ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 9 Ιουλίου 2011
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:

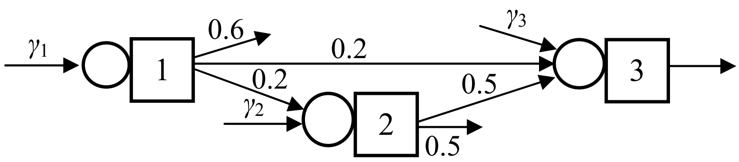
ΘΕΜΑ 1: Εκτιμήστε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης σε ένα σύστημα $M/M/1$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού z.

ΘΕΜΑ 2: Μία βιομηχανική μονάδα ακολουθεί την παρακάτω πολιτική. Η μονάδα παραγωγής λειτουργεί μόνο όταν υπάρχουν παραγγελίες. Όταν το πλήθος των εκκρεμμών παραγγελιών ξεπεράσει τις k χρησιμοποιώντας εποχικό προσωπικό μπορεί να αυξήσει το μέσο ρυθμό παραγωγής κατά 25%, αλλά το μοναδιαίο κόστος παραγωγής c αυξάνεται κατά 50%. Οι παραγγελίες είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ, ενώ τυχαίοι είναι και οι χρόνοι παραγωγής, που είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό μ. Αν b είναι το κόστος αναμονής μιας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου να:

α. Υπολογίστε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος. **(1)**
β. Να βρείτε την συνάρτηση αναμενόμενου κόστους λειτουργίας του συστήματος. **(1)**
γ. Αν $b = 1$, $c = 2$, $\lambda = 10$, $\mu = 10$ και $k = 10$ να υπολογίσετε το μέσο κόστος λειτουργίας του συστήματος. Πως μπορεί να μειωθεί το μέσο κόστος; **(0.5)**

ΘΕΜΑ 3: Μια υπηρεσία στελεχώνεται από τρεις υπαλλήλους οι οποίοι διεκπεραιώνουν όλες τις υποθέσεις. Οι αφίξεις των πολιτών είναι τυχαίες κι ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda = 2.7$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι ίδιος για κάθε υπάλληλο και ίσος με $1/\mu = 1$. Ποιό είναι το μέσο πλήθος πολιτών στην ουρά;

ΘΕΜΑ 4: Για την υπηρεσία του προηγούμενου θέματος εξετάζεται η αναδιοργάνωση σύμφωνα με το σχήμα. Κάθε υπάλληλος θα αναλάβει την διεκπεραίωση συγκεκριμένων εργασιών μετά την ολοκλήρωση ενός προγράμματος εκπαίδευσης. Οι αφίξεις εξακολουθούν να είναι Poisson και γίνονται με ρυθμούς $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ και $\gamma_2 = 0.7$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησεις είναι εκθετικοί αλλά διαφοποποιούνται πλέον για κάθε υπάλληλο αφού κάθε ένας από αυτούς αναλαμβάνει συγκεκριμένες υποθέσεις. Έτσι οι ρυθμοί εξυπηρέτησεις είναι $\mu_1 = 1.25$, $\mu_2 = 1.5$ και $\mu_3 = 2$. Ποιό είναι το μέσο πλήθος πολιτών στην υπηρεσία, που περιμένουν χωρίς να εξυπηρετούνται; Υπάρχει βελτίωση σε σχέση με την προηγούμενη κατάσταση;



Καλή επιτυχία!

Ιούλιος 2011

ΘΕΜΑ 3

M/M/3 $\quad N_q = ;$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 2{,}7 \\ \mu &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \rho = \frac{\lambda}{m\cdot\mu} = \frac{2{,}7}{3} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}9} < 1 \text{ Ευσταθές}$$

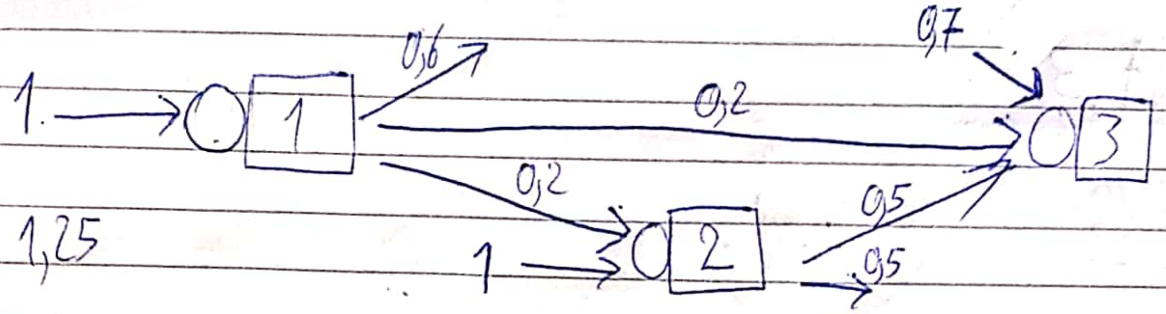
$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m\cdot\rho)^k}{k!} \right] + \frac{(m\cdot\rho)^m}{m!\cdot(1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{2} \left[\frac{(3\cdot 0{,}9)^k}{k!} \right] + \frac{(3\cdot 0{,}9)^3}{3!\cdot(1-0{,}9)} \right\}^{-1}$$

$$\Rightarrow P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{2} \left[\frac{2{,}7^k}{k!} \right] + \frac{2{,}7^3}{6\cdot 0{,}1} \right\}^{-1} = \{1 + 2{,}7 + 3{,}6\}^{-1} = \{7{,}3\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}14}$$

$$N_q = P_0 \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{m!\cdot(1-\rho^2)} = 0{,}14 \cdot \frac{3^3 \cdot 0{,}9^4}{6\cdot(1-0{,}09)} \Rightarrow \boxed{N_q = 4{,}62}$$

