CAM

Σημειώσεις

Μέση τιμή

$$\boxed{E(x) = \overline{x} = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot p_i)}$$

Διασπορά

$$\boxed{Var(x) = \sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 \right]}$$

σ_x = τυπική απόκλιση

Σειρές – Αθροίσματα

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (k) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) = e^x \quad \text{(Taylor)}}$$

$\boxed{a<1}$

$$\boxed{\overline{N} = \sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot P_n)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{k} (a^n) = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (a^n) = \frac{1}{1-a}}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} (a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a^n) - \sum_{n=0}^{k} (a^n) \Rightarrow \boxed{\sum_{n=k}^{\infty} (a^n) = \frac{a^k}{1-a}}$$

$$\sum_{n=k}^{m} (a^n) = \sum_{n=k}^{\infty} (a^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} (a^n) = \frac{a^k}{1-a} - \frac{a^{m+1}}{1-a} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=k}^{m} (a^n) = \frac{a^k - a^{m+1}}{1-a}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot a^n) = \frac{a}{(1-a)^2}}$$

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} (n \cdot a^n) = \frac{a^k \cdot (k - a \cdot k + a)}{(1-a)^2}}$$

Ρυθμός Αφίξεων

$\lambda =$ πελάτες / ώρα

Ρυθμός Εξυπηρετήσεων

$\mu =$ πελάτες / ώρα

Μέτρα Απόδοσης

$\overline{N} = \lambda \cdot \overline{T}$

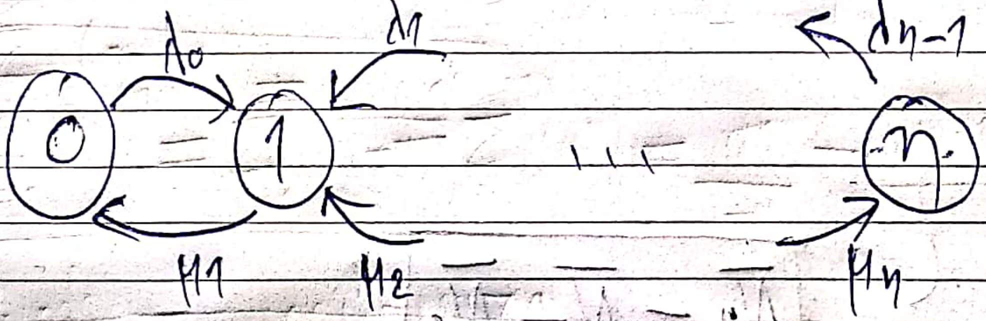
$=$ $\qquad$ $=$

$\overline{N_q} = \lambda \cdot \overline{W}$ (ουρά)

$+$ $\qquad$ $+$

$\overline{N_s} = \lambda \cdot \overline{X}$ (εξυπηρέτηση)

πελάτες $\qquad$ χρόνος



Chapman – Kolmogorov

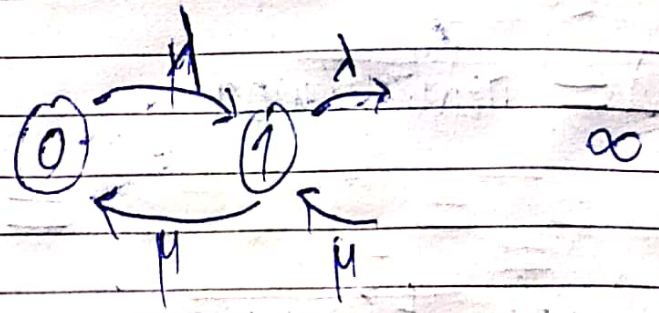
$$\frac{dP_i}{dt} = -(\lambda_i + \mu_i) \cdot P_i + \lambda_{i-1} \cdot P_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot P_{i+1}$$

Μόνιμη Κατάσταση:

$$0 = -(\lambda_i + \mu_i) \cdot P_i + \lambda_{i-1} \cdot P_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot P_{i+1}$$

M/M/1

Τυπολόγιο



$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu}} < 1$ Συνθήκη Ευστάθειας

$$\boxed{P_n = \rho^n \cdot P_0 = \rho^n \cdot (1-\rho)}$$

$$\boxed{P_0 = 1-\rho}$$

$$\boxed{\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

$$\boxed{\bar{N}_s = \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\boxed{\bar{N}_q = \bar{N} - \bar{N}_s}$$

$$\boxed{T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)}}$$

Ερωτήσεις

1) Πιθανότητα να έχω 2 πελάτες ⇒ P_2

2) Πιθανότητα να έχω 2 στην ουρά ⇒ P_3 $\left(\begin{matrix}1 \text{ εξυπηρετεί-} \\ + \text{ ται} \\ 2 \text{ ουρά}\end{matrix}\right)$

3) Πιθανότητα το πολύ 2 στην ουρά ⇒ $P_3+P_2+P_1+P_0$

4) Πιθανότητα τουλάχιστον 1 πελάτη ⇒ $1-P_0=\rho$

5) Πιθανότητα τουλάχιστον 2 πελάτες ⇒ $1-P_0-P_1$

6) Πιθανότητα μόνιμης κατάστασης ⇒ P_0

7) Πόσοι πελάτες περιμένουν ⇒ $\overline{N}$

8) Πόσες παραγγελίες εκκρεμούν ⇒ $\overline{N}$

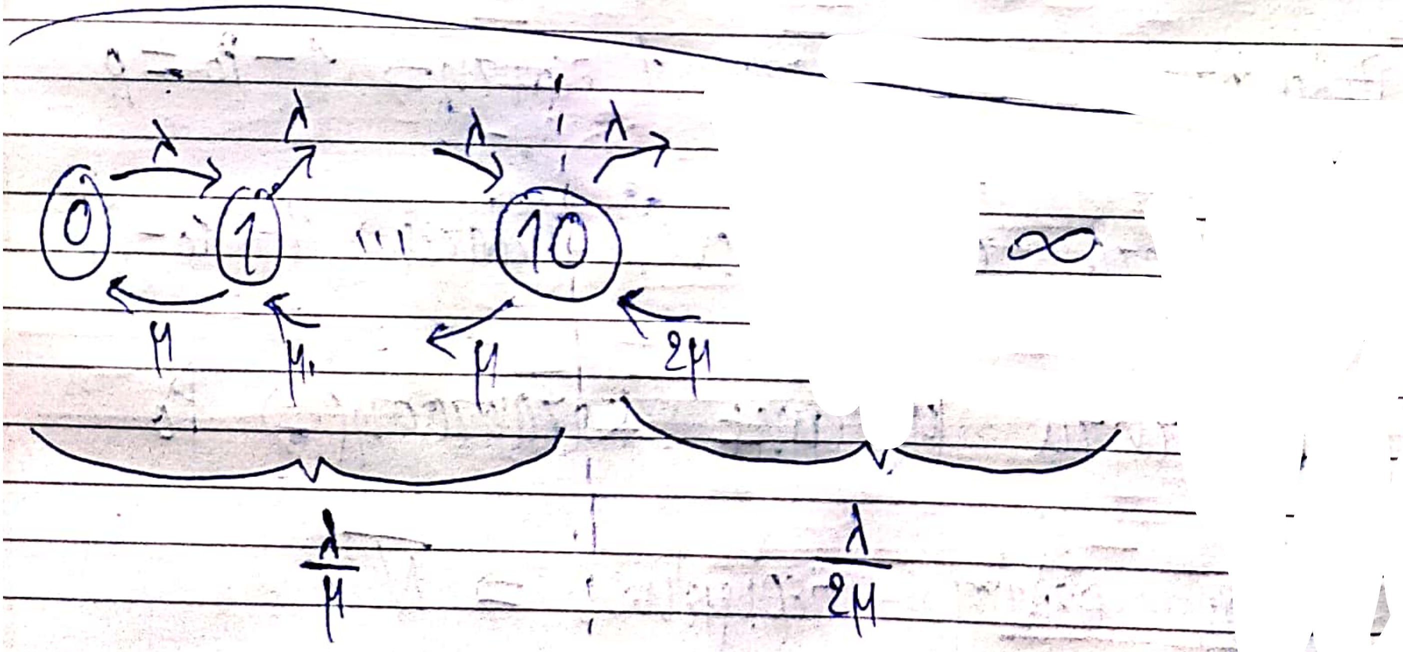
Scanned with CamScanner

Άσκηση

Έχω 1 κατάστημα. Μέχρι 10 πελάτες έχω 1 υπάλληλο. Από 10 πελάτες και άνω έχω 2 υπαλλήλους. Άπειρη χωρητικότητα.

