1015625$$

$$0.1111 \cdot 2^{-3} = 0.1171875$$

(β) Αθροίζοντας τους όρους με αύξουσα σειρά και χρήση αριθμ. κινητής υποδιαστολής με στρογγυλευση και αποκοπή έχουμε:

$$fl(1 + 0.125) = fl(0.1125 \cdot 10^1) = 1.130$$

$$fl(1.130 + 0.0370) = fl(0.1167 \cdot 10^1) = 1.170$$

$$fl(1.170 + fl(0.015625)) = fl(1.70 + 0.156 \cdot 10^{-1}) = fl(1.1856) = 1.19$$

$$fl(1.19 + 0.008) = 1.200$$

Αθροίζοντας τους όρους με φθίνουσα σειρά και χρήση αριθμ. κινητής υποδιαστολής έχουμε:

$$fl(0.008 + 0.0156) = 0.0236$$

$$fl(0.0236 + 0.0370) = 0.0606$$

$$fl(0.0606 + 0.125) = fl(0.1856) = 0.186$$

$$fl(1 + 0.186) = fl(0.1186 \cdot 10^1) = 1.190.$$

Η πραγματική τιμή του αθροίσματος είναι $S_5 \approx 1.185662037$ και στο πρώτο άθροισμα το σχετικό σφάλμα είναι

$$\left| \frac{1.20 - S_5}{S_5} \right| \approx 0.012 \quad \text{ενώ στο δεύτερο} \quad \left| \frac{1.19 - S_5}{S_5} \right| \approx 0.0037, \text{ δηλ. περίπου το } 1/3 \text{ του προηγούμενου.}$$

Η συσσώρευση σφαλμάτων στρογγύλευσης στην πρώτη περίπτωση λόγω ακύρωσης ψηφίων όταν προστεθούν μικρότεροι αριθμοί σε μεγαλύτερους είναι σημαντική. (βλ. και ΔΙΑΛΕΞΗ 3 σελ. 9-11).

Θέμα 2

(α) Η μελέτη της συνάρτησης (μονοτονία, κυρτότητα, ακρότατα κτλ) f δίνει το γράφημα της, π.χ. στο $(0, 7]$. Η $f'(x) = 1 - e/x$, άρα η f έχει σημείο καμπής στο $x = e$ και είναι αύξουσα στο (e, ∞) και φθίνουσα αλλιώς, επίσης $f''(x) = e/x^2 > 0 \forall x$. Η προφανής ρίζα είναι η $\rho_1 = 1$ και εφόσον $f(5) \cdot f(6) < 0$ υπάρχει μία ακόμη (μοναδική) στο $(5, 6)$.

(β) Εφόσον $\phi(x) = e \ln x + 1$ κοιτάμε καταρχάς αν είναι συστολή, δηλ. $|\phi'(x)| < 1$ ή αν $\max |\phi'(x)| < 1$ για $x \in [5, 6]$ και έχουμε ότι

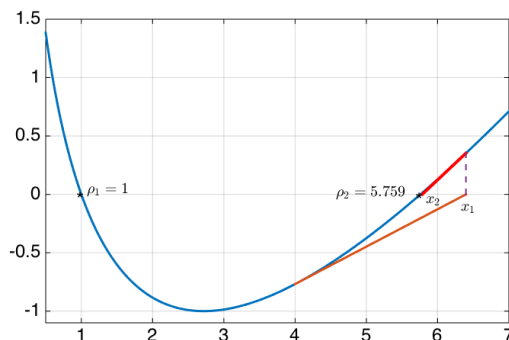
$$|\phi'(x)| = e/x < 1 \quad \forall x \in [5, 6]$$

Πρέπει επιπλέον $\phi([5, 6]) \subset [5, 6]$ (δεύτερη προϋπόθεση του Θεωρ. Συστολής) και έχουμε $\phi(5) = 1.5921$ και $\phi(6) = 1.6592$, άρα ισχύει, εφόσον $\phi(x)$ αύξουσα ($\phi'(x) > 0 \forall x \in [5, 6]$).

(γ) Η μέθοδος Newton-Raphson δίνει για $x_0 = 4$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 6.3978 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_2 \approx 5.7843$$

η οποία συγκλίνει στη ρίζα $\rho_2 \in (5, 6)$, όπως φαίνεται γεωμετρικά από τα 2 βήματα της μεθόδου, φέρνοντας τις αντίστοιχες εφαπτόμενες (και εφόσον η f αύξουσα για $x > e$ και $f'' > 0$)



Θέμα 3

(α) Στη μορφή Lagrange έχουμε για $x_0 = 20, x_1 = 40$ και $x_2 = 60$, $p_2(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$ όπου

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-40)(x-60)}{(20-40)(20-60)} = \frac{(x-40)(x-60)}{800}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-20)(x-60)}{(40-20)(40-60)} = \frac{(x-20)(x-60)}{-400}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-20)(x-40)}{(60-20)(60-40)} = \frac{(x-20)(x-40)}{800}.$$

Άρα για $f(50) \approx p_2(50) \approx 230$

Στη μορφή Newton

x_i	$f(x_i) = \Delta^{(0)}$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$
20	55 ↘		
		5 ↘	
40	155 ↗		0.08125
		8.25 ↗	
60	320		

Άρα $p_2(x) = 55 + 5(x-20) + 0.08125(x-20)(x-40)$ και για $x = 50$ έχουμε $f(50) \approx p_2(50) \approx 230$ ευρώ. Τα 2 πολυώνυμα συμπίπτουν (μοναδικότητα) άρα θα δώσουν ακριβώς ίδιο αποτέλεσμα.