ΘΕΜΑ 4



$\mu_1 = 1,25$

$\mu_2 = 1,5$

$\mu_3 = 2$

$\overline{N_q} = ;$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$\lambda_2 = 1 + 0,2 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 1,2}$

$\lambda_3 = 0,7 + 0,2 \cdot \lambda_1 + 0,5 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 1,5}$

Κόμβος 1

M/M/1 $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1 \\ \mu_1 = 1,25\end{array}\right\} \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1}{1,25} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0,8 < 1}$ Ευσταθές

$\overline{N_{q_1}} = \overline{N_1} - \overline{N_{s_1}} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} - \rho_1 = \frac{0,8}{0,2} - 0,8 = 4 - 0,8 \Rightarrow \boxed{\overline{N_{q_1}} = 3,2}$

Κόμβος 2

M/M/1 $\left.\begin{array}{l}\lambda_2 = 1{,}2 \\ \mu_2 = 1{,}5\end{array}\right\}$ $\rho_2 = \frac{1{,}2}{1{,}5} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = 0{,}8} < 1$ Ευσταθές

$$\bar{N}_{q_2} = \bar{N}_2 - \bar{N}_{s_2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} - \rho_2 = \frac{0{,}8}{0{,}2} - 0{,}8 \Rightarrow \boxed{\bar{N}_{q_2} = 3{,}2}$$

Κόμβος 3

M/M/1 $\left.\begin{array}{l}\lambda_3 = 1{,}5 \\ \mu_3 = 2\end{array}\right\}$ $\rho_3 = \frac{1{,}5}{2} \Rightarrow \boxed{\rho_3 = 0{,}75} < 1$ Ευσταθές

$$\bar{N}_{q_3} = \bar{N}_3 - \bar{N}_{s_3} = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} - \rho_3 = \frac{0{,}75}{0{,}25} - 0{,}75 = 3 - 0{,}75 \Rightarrow \boxed{\bar{N}_{q_3} = 2{,}25}$$

$$\bar{N}_q = \bar{N}_{q_1} + \bar{N}_{q_2} + \bar{N}_{q_3} = 3{,}2 + 3{,}2 + 2{,}25 \Rightarrow \boxed{\bar{N}_q = 8{,}65}$$

$$\bar{N}_{q_{\text{ΘΕΜΑ 3}}} < \bar{N}_{q_{\text{ΘΕΜΑ 4}}}$$

Άρα συμφέρει όπως ήταν στο ΘΕΜΑ 3 όλοι μαζί και τους εξυπηρετούσαν όλους.

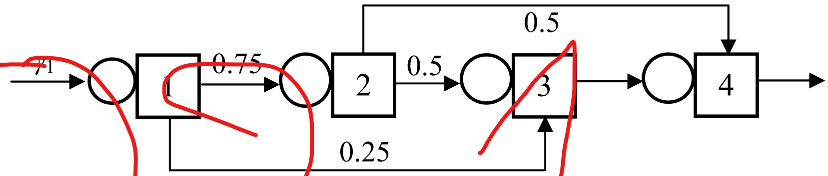
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 8 Νοεμβρίου 2011
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:

ΘΕΜΑ 1: Σε μια απομακρυσμένη συνοικία υπάρχει μια πιάτσα ταξί. Αυτή λειτουργεί περισσότερο ως στάση με την έννοια ότι τα ταξί που περνούν απομακρύνονται αν δεν υπάρχουν πελάτες να περιμένουν. Στην αντίθετη περίπτωση ένα ταξί εξυπηρετεί όλους τους πελάτες που μπορεί. Έτσι αν k είναι το πλήθος των πελατών που περιμένουν στην στάση και n είναι η χωρητικότητα των ταξί, τότε αυτό εξυπηρετεί $m = \min(k, n)$ πελάτες. Οι αφίξεις των πελατών είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ, ενώ τυχαίοι είναι και οι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ταξί, που είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό μ. Αν $\lambda = 3$, $\mu = 4$ και $n = 2$, υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής στη στάση.

ΘΕΜΑ 2: Μία βιομηχανία παράγει ένα προϊόν, που πωλείται σε δύο κατηγορίες πελατών. Η βιομηχανία διαθέτει δύο όμοια παραγωγικά συστήματα και το καθένα από αυτά χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την ικανοποίηση των παραγγελιών μιας κατηγορίας πελατών. Οι παραγγελίες είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ_1 και λ_2 για κάθε κατηγορία πελατών, ενώ τυχαίοι είναι και οι χρόνοι παραγωγής, που είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό μ. Οι υπεύθυνοι της εταιρείας εξετάζουν το ενδεχόμενο να χρησιμοποιήσουν τα δύο παραγωγικά συστήματα από κοινού για την ικανοποίηση του συνόλου των παραγγελιών.
α. Υπολογίστε τους μέσους χρόνους παραμονής στο σύστημα σε κάθε περίπτωση.
β. Αν $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ και $\mu = 4$ ποιά πολιτική ελαχιστοποιεί το χρόνο παραμονής στο σύστημα;

ΘΕΜΑ 3: Ένα εστιατόριο πρόχειρου φαγητού μπορεί να περιγραφεί από το δίκτυο του σχήματος. Ό πρώτος κόμβος είναι τα ταμεία που δέχονται τις παραγγελίες και οι υπόλοιποι κόμβοι εκφράζουν κάποιες από τις βασικές διεργασίες ετοιμασίας γευμάτων. Όλοι οι κόμβοι διαθέτουν έναν εξυπηρετητή με εξαίρεση τον πρώτο κόμβο που διαθέτει δύο. Οι αφίξεις πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson και γίνονται με ρυθμο $\gamma_1 = 4$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησεις είναι εκθετικοί και οι μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησεις είναι $\mu_1 = 2.5$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 3$ και $\mu_4 = 5$.



α. Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στο εστιατόριο;
β. Ποια η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς ένας πελάτης στο εστιατόριο;

ΘΕΜΑ 4: Το προϊόν που παράγεται από μια βιομηχανία απευθύνεται σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες πελατών. Οι παραγγελίες είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ_1, λ_2 και λ_3 για τις αντίστοιχες κατηγορίες πελατών, ενώ τυχαίοι είναι και οι χρόνοι παραγωγής, που είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό μ. Οι πελάτες της $1^{ης}$ κατηγορίας έχουν προτεραιότητα έναντι των άλλων πελατών και οι πελάτες της $2^{ης}$ κατηγορίας έναντι της $3^{ης}$. Όταν το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών n είναι μικρότερο από k γίνονται δεκτές όλες οι παραγγελίες. Στην περίπτωση που οι εκκρεμείς παραγγελίες n είναι $k \le n < 2k$ απορρίπτουμε τις παραγγελίες της $3^{ης}$ κατηγορίας, ενώ όταν $n \ge 2k$ δεχόμαστε μόνο τις παραγγελίες της $1^{ης}$ κατηγορίας.
α. Ποια είναι η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος;
β. Εκτιμήστε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης.
γ. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος παραγγελιών της $2^{ης}$ και $3^{ης}$ κατηγορίας που χάνονται.

Καλή επιτυχία!

Νοεμβρ. 2011

ΘΕΜΑ 1

$E_2/M/1$

$$2\lambda = 3 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1{,}5}$$

$$\boxed{\mu = 4}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}5}{4} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}38} < 1$$

Ευσταθές

$G/G/1$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{n \cdot \lambda} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\sigma_t^2 = 0{,}33}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n \cdot \mu} = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 0{,}13}$$

$$\frac{\lambda \cdot (\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2 \cdot (1-\rho)} - \frac{1+\rho}{2 \cdot \lambda} \leq W \leq \frac{\lambda \cdot (\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2 \cdot (1-\rho)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}5 \cdot 0{,}46}{2 \cdot 0{,}62} - \frac{1{,}38}{3} \leq W \leq \frac{1{,}5 \cdot 0{,}46}{2 \cdot 0{,}62} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}56 - 0{,}46 \leq W \leq 0{,}56 \Rightarrow \boxed{0{,}1 \leq W \leq 0{,}56}$$

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 10 Ιουλίου 2012
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:

ΘΕΜΑ 1: Σ' ένα σούπερ-μάρκετ ο τρόπος εξυπηρέτησης είναι ο ακόλουθος. Μόλις τελειώσουν οι πελάτες τα ψώνια τους προχωρούν προς τα ταμεία. Υπάρχουν δύο ταμεία και οι πελάτες διαλέγουν με τυχαίο τρόπο σε ποιό από τα δύο θα εξυπηρετηθούν. Από τη στιγμή που θα διαλέξουν ταμείο δε μπορούν να αλλάξουν. Το κατάστημα καθώς και ο χώρος που περιμένουν οι πελάτες είναι τόσο μεγάλοι που να θεωρούνται πρακτικά άπειρης χωρητικότητας. Οι πελάτες φθάνουν με κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 40/ώρα και κάθε πελάτης δαπανά περίπου 3/4 ώρες κατά μέσον όρο για να ψωνίσει. Οι χρόνοι αγοράς είναι περίπου εκθετικοί. Οι χρόνοι στα ταμεία είναι επίσης περίπου εκθετικοί με μέση τιμή 2 λεπτά ανεξάρτητα από ταμείο. Η διοίκηση του σούπερ-μάρκετ θέλει να ξέρει:

α. Το μέσο χρόνο αναμονής στα ταμεία. **(1)**
β. Το μέσο πλήθος πελατών στο σούπερ-μάρκετ. **(1)**
γ. Αν εννοποιηθούν οι ουρές αναμονής των δύο ταμείων θα βελτιωθεί ο μέσος χρόνος αναμονής; **(1)**

ΘΕΜΑ 2: Σε μία βιομηχανική μονάδα που αποτελείται από δύο τμήματα υπάρχει ένα όχημα μεταφοράς των προϊόντων από το πρώτο τμήμα στο δεύτερο. Η μεταφορά των προϊόντων αρχίζει μόνο όταν το όχημα γεμίσει. Τα προϊόντα φτάνουν στο χώρο φόρτωσης σε χρόνους που είναι τυχαίοι κια εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό $\lambda = 4$. Οι χρόνοι μεταφοράς είναι επίσης εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό $\mu = 2.5$. Η χωρητικότητα του χώρου φόρτωσης είναι πρακτικά άπειρη. Αν η χωρητικότητα του οχήματος είναι $n = 2$, να βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης των φορτίων (κάθε φορτίο αποτελείται από δύο προϊόντα). **(2.5)**

ΘΕΜΑ 3: Σε μια τράπεζα ακολουθείται η ακόλουθη πολιτική. Κάθε 5 πελάτες που προστίθενται στο σύστημα ανοίγει ένα επιπλέον ταμείο, ενώ ο μέγιστος αριθμός ταμείων είναι τρία. Δηλαδή αν υπάρχουν μέχρι τέσσερις πελάτες στην τράπεζα λειτουργεί ένα ταμείο, αν οι πελάτες είναι μέχρι εννέα λειτουργούν δύο ταμεία, ενώ όταν οι πελάτες είναι περισσότεροι από εννέα λειτουργούν και τα τρία ταμεία. Οι χρόνοι άφιξης των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με ρυθμό $\mu = 5$. Η χωρητικότητα της τράπεζας είναι πρακτικά άπειρη.