$\lambda = 1$ πελ/h και $\mu = 2$ πελ/ώρα

1) Πιθανότητα μόνιμης κατάστασης (P_0);



Για ευστάθεια εξετάζω κλάσμα κοντά στο άπειρο.

$\frac{\lambda}{2\mu} = \frac{1}{4} < 1$ ✓

$$P_n = \begin{cases} P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n \leq 10 \\ P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{n-10} & n \geq 10 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(P_n) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{10}(P_n) + \sum_{n=11}^{\infty}(P_n) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{10}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\cdot\mu}\right)^{-10} \cdot \sum_{n=11}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n\right]\right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \left[\sum_{n=0}^{10}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-10} \cdot \sum_{n=11}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \left[\frac{0{,}9995}{0{,}5} + \frac{0{,}001}{0{,}75}\right]^{-1} = \left[1{,}999 + 0{,}001\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = [2]^{-1} \Rightarrow P_0 = 0{,}5$$

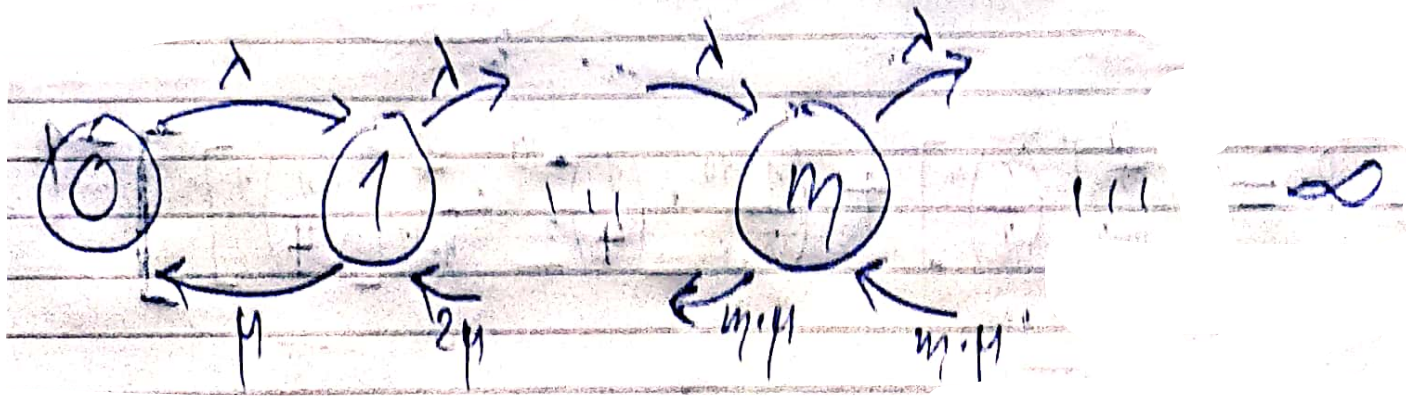
M/M/m

Προϋποθέσεις

1) Οι υπάλληλοι έχουν ίδιους χρόνους.

2) Εξ' αρχής διαθέσιμοι όλοι.

3) Όλοι οι υπάλληλοι μπορούν να εξυπηρετήσουν όλους τους πελάτες.



Τυπολόγιο

$$\boxed{P_n = \begin{cases} \dfrac{P_0 \cdot (m \cdot \rho)^n}{n!} & 0 \le n \le m \\[2ex] \dfrac{P_0 \cdot (m^m \cdot \rho^n)}{m!} & n \geq m \end{cases}}$$

$$\boxed{P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho)^k}{k!} \right] + \frac{(m \cdot \rho)^m}{m! \cdot (1-\rho)} \right\}^{-1}}$$

$$\boxed{P[\text{πλήρεις}] = \frac{P_0 \cdot (m \cdot \rho)^m}{m! \cdot (1-\rho)}}$$

$$\boxed{\overline{N_s} = \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\boxed{\overline{N_q} = P_0 \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{m! \cdot (1-\rho^2)}}$$

$$\boxed{\overline{N} = \overline{N_s} + \overline{N_q}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{m \cdot \mu} < 1}$$

Ερωτήσεις

1) Πιθανότητα να έχω ουρά $\Rightarrow$ P[πλήρες]

2) Πόσοι πελάτες περιμένουν $\Rightarrow$ $\bar{N}$

3) Πόσες παραγγελίες εκκρεμούν $\Rightarrow$ $\bar{N}$

4) Ποια η πιθανότητα να έχω το πολύ 2 πελάτες στην ουρά $\Rightarrow$ $P(N_q \leq 2) = \sum_{n=0}^{m+2} (P_n)$

Θέμα 3 ~ Ιουν/2017

3 υπάλληλοι, $\lambda = 2{,}7$, $\overline{X} = 1$

1) Ποιο είναι το πλήθος στην ουρά ($\overline{N_q}$);

$M/M/3$

$\mu = \frac{1}{\overline{X}} \Rightarrow \boxed{\mu = 1}$

$\rho = \frac{\lambda}{3 \cdot \mu} = \frac{2{,}7}{3} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}9}$

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{2} \left[\frac{(3 \cdot 0{,}9)^k}{k!} \right] + \frac{(3 \cdot 0{,}9)^3}{3! \cdot (1-0{,}9)} \right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{2} \left[\frac{2{,}7^k}{k!} \right] + \frac{2{,}7^3}{6 \cdot 0{,}1} \right\}^{-1} = \left\{ 1 + 2{,}7 + 3{,}6 \right\}^{-1} = \left\{ 7{,}3 \right\}^{-1} \Rightarrow$$

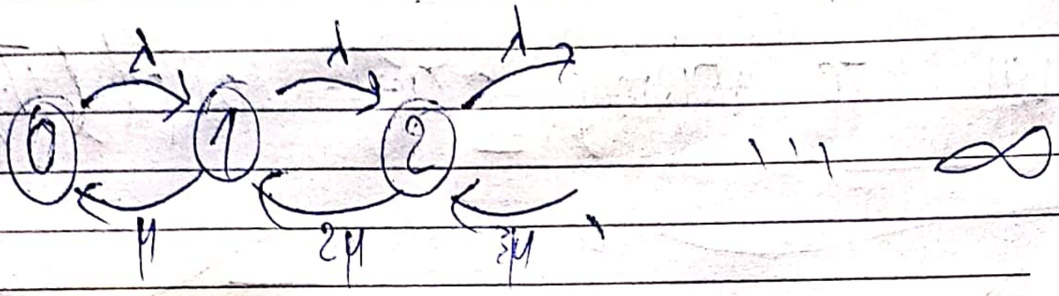
$$\Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}14}$$

$$N_q = 0{,}14 \cdot \frac{3^3 \cdot 0{,}9^4}{6 \cdot 0{,}09} \Rightarrow \boxed{\overline{N_q} = 4{,}62}$$

Scanned with CamScanner

$M/M/\infty$

! ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΟΥΡΑ



Αναγνώριση

1) Όσοι έρχονται εξυπηρετούνται.

2) Κανείς δεν περιμένει.

3) Δεν έχει ουρά.

4) Χωράει άπειρους.

5) Σαν να έχει άπειρους υπαλλήλους.