(β) Με τη μέθοδο **ελαχίστων τετραγώνων** γραμμικοποιούμε

$$\ln y = \ln A + B \ln x \Rightarrow \tilde{y} = a + b\tilde{x}, \quad a = \ln A, b = B$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	x_i	y_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$	$\tilde{x}_i^2$	$\tilde{x}_i \tilde{y}_i$
1	2	11	0.6931	2.3979	0.4805	
2	4	21	1.3863	3.0445	1.9218	
3	5.5	36	1.7046	3.5835	2.9062	
4	7.7	65	2.0412	4.1744	4.1666	
$\Sigma =$			5.8254	13.2003	9.4750	20.5124

Λύνοντας τις κανονικές εξισώσεις έχουμε

$$\begin{bmatrix} 4 & 5.8254 \\ 5.8254 & 9.4750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.2003 \\ 20.5124 \end{bmatrix}$$

$a \approx 1.4074 \Rightarrow A = e^{1.4074} \approx 4.0853$ και $b = B \approx 1.2996$. Συνεπώς για δέικτη ρύπανσης $x = 6.5$ έχουμε $y = 4.0853 \cdot 6.5^{1.2996} = 46.5250$ δηλ. αναμένονται περίπου 46 εισαγωγές.

Θέμα 4

(α) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο απροσδιορίστων συντελεστών (για κανόνες παραγώγισης βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 13 σελ. 14) για $f(x) = 1, x$ και x^2 και έχουμε

$$\text{Αν } f(x) = 1 \text{ τότε } f'(a) = 0 = w_1 + w_2 + w_3 \quad (1)$$

$$\text{Αν } f(x) = x \text{ τότε } f'(a) = 1 = -aw_1 + 0 \cdot w_2 + aw_3 = -aw_1 + aw_3 \quad (2)$$

$$\text{Αν } f(x) = x^2 \text{ τότε } f'(a) = 2a = (-a)^2 w_1 + 0 \cdot w_2 + a^2 w_3 = a^2 w_1 + a^2 w_3 \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2) με a και έχουμε $a = -a^2 w_1 + a^2 w_3 \quad (4)$. Από (3) + (4) έχουμε

$$3a = 2a^2 w_3 \Rightarrow w_3 = 3/(2a) \text{ και από (2) έχουμε } w_1 = 3/(2a^2) - 1/a \text{ και από (1) παίρνουμε } w_2 = -w_1 - w_3 = -3/(2a) - 3/(2a^2) + 1/a = -1/(2a) - 3/(2a^2).$$

(β) Ο συνθετος τύπος Simpson 1/3 εφαρμόζεται σε 5 σημεία $(1, 7/4, 5/2, 13/4, 4)$, με $h = (4 - 1)/4 = 3/4$ άρα δίνει $Q_5^S = 1.380$.

Ο απλός τύπος Simpson 3/8 εφαρμόζεται σε 4 σημεία με $h = (4 - 1)/3 = 1$ άρα δίνει $Q_{3/8}^S = 1.3819$.

Ο τύπος Gauss-Legendre 2-σημείων με αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{4-1}{2}t + \frac{4+1}{2} = 1.5t + 2.5$ δίνει

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(1.5t + 2.5) 2dt = 2 \int_{-1}^1 \frac{3}{(1.5t + 2.5)^4} dt = 2 \int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2(g(-1/\sqrt{3}) + g(1/\sqrt{3})) = \dots = 0.6663.$$

Η ακριβής τιμή $I(f) = -\frac{1}{x^3} \Big|_1^5 = 0.992$, συνεπώς, σε τιμές απόλυτου σφάλματος, ο συνθετος τύπος Gauss είναι λίγο πιο ακριβής.

Θέμα 5

(α) Θεωρεία (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ σελ. 15-16 και σελ. 24).

(β) Εφόσον θέλουμε 2 βήματα της μεθόδου για το $y(2)$ έχουμε, $h = (2 - 1)/2 = 0.5$ και για $f(t, y) = y/t + 2t$ έχουμε

$$y^1 = y^0 + hf(t^0, y^0) = 2 + 0.5(2/1 + 2 \cdot 1) = 2 + 2 = 4$$

$$y^2 = y^1 + hf(t^1, y^1) = \dots \approx 6.8333$$

Εφόσον δίνεται η αναλυτική γενική λύση $y(t) = \frac{2t+C}{t}$, $C \in \mathbb{R}$, πρέπει να υπολογίσουμε το C από την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$ και έχουμε $y(1) = 2 = \frac{2 \cdot 2 + C}{1}$, άρα $C = -2$ και $y(t) = \frac{2t-2}{t}$, συνεπώς η ακριβής τιμή στο $t = 2$ είναι $y(2) = (4 - 2)/2 = 1$. Το σφάλμα είναι $|y^2 - y(2)| = |6.8333 - 1| = 5.8333$.