α. Υπολογίστε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος. **(1)**
β. Ποιό είναι το μέσο πλήθος υπαλλήλων που απασχολούνται στα ταμεία; **(1)**
γ. Ποιό είναι το ποσοστό του χρόνου που λειτουργούν και τα τρία ταμεία; **(0.5)**

ΘΕΜΑ 4: Σε ένα σύστημα παραγωγής οι χρόνοι παραγωγής είναι τυχαίοι και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή U(0.25, 0.75). Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda = 1.5$.

α. Υπολογίστε το μέσο πλήθος εκκρεμμών παραγγελιών και το μέσο χρόνο ολοκλήρωσης μια παραγγελίας. **(1)**
β. Αν το σύστημα αντικατασταθεί από ένα νέο, στο οποίο οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανεμημένοι, ποιός πρέπει να είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής του νέου συστήματος, ώστε να έχει νόημα η αντικατάσταση; **(1)**

Καλή επιτυχία!

Ιουν 2012

ΘΕΜΑ 1

$\lambda_{supmark} = 40$ πελ/ώρα

$\overline{X}_{supmark} = 0,75$ ώρες

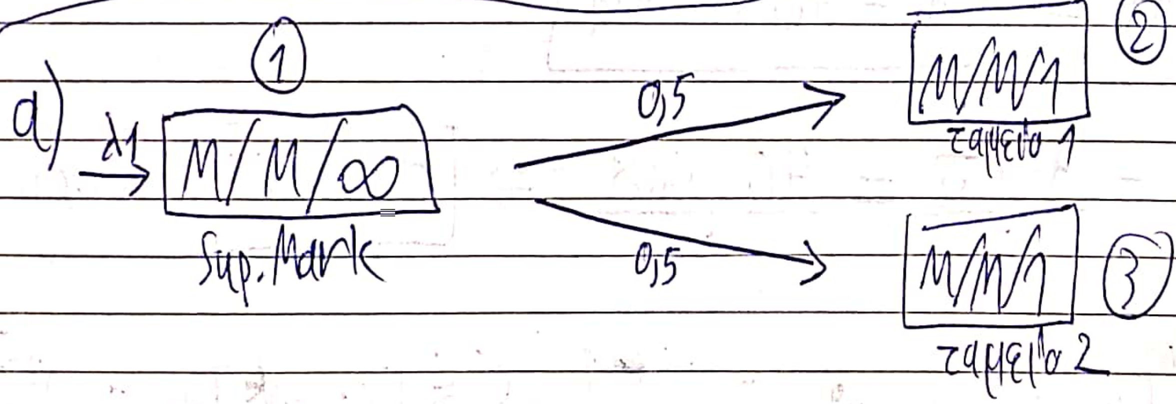
$\overline{X}_{ταμ} = \frac{2}{60} = 0,03$ ώρες

α) $\overline{W}_{ταμείο}$

β) $\overline{N}_{sup.mark.}$

γ) Θα είναι καλύτερα αν ενοποιηθούν οι ουρές;

α)



$\lambda_2=\lambda_3 = 0,5\cdot\lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=\lambda_3=20 \text{ πελ/ώρα}}$

$\rho_2=\rho_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \lambda_2\cdot\overline{X}_2 \Rightarrow \boxed{\rho_2=\rho_3=0,6} <1$ Ευσταθές

$$\overline{N_{q_2}} = \overline{N} - \overline{N_s} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} - \rho_2 = \frac{\overset{3,5}{0,6}}{0,4} - 0,4 \Rightarrow \boxed{\overline{N_{q_2}} = 0,9}$$

$$W_2 = W_3 = \frac{\overline{N_{q_2}}}{\lambda_2} = \frac{0,9}{20} \Rightarrow \boxed{W_2 = W_3 = 0,045 \text{ ώρες}}$$

β) $\overline{N_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \lambda_1 \cdot \overline{X_1} = 40 \cdot 0,75 \Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 30 \text{ πελάτες}}$

γ) λ_1 M/M/∞ $\xrightarrow{\lambda_2}$ M/M/2

Super Market — Ταμεία

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 40 \text{ πελ/ώρα}}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{2 \cdot \mu_2} = \frac{\lambda_2 \cdot \overline{X_2}}{2} = \frac{40 \cdot 0,03}{2} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = 0,03 \text{ πελ/ώρα}}$$

$$P_{0(2)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho)^k}{k!} \right] + \frac{(m \cdot \rho)^m}{m!\,(1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{(0,06)^k}{k!} \right] + \frac{(0,06)^2}{2 \cdot 0,97} \right\}^{-1}$$

$$P_{0(2)} = \{1 + 0,06 + 0,002\}^{-1} = \{1,062\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(2)} = 0,94}$$

$$\overline{N_{q(2)}} = P_0 \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{m!\,(1-\rho^2)} = 0,94 \cdot \frac{2^2 \cdot 0,03^3}{2 \cdot 0,91} \Rightarrow \boxed{\overline{N_q} = 0,00006}$$

$$W = \frac{\overline{N_{q(2)}}}{\lambda_2} = \frac{0,00006}{40} \Rightarrow \boxed{W = 1,5 \cdot 10^{-6}}$$