Τυπολόγιο

$$\boxed{P_0 = e^{-\lambda/\mu}}$$

$$\boxed{P_n = \frac{P_0}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$\boxed{\overline{N_q} = 0} \qquad \boxed{W = 0}$$

$$\boxed{\overline{N} = \overline{N_s} = \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{\mu}}$$

Αφίξεις με αποθάρρυνση

Όταν κάποιος βλέπει ότι το σύστημα έχει πολλούς και αποφασίζει να φύγει.

α ή λ = μέσος ρυθμός αφίξεων

$\bar{\lambda}$ = πραγματικός ρυθμός αφίξεων

μ = μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης

$\bar{\mu}$ = πραγματικός ρυθμός εξυπηρέτησης

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\alpha/2"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\alpha/3"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] & \infty \end{tikzcd}$$

Τυπολόγιο

$$P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

$$P_n = \frac{P_0}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\lambda = \alpha$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}$$

$$\mu_n = \mu$$

$$\bar{N}_s = 1 - P_0$$

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\bar{N}_q = \bar{N} - \bar{N}_s$$

$$TH = \bar{\lambda} = \bar{\mu} = \mu \cdot (1 - P_0)$$

$$T = \frac{\lambda}{\mu^2 \cdot (1 - e^{-\lambda/\mu})}$$

Άσκηση με Έσοδα 1

Ο υπάλληλος έχει: $\mu = 50$ πελ/day, $\lambda = 10$ πελ/day

Ο κάθε πελάτης δίνει 5€

1) Πόσα είναι τα Έσοδα;

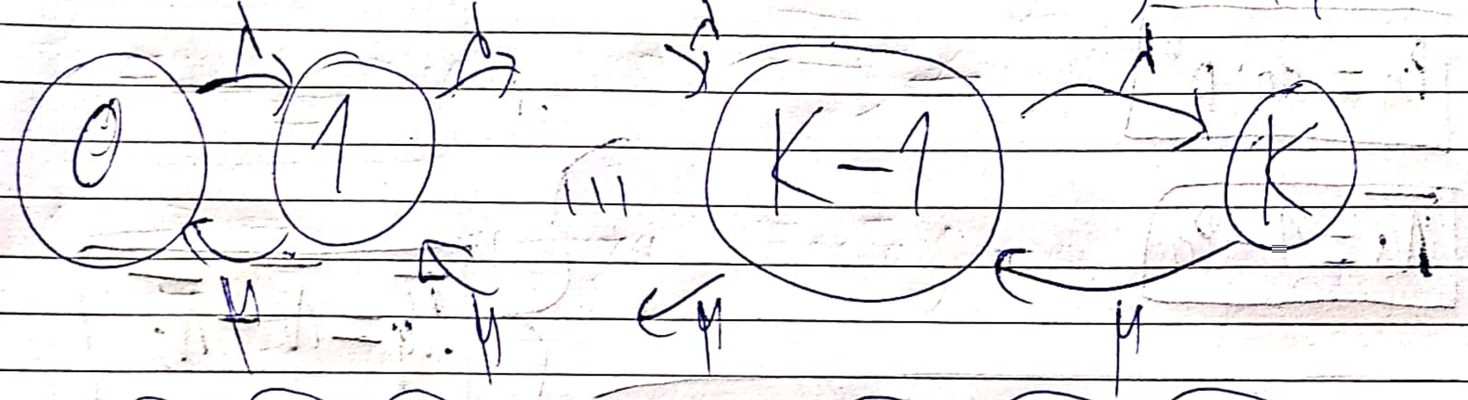
M/M/1

$$\bar{\mu} = \mu \cdot (1 - P_0) = \mu \cdot [1 - (1-\rho)] = \mu \cdot \rho = \cancel{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\cancel{\mu}} \Rightarrow \boxed{\bar{\mu} = \lambda}$$

$$\text{Έσοδα} = \bar{\mu} \cdot \text{κέρδος} = 10 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{\text{Έσοδα} = 50 \text{€/day}}$$

M/M/1/K

Χωράει έως Κ πελάτες $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{1 πελάτης εξυπηρετείται} \\ \text{Κ-1 πελάτες περιμένουν} \end{cases}$



Επειδή ΔΕΝ έχει άπειρη χωρητικότητα

χρησιμοποιώ: $TH = \bar{\lambda} = \bar{\mu}$

Τυπολόγιο

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\boxed{P_n = P_0 \cdot \rho^n}$$

$$\boxed{\overline{N_s} = 1 - P_0}$$

$$\boxed{\overline{N} = \sum_{n=0}^{K} (n \cdot P_n) = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K} \left[n \cdot \rho^n \right]}$$

$$\boxed{\overline{N_q} = \overline{N} - \overline{N_s}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{K} (P_n) = 1 \Rightarrow P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K} \left[\rho^n \right] = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}}$$

$$\boxed{TH = \overline{\lambda} = \lambda \cdot (1 - P_K) = \overline{\mu} = \mu \cdot (1 - P_0)}$$

$$\boxed{Rej. = \lambda \cdot P_K}$$

απορριπτόμενοι

$$\boxed{T = \frac{\overline{N}}{\overline{\lambda}} = \frac{\overline{N}}{\lambda \cdot (1 - P_K)}}$$

$$\boxed{\lambda = \overline{\lambda} + Rej}$$

Ερωτήσεις

1) Πόσοι πραγματικά μπαίνουν $\Rightarrow \bar{\lambda}$
2) Πόσοι πραγματικά φεύγουν $\Rightarrow \bar{\mu}$
3) Πόσοι πραγματικά εξυπηρετούνται $\Rightarrow TH = \bar{\lambda} = \bar{\mu}$.

4) Πόσοι κατά μέσο όρο τρώνε άκυρο $\Rightarrow Rej = \lambda \cdot P_K$

5) Πόσοι περιμένουν να βρουν κάποιο κενό για να χωθούν $\Rightarrow Rej = \lambda \cdot P_K$

6) Πόσοι κατά μέσο όρο εξυπηρετούνται $\Rightarrow N_s$

Άσκηση Έσοδα 2

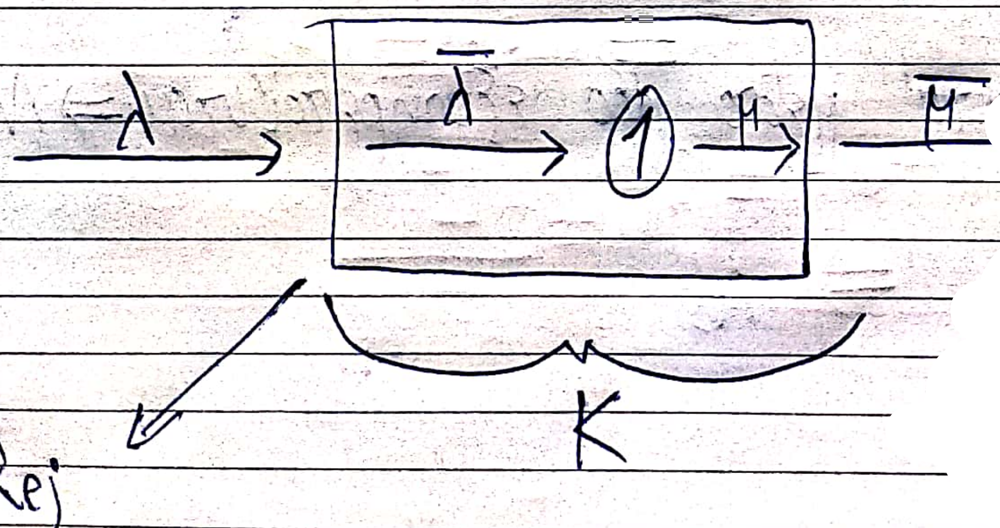
$\lambda = 100$ πελ/day , $P_K = 20\%$ (πλήρες) , κάθε πελάτης δίνει 5€

Όποιος το βρίσκει γεμάτο φεύγει και κοστίζει 10€

1) Έσοδα ;

2) Κόστος απόρριψης ;

3) Κέρδος ;



1) $\text{Έσοδα} = \bar{\mu} \cdot 5€ = \lambda \cdot (1-P_K)\cdot 5 \Rightarrow \boxed{\text{Έσοδα} = 400€/day}$

2) $\text{ΚοστΑπορρ} = Rej \cdot 10 = \lambda \cdot P_K \cdot 10 \Rightarrow \boxed{\text{ΚοστΑπορρ} = 200 \frac{€}{day}}$

3) $\text{Κέρδος} = \text{Έσοδα} - \text{ΚοστΑπορρ} \Rightarrow \boxed{\text{Κέρδος} = 200 €/day}$

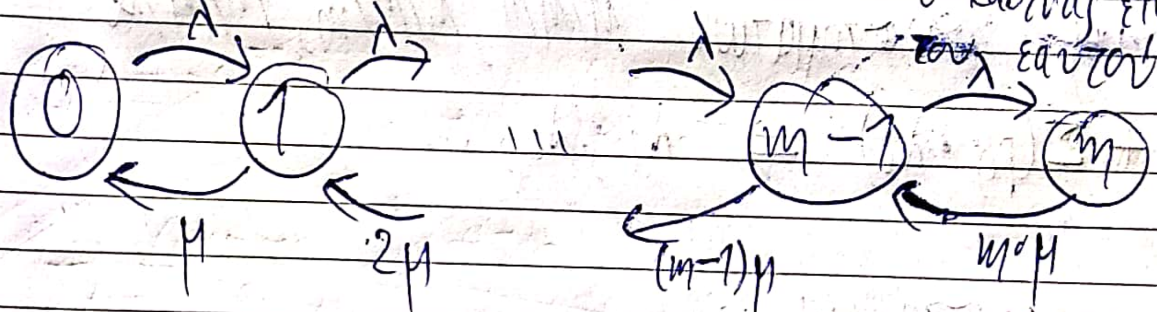
M/M/m/m

Self-Service

χωρητικότητα

Παράδειγμα 10 θέσεις parking $\Rightarrow$ M/M/10/10

ο καθένας είναι υπάλληλος του εαυτού του



Τυπολόγιο

$$\boxed{P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{m} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \right\}^{-1}}$$

$$\boxed{P_n = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}}$$

$$\boxed{\bar{\lambda} = \lambda \cdot (1 - P_m)} = \bar{\mu}$$

$$Rej = \lambda \cdot P_m$$

Απορρ.

$$\boxed{\bar{N}_q = 0}$$

$$\boxed{\bar{N} = \bar{N}_s = \bar{\lambda} \cdot \bar{X} = \frac{\lambda \cdot (1 - P_m)}{\mu}}$$

$$\boxed{\bar{T} = \frac{1}{\mu}}$$

Δίκτυα Jackson

Βήματα

1) Φτιάχνω σχήμα

2) Προσδιορισμός συστημάτων M/M/1, M/M/m, M/M/∞

3) $\lambda_j = \gamma_i + \Sigma(p_{ij} \cdot \lambda_i) \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots$

4) Τσεκάρω ευστάθειες

$M/M/1 \rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1$

$M/M/m \rightarrow \frac{\lambda}{m \cdot \mu} < 1$

M/M/∞ → ΠΑΝΤΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

! ότι βγαίνει αθροίζει στο 1

Scanned with CamScanner

Ερωτήσεις

1) Πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση $K=[0,2,0,5]$

$\Rightarrow P(K) = P_1(0) \cdot P_2(2) \cdot P_3(0) \cdot P_4(5)$

κόμβος

2) Πιθανότητα να έχει 1 πελάτη $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(\overline{N}=1) = P(1,0,0,0) + P(0,1,0,0) + P(0,0,1,0) + P(0,0,0,1)$

3) Πιθανότητα το πολύ 1 πελάτη $\Rightarrow P(N \leq 1) = P(0,0,0,0) +$
$+ P(N=1)$

4) Πιθανότητα τουλάχιστον 1 $\Rightarrow P(N \geq 1) = 1 - P(0,0,0,0)$

5) Μέσο πλήθος $\Rightarrow \overline{N} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{N_i})$

ΘΕΜΑ 1 ~ Φεβρ 2021

Ο πρώτος κόμβος έχει 2 πελάτες και οι υπόλοιποι 1.

$\mu_1 = 2,5$

$\mu_2 = 4$

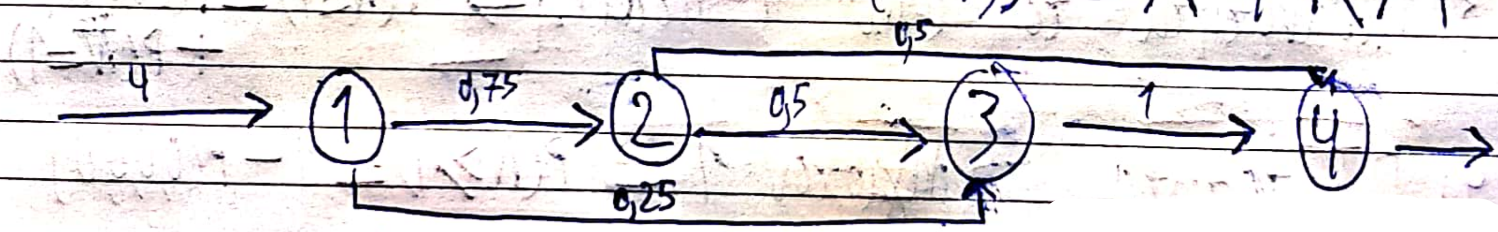
$\mu_3 = 3$

$\mu_4 = 5$

α) Ποιο είναι το πλήθος πελατών;

β) Πιθανότητα να υπάρχει 1 πελάτης;

γ) Συνολικό μέσο χρόνο αναμονής; EXTRA



1

α)

$1: M/M/2 \Rightarrow \lambda_1 = 4$

$2: M/M/1 \Rightarrow \lambda_2 = 0,75 \cdot \lambda_1 = 3$

$3: M/M/1 \Rightarrow \lambda_3 = 0,5 \cdot \lambda_2 + 0,25 \cdot \lambda_1 = 1,5 + 1 = 2,5$

$4: M/M/1 \Rightarrow \lambda_4 = \lambda_3 + 0,5 \cdot \lambda_2 = 2,5 + 1,5 = 4$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= 2,5 \\ \lambda_4 &= 4 \end{aligned}}$$

Κόμβος 1

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\cdot\mu_1} = \frac{4}{2\cdot 2{,}5} = 0{,}8 < 1 \quad \text{Ευσταθές}$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{\left(2\cdot\frac{4}{2\cdot 2{,}5}\right)^k}{k!} \right] + \frac{\left(2\cdot\frac{4}{2\cdot 2{,}5}\right)^2}{2!\cdot\left(1-\frac{4}{2\cdot 2{,}5}\right)} \right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \left\{ 1 + 1{,}6 + \frac{1{,}6^2}{2\cdot 0{,}2} \right\}^{-1} = \left\{ 3{,}6 \right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}28}$$

$$\overline{N_1} = \overline{N_s} + \overline{N_q} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + P_0\cdot\frac{m^m\cdot\rho_1^{m+1}}{m!\cdot(1-\rho_1^2)} = \frac{4}{2{,}5} + 0{,}28\cdot\frac{4\cdot 0{,}8^3}{2\cdot 0{,}16} = 1{,}6 + 1{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 3{,}7}$$

Κόμβος 2

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{3}{4} = 0{,}75 < 1 \quad \text{Ευσταθές}$$

$$\overline{N_2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0{,}75}{0{,}25} \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 3}$$

Κόμβος 3

$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{2,5}{3} < 1$ Ευσταθές

$\bar{N}_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{\frac{2,5}{\cancel{3}}}{\frac{0,5}{\cancel{3}}} \Rightarrow \boxed{\bar{N}_3 = 5}$

Κόμβος 4

$\rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{4}{5} = 0,8 < 1$ Ευσταθές

$\bar{N}_4 = \frac{\rho_4}{1-\rho_4} = \frac{0,8}{0,2} \Rightarrow \boxed{\bar{N}_4 = 4}$