$W_{\text{α' ερωτ.}} > W_{\text{γ' ερωτ}}$

! ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΟΥΡΕΣ

Scanned with CamScanner

ΘΕΜΑ 2

$E_2/M/1$

πελάτες → φορτία
βαθμίδες → προϊόντα

$2\lambda = 4 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

$\boxed{\mu = 2{,}5}$

- Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης φορτίων (P_1, P_2)

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{2{,}5} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}8} < 1$ Ενσταθές

$2\rho \cdot z^3 - z^2(1+2\rho) + 1 = 0 \Rightarrow 2\rho z^3 - z^2 - 2\rho z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\rho z^2(z-1) - (z^2 - 1^2) = 0 \Rightarrow \underbrace{\cancel{(z-1)}}_{z_0 > 1} \cdot (2\rho z^2 - z - 1) = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot \rho \cdot z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{1{,}6 \cdot z^2 - z - 1 = 0}$

$\Delta = 1 + 6{,}4 = 7{,}4 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm 2{,}72}{3{,}2}$ → $\boxed{z_1 = 1{,}16} > 1$ ΔΕΚΤΗ

→ $z_2 = -0{,}54 < 1$ Απορρίπτεται

$\Rightarrow \boxed{z_0 = 1{,}16}$

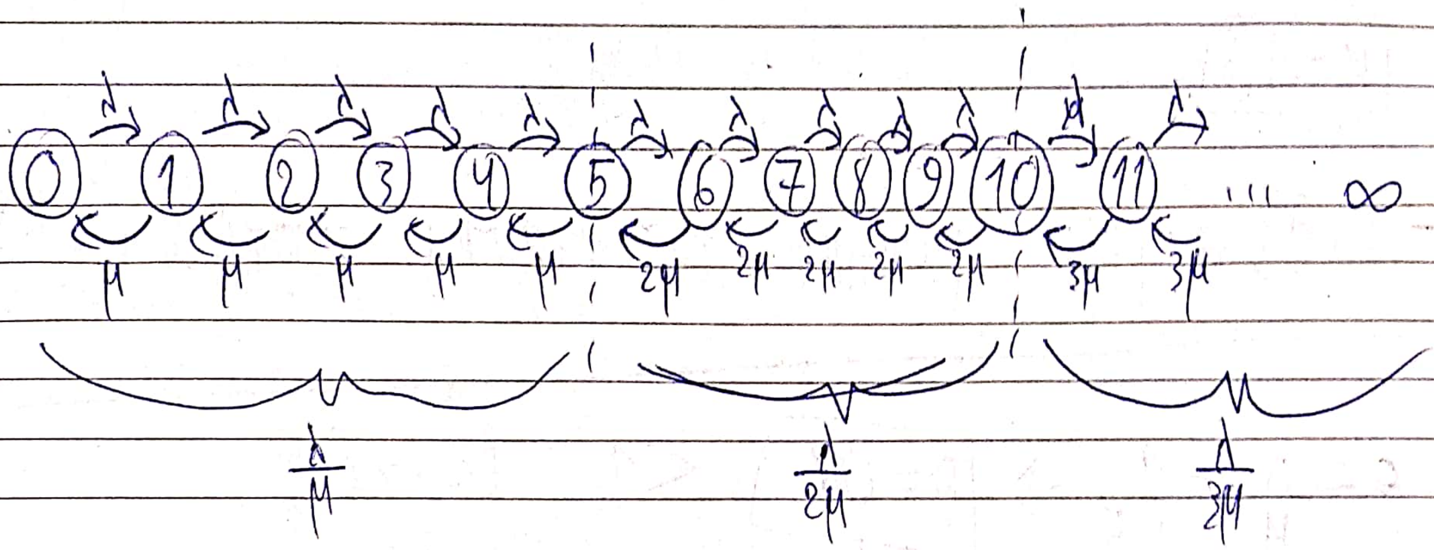
$P_1 = \frac{\rho \cdot (z_0^2 - 1)}{z_0^2} = \frac{0{,}8 \cdot (1{,}16^2 - 1)}{1{,}16^2} \Rightarrow \boxed{P_1 = 0{,}21}$

$P_2 = \frac{\rho \cdot (z_0^2 - 1)}{z_0^4} = \frac{0{,}8 \cdot (1{,}16^2 - 1)}{1{,}16^4} \Rightarrow \boxed{P_2 = 0{,}15}$