$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3 + \bar{N}_4 = 3,7 + 3 + 5 + 4 \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 15,7}$

β) Κόμβος 1

$\boxed{P_1(0) = 0,28}$ (ερώτημα α)

$$P_1(1) = P_0 \cdot \frac{(\eta \cdot \rho_1)^n}{n!} = \frac{0,28 \cdot (2 \cdot 0,8)^1}{1!} \Rightarrow \boxed{P_1(1) \simeq 0,45}$$

Κόμβος 2

$$P_2(0) = 1 - \rho_2 \Rightarrow \boxed{P_2(0) = 0,25}$$

$$P_2(1) = \rho_2 \cdot (1 - \rho_2) \Rightarrow \boxed{P_2(1) = 0,19}$$

Κόμβος 3

$$P_3(0) = 1 - \rho_3 \Rightarrow \boxed{P_3(0) = 0,17}$$

$$P_3(1) = \rho_3 \cdot (1 - \rho_3) \Rightarrow \boxed{P_3(1) = 0,14}$$

Κόμβος 4

$$P_4(0) = 1 - \rho_4 \Rightarrow \boxed{P_4(0) = 0,2}$$

$$P_4(1) = \rho_4 \cdot (1 - \rho_4) \Rightarrow \boxed{P_4(1) = 0,16}$$

$$P(N=1) = P(1,0,0,0) + P(0,1,0,0) + P(0,0,1,0) + P(0,0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N=1) = 0{,}45 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}2 + 0{,}28 \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}2 + 0{,}28 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ 0{,}28 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}16 = 0{,}004 + 0{,}002 + 0{,}002 + 0{,}002 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(N=1) = 0{,}01}$$

γ)

Εφικτά μονοπάτια	Πιθανότητα κάθε μονοπατιού
Εφ.Μον.1 : 1-2-3-4	$P(\text{Εφ.Μον.1}) = 1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}38$
Εφ.Μον.2 : 1-2-4	$P(\text{Εφ.Μον.2}) = 1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}38$
Εφ.Μον.3 : 1-3-4	$P(\text{Εφ.Μον.3}) = 1 \cdot 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}25$

$$T_1 = \frac{\bar{N}_1}{\lambda_1} \Rightarrow \boxed{T_1 = 0{,}93}, \quad T_2 = \frac{\bar{N}_2}{\lambda_2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 1}, \quad T_3 = \frac{\bar{N}_3}{\lambda_3} \Rightarrow \boxed{T_3 = 2}$$

$$T_4 = \frac{\bar{N}_4}{\lambda_4} \Rightarrow \boxed{T_4 = 1}$$

$$\bar{T} = P(\text{Εφ.Μον1}) \cdot (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + P(\text{Εφ.Μον2})(T_1 + T_2 + T_4) + P(\text{Εφ.Μον3})(T_1 + T_3 + T_4)$$

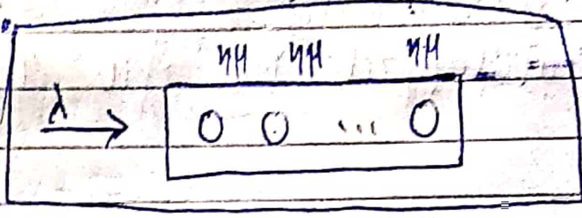
$$\Rightarrow \bar{T} = 0{,}38 \cdot (0{,}93 + 1 + 2 + 1) + 0{,}38 \cdot (0{,}93 + 1 + 1) + 0{,}25 \cdot (0{,}93 + 2 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{T} = 3{,}97}$$

$M/E_\eta/1$

Προϋποθέσεις

- Αφίξεις κατά Poisson/χωρίς μνήμη/εκθετικές
- Εξυπηρέτηση σε στάδια. Αν δεν τελειώσει όλες τις φάσεις ο πελάτης, δεν μπαίνει ο επόμενος.
- Ένας υπάλληλος.



Πλήθος πελατών: k

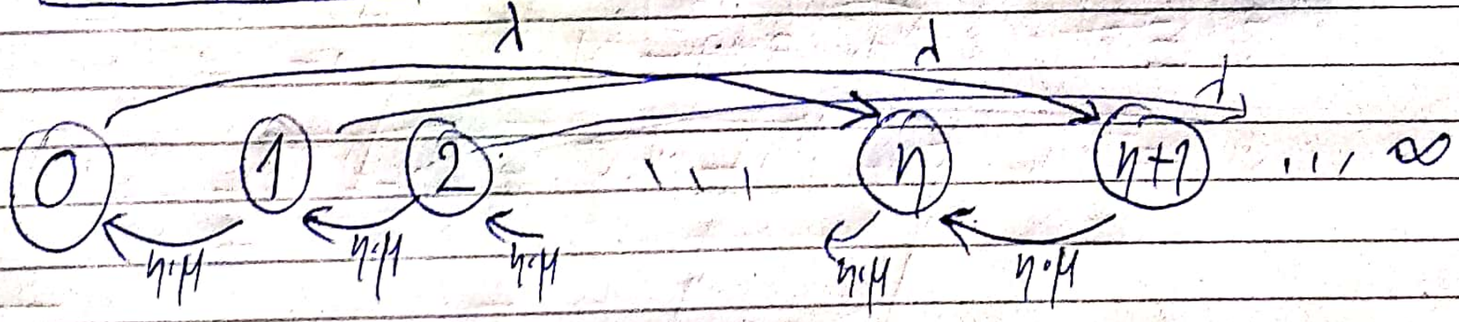
Πιθανότητες πελατών: P_k

Πλήθος βαθμίδων: $i \in [1, \eta]$

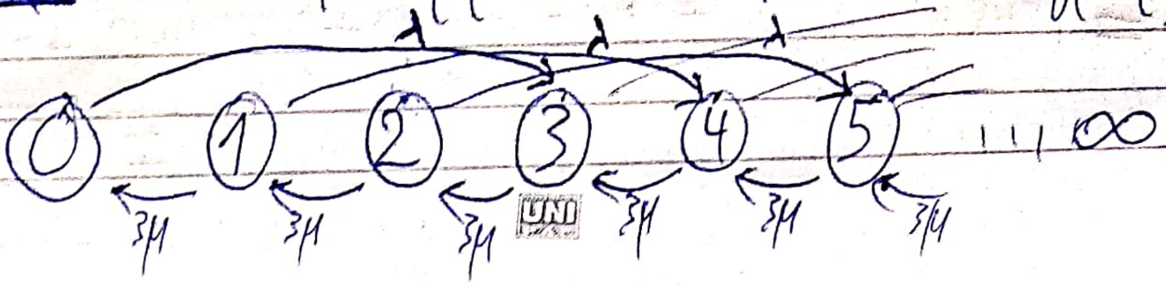
Πιθανότητες βαθμίδων: π_i

$$E(X) = \frac{1}{\mu}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\eta \cdot \mu^2} = \sigma_X^2$$



Παράδειγμα: Πάω στην εφορία και θέλω 3 υπογραφές.



Ερωτήσεις

1) Πιθανότητα να έχω άδειο σύστημα $\Rightarrow \pi_0$

2) Πιθανότητα να έχω τουλάχιστον 1 πελάτη $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\pi_i)$

3) Πιθανότητα να έχω 1 πελάτη στην ουρά $\Rightarrow \sum_{i=n+1}^{2n} (\pi_i)$

4) Πιθανότητα να έχω ουρά $\Rightarrow \sum_{i=n+1}^{\infty} (\pi_i)$

5) Μέσο πλήθος $\xRightarrow{M/G/1} \overline{N} = \rho + \dfrac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_X^2}{2 \cdot (1-\rho)}$

Βήματα

1) $\boxed{n\cdot\mu-\lambda\cdot(z+z^2+\dots z^n)=0} \Rightarrow \boxed{\Delta=\beta^2-4a\gamma} \Rightarrow \boxed{z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$

2) $\boxed{\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1}$

3) for $j\in[1,n]$:

$$A_j=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{z_j}{z_i}}\right)$$

$$A_1=\frac{1}{1-\frac{z_1}{z_2}}$$

$$A_2=\frac{1}{1-\frac{z_2}{z_1}}$$

4) $\boxed{\Pi_0=1-\rho}$ $\boxed{\Pi_i=(1-\rho)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{A_j}{z_j^{\,i}}\right)} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Pi_2\end{matrix}}$

$$\Pi_1=(1-\rho)\cdot\left(\frac{A_1}{z_1}+\frac{A_2}{z_2}\right)$$

$$\Pi_2=(1-\rho)\cdot\left(\frac{A_1}{z_1^2}+\frac{A_2}{z_2^2}\right)$$

5) for $k\in[1,K]$:

$$P_k=\sum_{i=(k-1)\cdot n+1}^{k\cdot n}(\Pi_i)$$

$$P_1=\Pi_1+\Pi_2$$

Φεβρ 2012

Κέντρο αντιντόπιγκ

- Αθλητές στέλνουν αιτήσεις για έλεγχο κατά Poisson με ρυθμό ($\lambda=$)2 αιτήσεις/day.
- Κάθε αίτηση περιέχει ($n=$)2 δείγματα. Για να γίνει η εξυπηρέτηση εξετάζονται τα δείγματα σειριακά.
- Ο χρόνος εξέτασης είναι εκθετικός με ($n\cdot\mu=2\cdot\mu=$)8 $\frac{\text{δειγμ}}{\text{day}}$

1) Βρείτε πιθανότητα των δειγμάτων αίματος στην μόνιμη κατάσταση. (π_1, π_2)

α

$M/E_2/1$

$\xrightarrow{\lambda}$ $\boxed{\overset{2\mu}{O}\ \overset{2\mu}{O}}$

πελάτες → αιτήσεις

βαθμίδες → δείγματα

$\boxed{\lambda = 2 \text{ αιτ/day}}$

$2\mu = 8 \Rightarrow \boxed{\mu = 4 \text{ αιτ/day}}$

$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}5} < 1$ Ευσταθές

$$2\mu - \lambda\cdot(z+z^2) = 0 \Rightarrow 8 - 2\cdot(z+z^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - z - z^2 = 0 \Rightarrow \boxed{z^2 + z - 4 = 0}$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{-1 \pm 4{,}12}{2} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z_1 = 1{,}56 \\ z_2 = -2{,}56 \end{array}}$$

$$A_1 = \frac{1}{1 - \frac{z_1}{z_2}} = \frac{1}{1 + 0{,}6} \Rightarrow \boxed{A_1 = 0{,}63}$$

$$A_2 = \frac{1}{1 - \frac{z_2}{z_1}} = \frac{1}{1 + 1{,}67} \Rightarrow \boxed{A_2 = 0{,}37}$$

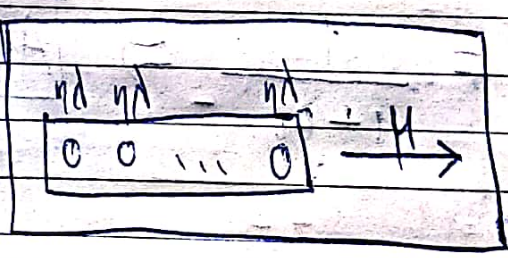
$$\Pi_1 = (1-\rho)\cdot\left(\frac{A_1}{z_1^1} + \frac{A_2}{z_2^1}\right) = 0{,}5\left(\frac{0{,}63}{1{,}56} + \frac{0{,}37}{-2{,}56}\right) \Rightarrow \boxed{\Pi_1 = 0{,}14}$$

$$\Pi_2 = (1-\rho)\cdot\left(\frac{A_1}{z_1^2} + \frac{A_2}{z_2^2}\right) = 0{,}5\cdot\left(\frac{0{,}63}{1{,}56^2} + \frac{0{,}37}{(-2{,}56)^2}\right) \Rightarrow \boxed{\Pi_2 = 0{,}17}$$

Eη/M/1

Προϋποθέσεις

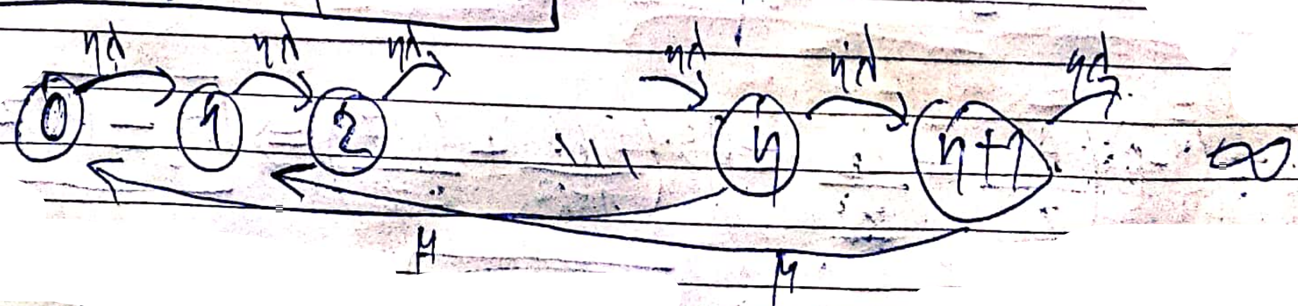
- Αφίξεις σε στάδια. Αν δεν τελειώσει όλες τις φάσεις ο πελάτης, δεν μπαίνει ο επόμενος.
- Εξυπηρέτηση Poisson/χωρίς μνήμη/εκθετικές.
- Ένας υπάλληλος.



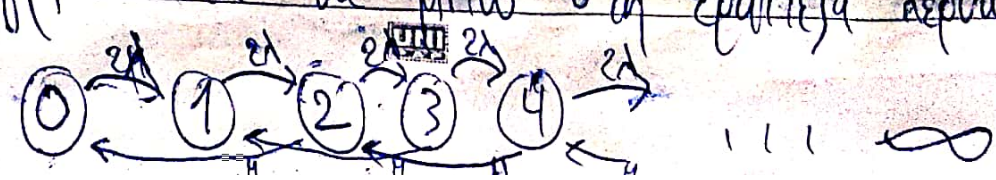
Πλήθος πελατών: k
Πιθανότητες πελατών: P_k
Πλήθος βαθμίδων: i
Πιθανότητες βαθμίδων: π_i

$$E(X) = \frac{1}{\mu}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\eta \cdot \mu^2}$$



Παράδειγμα: Για να μπω στη τράπεζα περνώ 2 πόρτες



Ερωτήσεις

1) Πιθανότητα το σύστημα άδειο $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}(\pi_i)$

2) Πιθανότητα 1 πελάτη $\Rightarrow \sum_{i=n}^{2n-1}(\pi_i)$

3) Πιθανότητα 1 πελάτη στην ουρά $\Rightarrow \sum_{i=2n}^{3n-1}(\pi_i$

4) Πιθανότητα να έχω ουρά $\Rightarrow \sum_{i=2n}^{\infty}(\pi_i)$

Βήματα

1) $\eta \cdot \rho \cdot z^{\eta+1} - z^{\eta} \cdot (1+\eta \cdot \rho) + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta \cdot \rho \cdot z^{\eta+1} - z^{\eta} - z^{\eta} \cdot \eta \cdot \rho + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta \cdot \rho \cdot z^{\eta}(z-1) - (z^{\eta} - 1^{\eta}) = 0 \xrightarrow{\eta = 2 \text{ (σίγουρα)}}$

$\Rightarrow 2 \cdot \rho \cdot z^2 (z-1) - (z^2 - 1) = 0 \Rightarrow (z-1) \cdot (2\rho z^2 - z - 1) = 0$

Δεν μας ενδιαφέρει διότι θέλω $\boxed{z>1}$

$\Rightarrow \boxed{2 \cdot \rho \cdot z^2 - z - 1 = 0}$, $\boxed{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$, $\boxed{z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$