ΘΕΜΑ 3

$\lambda = 10$ πελ/ώρα

$\mu = 5$ πελ/ώρα



Για ευσταθεια εξετάζω κλάσμα κοντά στο άπειρο

$\boxed{\frac{\lambda}{3\mu} = \frac{10}{15} = 0,67} < 1$ Ευσταθές

$$P_n = \begin{cases} P_0 \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & n \leq 5 \\ P_0 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{2\mu}\right)^{n-5} & 5 \leq n \leq 10 \\ P_0 \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{2\mu}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{3\mu}\right)^{n-10} & n \geq 10 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_n) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{5} (P_n) + \sum_{n=6}^{10} (P_n) + \sum_{n=11}^{\infty} (P_n) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{5} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{-5} \cdot \sum_{n=6}^{10} \left[\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^5 \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{-10} \sum_{n=11}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^n\right] \right] = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \left[\sum_{n=0}^{5} (2^n) + 2^5 \cdot 1^{-5} \cdot \sum_{n=6}^{10} \left[1^n\right] + 2^5 \cdot 1^5 \cdot 1{,}5^{-10} \cdot \frac{0{,}67^{11}}{1-0{,}67} \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow P_0 = \left[1+2+4+8+16+32 + 32 \cdot 1 \cdot (1+1+1+1+1) + \frac{32 \cdot 1}{57{,}67} \cdot 0{,}04\right]^{-1} =$$

$$\Rightarrow P_0 = \left[63 + 160 + 0{,}022\right]^{-1} = \left[223{,}022\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}0045}$$

β) $P(1\ \text{υπαλλ}) = \sum_{n=0}^{5}(P_n) = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{5}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow P(1\ \text{υπαλλ}) = 0{,}0045 \cdot \sum_{n=0}^{5}(2^n) = 0{,}0045 \cdot (1+2+4+8+16+32) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(1\ \text{υπαλλ}) = 0{,}0045 \cdot 63 \Rightarrow \boxed{P(1\ \text{υπαλλ}) = 0{,}28}$

$P(2\ \text{υπαλλ}) = \sum_{n=6}^{10}(P_n) = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{-5} \cdot \sum_{n=6}^{10}\left[\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2\ \text{υπαλλ}) = 0{,}0045 \cdot 2^5 \cdot 1^{-5} \cdot (1+1+1+1+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2\ \text{υπαλλ}) = 0{,}0045 \cdot 32 \cdot 1 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{P(2\ \text{υπαλλ}) = 0{,}72}$

$P(1\ \text{υπαλλ}) + P(2\ \text{υπαλλ}) + P(3\ \text{υπαλλ}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(3\ \text{υπαλλ}) = 1 - 0{,}28 - 0{,}72 \Rightarrow \boxed{P(3\ \text{υπαλλ}) = 0}$

Άρα δουλεύουν 2 υπάλληλοι κατά μέσο όρο.

γ) ΠΟΤΕ!!! $P(3\ \text{υπαλλ}) = 0$

ΘΕΜΑ 4

Αφίξ. : $\lambda = 1{,}5$, Poisson
Εξυπηρ: $U(0{,}25\ ,\ 0{,}75)$
$\Bigg\}$ M/G/1

α) $\bar{N}$, T

β) M/M/1 $\mu = ;$ για να αξίζει

α) $\mu = \dfrac{1}{E(X)} = \dfrac{2}{a+b} = \dfrac{2}{0{,}75+0{,}25} \Rightarrow \boxed{\mu = 2}$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1{,}5}{2} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}75}$

$Var = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{0{,}5^2}{12} \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 0{,}02}$

$\bar{N} = \rho + \dfrac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot (1-\rho)} = 0{,}75 + \dfrac{0{,}75^2 + 1{,}5^2 \cdot 0{,}02}{2 \cdot 0{,}25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 1{,}97}$

$T = \dfrac{\bar{N}}{\lambda} = \dfrac{1{,}97}{1{,}5} \Rightarrow \boxed{T = 1{,}31}$

β)

$$N_{\varepsilon\rho\omega\tau.\alpha'} > N_{\varepsilon\rho\omega\tau.\beta'} \Rightarrow 1,97 > \frac{\rho}{1-\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,97 > \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \Rightarrow 1,97 > \frac{\frac{\lambda}{\cancel{\mu}}}{\frac{\mu-\lambda}{\cancel{\mu}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,97 > \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \Rightarrow 1,97 > \frac{1,5}{\mu-1,5} \Rightarrow \mu - 1,5 > \frac{1,5}{1,97} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu > 1,5 + 0,76 \Rightarrow \boxed{\mu > 2,26}$$

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: Αύγουστος 2012
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:

ΘΕΜΑ 1: Σε ένα μικρό κατάστημα εργάζεται ένας υπάλληλος που εξυπηρετεί μόνος του όλους τους πελάτες. Το κατάστημα είναι μικρό και χωράει μόλις 5 πελάτες. Ένας πελάτης που βρίσκει το κατάστημα πλήρες φεύγει χωρίς να εξυπηρετηθεί. Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 100$ την ημέρα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι και ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu = 80$ πελάτες την ημέρα. Ο ιδιοκτήτης θέλει να αυξήσει τις πωλήσεις του καταστήματος και εξετάζει δύο σενάρια. Η πρώτη επιλογή είναι να προσλάβει έναν ακόμη υπάλληλο. Σε αυτή την περίπτωση θα αυξηθεί το λειτουργικό κόστος κατά 60 € την ημέρα. Εναλλακτικά θα μπορούσε να ενοικιάσει το διπλανό κατάστημα και με αυτό τον τρόπο θα διπλασιαζόταν η χωρητικότητα του καταστήματος. Το ενοίκιο του νέου χώρου είναι 20 € την ημέρα. Το όφελος από την εξυπηρέτηση ενός πελάτη είναι 5 €.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος πελατών στο κατάστημα και τα έσοδα από πωλήσεις στην αρχική κατάσταση λειτουργίας.
β. Πόσο αυξάνει η κερδοφορία του καταστήματος για κάθε μία από τις υπάρχουσες επιλογές και ποια είναι η καλύτερη;