Κρατάω μόνο την ρίζα που είναι μεγαλύτερη του 1 και την ονομάζω z_0

2) $\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1}$

3) $$\boxed{\pi_i = \begin{cases} \rho \cdot (z_0 - 1) \cdot z_0^{\eta - i - 1}, & i \geq \eta \\ \frac{1}{\eta} \cdot (1 - z_0^{-i-1}), & i < \eta \end{cases}}$$

$$\boxed{P_k = \begin{cases} 1 - \rho & k = 0 \\ \frac{\rho \cdot (z_0^{\eta} - 1)}{z_0^{\eta \cdot k}} & k > 0 \end{cases}}$$

Ιουλ 2012 — ΘΕΜΑ 2

- Μια βιομηχανία αποτελείται από (n=)2 τμήματα και ένα όχημα μεταφοράς από το 1º τμήμα στο 2º. Η μεταφορά αρχίζει όταν γεμίσει το όχημα.
- Φτάνουν με ρυθμό (2λ=) 4.
- Ρυθμοί μεταφοράς (μ=) 2,5.
- Χωρητικότητα οχήματος: n=2

1) Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης φορτίων (P_1, P_2)

$E_2/M/1$

2λ 2λ

0 0 $\xrightarrow{\mu}$

πελάτες → φορτία

βαθμίδες → προϊόντα

$2\lambda = 4 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

$\boxed{\mu = 2{,}5}$

$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8} < 1$ Ευσταθές

$$2\cdot\rho\cdot z^3 - z^2(1+2\rho)+1=0 \Rightarrow 2\rho z^3 - z^2 - 2\rho z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\rho z^2(z-1) - (z^2-1^2)=0 \Rightarrow \underbrace{\cancel{(z-1)}}_{z_0>1}(2\rho z^2 - z - 1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2\rho z^2 - z - 1=0} \Rightarrow 1{,}6\cdot z^2 - z - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 6{,}4 = 7{,}4$$

$$z_{1;2} = \frac{1 \pm 2{,}72}{3{,}2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z_1 = 1{,}16 > 1 \text{ ΔΕΚΤΟ} \\ z_2 = -0{,}54 < 1 \text{ Απορρ} \end{array}}$$

$$\boxed{z_0 = 1{,}16}$$

$$P_k = \begin{cases} 1-\rho, & k=0 \\ \dfrac{\rho\cdot(z_0^2-1)}{z_0^{2k}}, & k>0 \end{cases}$$

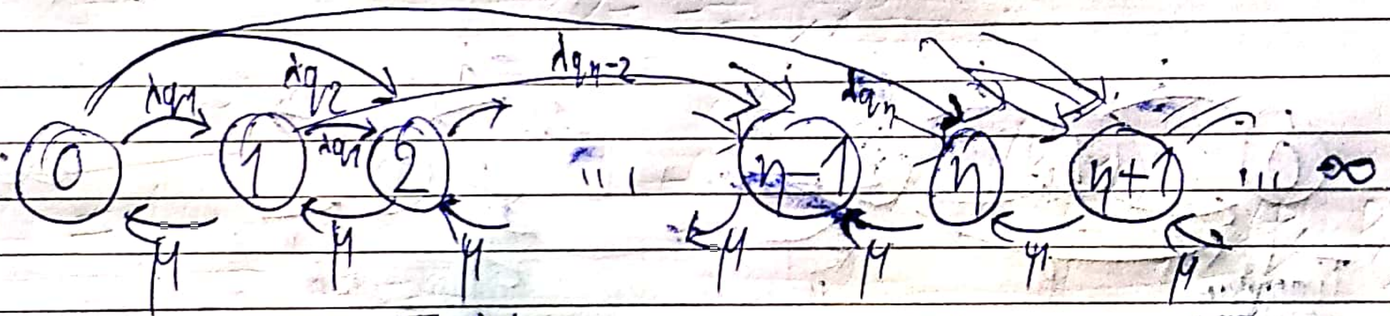
$$P_1 = \frac{0{,}8\cdot(1{,}16^2-1)}{1{,}16^2} \Rightarrow \boxed{P_1 = 0{,}27}$$

$$P_2 = \frac{0{,}8\cdot(1{,}16^2-1)}{1{,}16^4} \Rightarrow \boxed{P_2 = 0{,}15}$$

$$P_0 = 1-\rho \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}2}$$

Ομαδικές Αφίξεις

- Δεν περιμένουμε να συμπληρωθούν η αφίξεις όπως $E_\eta/M/1$.
- Ανά πάσα στιγμή μπορούν να έρθουν από 1 έως η μαζί με πιθανότητα q_i.
  Άρα έρχονται με ρυθμό $\lambda \cdot q_i$
- Εξυπηρετούνται ένας-ένας.
- Δεν έχει χωριτικότητα, άρα φτάνει στο άπειρο.



$$\boxed{\sum_{i=1}^{\eta} (q_i) = 1}$$

Υπολογισμοί

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu} \cdot Q'(1)} < 1 \text{ Ευσταθές}$$

$$\boxed{Q(z) = \sum_{i=1}^{\eta} (q_i \cdot z^i)}$$

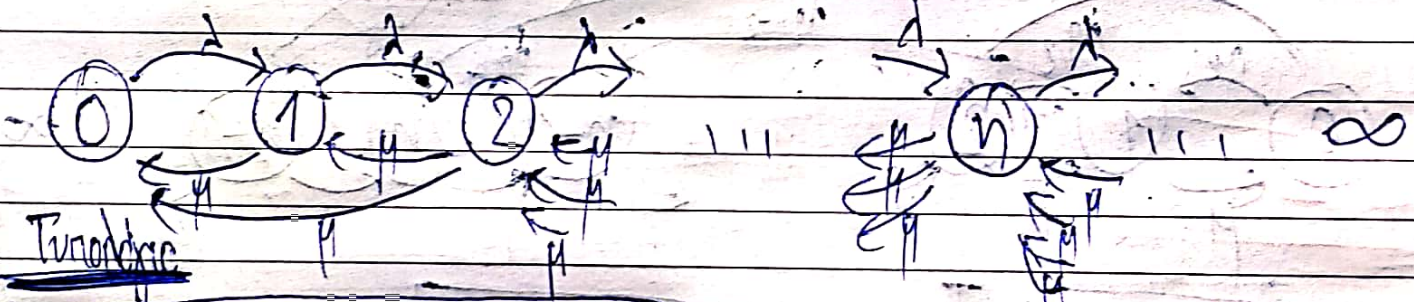
$$\boxed{Q'(z) = \frac{dQ(z)}{dz}}$$

$$\boxed{P(z) = \frac{\mu \cdot (1-\rho) \cdot (1-z)}{\mu \cdot (1-z) - \lambda \cdot z \cdot [1 - Q(z)]}}$$

$$\boxed{P_0 = 1 - \rho}$$

Ομαδικές Εξυπηρετήσεις

- Ο εξυπηρετητής μπορεί να εξυπηρετήσει από 1 έως η πελάτες ταυτόχρονα με πιθανότητα φ_i.
- Δεν περιμένουμε να συμπληρωθεί η για εξυπηρέτηση όπως στο $M/E_\eta/1$.
- Εισέρχονται ένας - ένας.
- Δεν υπάρχει χωρητικότητα, άρα φτάνει στο άπειρο.



Τυπολόγιο

$$\boxed{P(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\eta}\left[P_k\left(z^k - z^\eta\right)\right]}{\eta\cdot\rho\cdot z^{\eta+1} - (1+\eta\rho)\cdot z^\eta + 1}}$$

$$\eta\cdot\rho\cdot z^{\eta+1} - (1+\eta\cdot\rho)\cdot z^\eta + 1 = 0 \overset{z\neq 1}{\Rightarrow} \boxed{2\cdot\rho\cdot z^2 - z - 1 = 0} \Rightarrow$$

$$\Delta = \ldots, \quad z_{1,2} = \ldots \Rightarrow \boxed{z_0 = \ldots} > 1.$$

$$\boxed{P_k = \left(1 - \frac{1}{|z_0|}\right)\cdot\left(\frac{1}{|z_0|}\right)^k}$$

$$N = \sum_{k=0}^{\infty}(P_k\cdot k) = \left(1-\frac{1}{|z_0|}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[k\cdot\left(\frac{1}{|z_0|}\right)^k\right] = \frac{\frac{1}{|z_0|}}{\left(1-\frac{1}{|z_0|}\right)^2}\cdot\cancel{\left(1-\frac{1}{|z_0|}\right)} \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{|z_0|\cdot\left(1-\frac{1}{|z_0|}\right)}}$$

M/G/1

- Αφίξεις Poisson.
- Χρόνοι εξυπηρέτησης: τυχαίοι (σταθερό) / άγνωστης κατανομής / μη εκθετικής κατανομής
- Ένας εξυπηρετητής
- Δεν υπάρχει χωρητικότητα, άρα πάει στο άπειρο.

Τυπολόγιο

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu}} < 1 \text{ Ευσταθές}$$

Ομοιόμορφη $U(a,b)$

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\boxed{\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot \lambda (1-\rho)}}$$

$$\boxed{W = \bar{T} - \bar{X} = \frac{\lambda \cdot \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma_x^2\right)}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

$$\boxed{\bar{N}_q = \lambda \cdot W = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

$$\boxed{\bar{N}_s = \rho = \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\boxed{\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

M/G/m/m

ΟΛΑ ΙΔΙΑ με M/M/m/m

M/G/∞

ΟΛΑ ΙΔΙΑ ΜΕ M/M/∞

G/G/1

$\lambda = \frac{1}{\bar{t}}$ $\mu = \frac{1}{\bar{x}}$

$\sigma_t^2 = \frac{1}{\eta \cdot \lambda^2}$

$\sigma_x^2 = \frac{1}{\eta \cdot \mu^2}$

$$\boxed{\frac{\lambda \cdot (\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2 \cdot (1-\rho)} - \frac{1+\rho}{2\lambda} \leq W \leq \frac{\lambda \cdot (\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

$$\boxed{\frac{\lambda^2 \cdot (\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2 \cdot (1-\rho)} - \frac{1+\rho}{2} \leq N_q \leq \frac{\lambda^2 \cdot (\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

Ιαν. 2014 — ΘΕΜΑ 4

- Αυτόματο μηχάνημα πώλησης αναψυκτικών και καφέ εξυπηρετεί πελάτες.
- Φθάνουν κατά Poisson $\lambda = 2{,}5$ πελ/min
- Το 60% θέλει αναψυκτικό και 40% καφέ.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι 15 sec για αναψυκτικό και 30 sec για καφέ.

1) Μέση τιμή & διασπορά χρόνου εξυπηρέτησης.
2) Μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά (W)

1) M/G/1

x	πιθαν.
15 sec	0,6
30 sec	0,4

$$\Rightarrow \overline{X} = 15 \cdot 0{,}6 + 30 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \boxed{\overline{X} = 21\,sec}$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = (15-\overline{X})^2 \cdot 0{,}6 + (30-\overline{X})^2 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \boxed{Var(x) = 54\,sec^2}$$

2) M/G/1

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = 2{,}5/60 \\ \mu = \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{21} \end{array}} \Bigg\} \; \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{2{,}5}{60}}{\frac{1}{21}} = \frac{21 \cdot 2{,}5}{60} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}88} < 1 \text{ Ευσταθές}$$

$$W = \frac{\lambda \cdot \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma_x^2\right)}{2 \cdot (1-\rho)} = \frac{\frac{2{,}5}{60} \cdot (21^2 + 54)}{2 \cdot 0{,}12} \Rightarrow \boxed{W = 85{,}9384}$$

FMS

Βήματα

1) Φτιάχνω εξισώσεις :

$$\boxed{U_j = \Sigma[P_{ij} \cdot U_i] \qquad \sum_{i=0}^{n}(U_i) = 1}$$

2) $\boxed{X_i = \frac{U_i}{\mu_i}}$

3) $\boxed{G(N) = \Sigma[\Pi(x_i^{n_i})]}$ $\boxed{\Sigma(n_i) = N}$

$\boxed{G(N-1) = \ldots}$

$\boxed{TH = \frac{G(N-1)}{G(N)}}$

4) $\boxed{TH_i = U_i \cdot TH}$

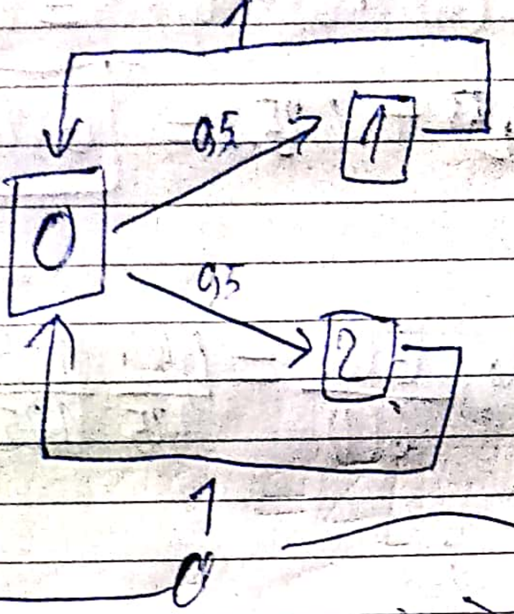
συνολικός ρυθμός
της μηχανής i

Παράδειγμα

$\mu_0 = 1$

$\mu_1 = 0{,}5 \qquad N = 2$

$\mu_2 = 1$



$$\left.\begin{array}{l} U_1 = 0{,}5 \cdot U_0 \\ U_2 = 0{,}5 \cdot U_0 \\ U_0 + U_1 + U_2 = 1 \end{array}\right\} \; 2 \cdot U_0 = 1 \Rightarrow \boxed{U_0 = 0{,}5} \; \left\{\begin{array}{l} \boxed{U_1 = 0{,}25} \\ \boxed{U_2 = 0{,}25} \end{array}\right.$$

$$x_0 = \frac{U_0}{\mu_0} = \frac{0{,}5}{1} \Rightarrow \boxed{x_0 = 0{,}5}$$

$$x_1 = \frac{U_1}{\mu_1} = \frac{0{,}25}{0{,}5} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0{,}5}$$

$$x_2 = \frac{U_2}{\mu_2} = \frac{0{,}25}{1} \Rightarrow \boxed{x_2 = 0{,}25}$$

$$G(2) = \Sigma\left(0{,}5^{n_0} \cdot 0{,}5^{n_1} \cdot 0{,}25^{n_2}\right) = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}25^0 + 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}25^0 +$$
$$+ 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}25^2 + 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}25^0 + 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}25^1 + 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}25^1 = 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}06 + 0{,}25 +$$
$$+ 0{,}25 + 0{,}13 \Rightarrow \boxed{G(2) = 1{,}19}$$

Scanned with CamScanner

$$G(1) = \Sigma\left(0{,}5^{n_0} \cdot 0{,}5^{n_1} \cdot 0{,}25^{n_2}\right) = 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}25^0 + 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}25^0 + 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}25^1 =$$

$$= 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}25 \Rightarrow \boxed{G(1) = 1{,}25}$$

$$TH = \frac{G(2)}{G(1)} = \frac{1{,}19}{1{,}25} \Rightarrow \boxed{TH = 0{,}95}$$

$$TH_0 = U_0 \cdot TH = 0{,}5 \cdot 0{,}95 \Rightarrow \boxed{TH_0 = 0{,}475}$$

$$TH_1 = U_1 \cdot TH = 0{,}25 \cdot 0{,}95 \Rightarrow \boxed{TH_1 = 0{,}238}$$

$$TH_2 = U_2 \cdot TH = 0{,}25 \cdot 0{,}95 \Rightarrow \boxed{TH_2 = 0{,}238}$$

Αιτιοκρατική

M/D/1 $\longrightarrow$ M/G/1

αυτομη-τοποιηθεί

$\bar{x} = x$

$\sigma^2_x = 0$