ΘΕΜΑ 2: Η παραγωγή ενός προϊόντος γίνεται σε τέσσερις φάσεις. Η διάρκεια κάθε φάσης είναι εκθετική με ρυθμό $4\mu_1 = 8$. Για την έναρξη της παραγωγής ενός προϊόντος πρέπει να έχει ολοκληρωθεί η τελευταία φάση του προηγούμενου. Οι αφίξεις των παραγγελιών είναι επίσης τυχαίες με ρυθμό $\lambda = 1.75$ και ακολουθούν την κατανομή Poisson. Μελετάται το ενδεχόμενο αναδιάρθρωσης της παραγωγικής διαδικασίας, έτσι ώστε η διαδικασία παραγωγής να ολοκληρώνεται σε πέντε εκθετικές φάσεις με ρυθμό $5\mu_2$.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος εκκρεμμών παραγγελιών πριν την αναδιάρθρωση της παραγωγικής διαδικασίας.
β. Ποιά πρέπει να είναι η τιμή του μ_2, έτσι ώστε να μην αυξηθεί το μέσο πλήθος εκκρεμμών παραγγελιών μετά την αναδιάρθρωση;

ΘΕΜΑ 3: Ένα μικρό επαρχιακό βενζινάδικο διαθέτει μια αντλία. Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 20$ ανά ώρα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι και ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu = 15$ πελάτες ανά ώρα. Ένα τμήμα των εισερχόμενων οδηγών αποθαρρύνεται από το πλήθος των εξυπηρετούμενων πελατών, με αποτέλεσμα να φεύγουν από το πρατήριο χωρίς να περιμένουν. Ο πραγματικός ρυθμός άφιξης πελατών που είναι διατεθειμένοι να περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν είναι συνάρτηση του πλήθους των εξυπηρετούμενων πελατών και ίσος με $\lambda_n = \lambda/(n + 1)$.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος πελατών στο βενζινάδικο.
β. Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο πελάτες στο βενζινάδικο;
γ. Ποιός είναι ο πραγματικός μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης ανά ώρα;

ΘΕΜΑ 4: Ένα βενζινάδικο αποτελείται από τρία τμήματα. Το πρώτο είναι το τμήμα ανεφοδιασμού βενζίνης, που αποτελείται από δύο αντλίες. Το δεύτερο είναι ένα μικρό συνεργείο, που εκτελούνται απλές εργασίες, όπως αλλαγή λαδιών και έχει ένα σταθμό εξυπηρέτησης. Ακόμη υπάρχει και ένα πλυντήριο αυτοκινήτων με δύο σταθμούς εξυπηρέτησης. Οι αφίξεις των πελατών είναι τυχαίες ακολουθούν την κατανομή Poisson και οι μέσοι ρυθμοί τους είναι $\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 5$ και $\gamma_3 = 5$ για τα τρία τμήματα του βενζινάδικου. Το 25% των πελατών που φεύγουν από το τμήμα ανεφοδιασμού βενζίνης προωθούνται προς το συνεργείο, ενώ ένα άλλο 25% προωθείται προς το πλυντήριο. Το 50% των πελατών που φεύγουν από το συνεργείο πηγαίνουν στο πλυντήριο. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί και στα τρία τμήματα με ρυθμούς $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 12$ και $\mu_3 = 10$, αντίστοιχα.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα;
β. Ποια η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο βενζινάδικο;

Καλή επιτυχία!

Αυγ 2012

ΘΕΜΑ 1

M/M/1/5 $\lambda = 100$, $\mu = 80$

α) $\bar{N}$ και κέρδος

β) κέρδος/σενάριο

1ο Σενάριο : M/M/2/5 + 60€

2ο Σενάριο : M/M/1/10 + 20€

Κέρδος από κάθε πελάτη + 5€

α) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{80} \Rightarrow \boxed{\rho = 1{,}25} > 1$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

$$\sum_{n=0}^{K}(P_n) = 1 \Rightarrow P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1-1{,}2}{1-1{,}2^6} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}1}$$

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{K}(n \cdot P_n) = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K}\left[n \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 0{,}1 \cdot \sum_{n=0}^{5}\left[n \cdot 1{,}2^n\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{N} = 0{,}1 \cdot (0 + 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}2^2 + 3 \cdot 1{,}2^3 + 4 \cdot 1{,}2^4 + 5 \cdot 1{,}2^5)$$

$$\Rightarrow \bar{N} = 0{,}1 \cdot (1{,}2 + 2{,}88 + 5{,}18 + 8{,}29 + 12{,}44) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 3}$$

Κέρδος $= 5 \cdot \bar{N} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Κέρδος} = 15€}$

β) Σενάριο 1 (M/M/2/5) +60€

$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{100}{160} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}63} < 1$ Ευσταθές

$\sum_{n=0}^{K}(P_n) = 1 \Rightarrow P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K}\left[\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n\right] = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1-0{,}63}{1-0{,}63^6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}39}$

$\bar{N} = \sum_{n=0}^{K}(n \cdot P_n) = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K}\left[n \cdot \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n\right] = 0{,}39 \cdot \sum_{n=0}^{5}\left[n \cdot 0{,}63^n\right] =$

$\Rightarrow \bar{N} = 0{,}39 \cdot (0 + 0{,}63 + 2 \cdot 0{,}63^2 + 3 \cdot 0{,}63^3 + 4 \cdot 0{,}63^4 + 5 \cdot 0{,}63^5)$

$\bar{N} = 0{,}39 \cdot (0{,}63 + 0{,}79 + 0{,}75 + 0{,}63 + 0{,}5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 1{,}29}$

Κέρδος_1 $= \bar{N} \cdot 5 - 60 = 6{,}45 - 60 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Κέρδος\_1} = -53{,}55\ €}$

Σενάριο 2 (M/M/1/10) +20€

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \boxed{\rho = 1,25} > 1$ Δεν είναι ευσταθές.

$\sum_{n=0}^{K} (P_n) = 1 \Rightarrow P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1-1,25}{1-1,25^{6}} \xrightarrow{-0,25} \boxed{P_0 = 0,09}$

$\bar{N} = \sum_{n=0}^{K} (n \cdot P_n) = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{K} \left[n \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] = 0,09 \cdot \sum_{n=0}^{10} \left[n \cdot 1,25^n \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{N} = 0,09 \cdot (0 + 1,25 + 2 \cdot 1,25^2 + 3 \cdot 1,25^3 + 4 \cdot 1,25^4 + 5 \cdot 1,25^5 +$
$+ 6 \cdot 1,25^6 + 7 \cdot 1,25^7 + 8 \cdot 1,25^8 + 9 \cdot 1,25^9 + 10 \cdot 1,25^{10}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{N} = 0,09 \cdot (1,25 + 3,125 + 5,86 + 9,77 + 15,26 +$
$+ 22,89 + 33,38 + 47,68 + 67 + 93) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 26,93}$

Κέρδος_2 $= \bar{N} \cdot 5 - 20 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Κέρδος\_2} = 114,65€}$

Κέρδος_2 > Κέρδος_1 ⇒ Το καλύτερο είναι το 2ο Σενάριο.

ΘΕΜΑ 2

$M/E_4/1$

$\boxed{\lambda = 1{,}75}$

$4\mu = 8 \Rightarrow \boxed{\mu = 2}$

α) $\overline{N} = ;$ $M/E_4/1$

β) $\mu_2 = ;$ $M/E_5/1$ με ίδιο $\overline{N}$

α) $M/E_4/1 \rightarrow M/G/1$ για εύρεση του $\overline{N}$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}75}{2} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}88} < 1$ Ευσταθές

$\sigma_x^2 = \frac{1}{\eta \cdot \mu^2} = \frac{1}{4 \cdot 4} \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 0{,}06}$

$$\overline{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot (1-\rho)} = 0{,}88 + \frac{0{,}88^2 + 1{,}75^2 \cdot 0{,}06^2}{2 \cdot 0{,}12} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\overline{N} = 1{,}7}$

Scanned with CamScanner

β) Για M/E4/1 και M/E5/1 τα προσδιορίζω με M/G/1 για τα $\overline{N}$.

$\overline{N}_{ερωτ.α'} = \overline{N}_{ερωτ.β'} \Rightarrow \cancel{\rho} + \cancel{\frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_{X(1)}^2}{2(1-\rho)}} = \cancel{\rho} + \cancel{\frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_{X(2)}^2}{2(1-\rho)}}$

$\Rightarrow \sigma_{X(1)}^2 = \sigma_{X(2)}^2 \Rightarrow 0{,}06 = \frac{1}{5 \cdot \mu_2^2} \Rightarrow \mu_2^2 = \frac{1}{0{,}3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\mu_2 = 1{,}82}$

ΘΕΜΑ 3

Αφίξεις με αποθάρρυνση.

$\boxed{\lambda = 20 \text{ πελ/ώρα}}$

$\boxed{\mu = 15 \text{ πελ/ώρα}}$

α) $\bar{N} = ;$

β) $P(\bar{N} \geq 2) = 1 - P_0 - P_1 = ;$

γ) $\bar{\mu} = \mu \cdot (1 - P_0) = ;$

α) $\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{15} \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 1{,}33}$

β) $P_0 = e^{-\lambda/\mu} = e^{-1{,}33} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}26}$

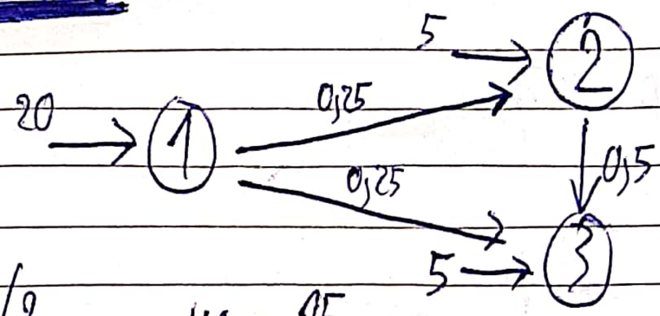
$P_1 = \frac{P_0}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 = 0{,}26 \cdot \frac{20}{15} \Rightarrow \boxed{P_1 = 0{,}35}$

$P(\bar{N} \geq 2) = 1 - P_0 - P_1 = 1 - 0{,}26 - 0{,}35 \Rightarrow \boxed{P(\bar{N} \geq 2) = 0{,}39}$

γ) $\bar{\mu} = \mu \cdot (1 - P_0) = 15 \cdot (1 - 0{,}26) = 15 \cdot 0{,}74 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{\mu} = 11{,}1}$

ΘΕΜΑ 4



1: M/M/2 , $\mu_1 = 15$

2: M/M/1 , $\mu_2 = 12$

3: M/M/2 , $\mu_3 = 10$

α) $\overline{N} = ;$

β) $P_0 = ;$

$$\boxed{\lambda_1 = 20}$$

$$\lambda_2 = 5 + \overset{5}{0{,}25\cdot\lambda_1} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 10}$$

$$\lambda_3 = 5 + \underset{5}{0{,}25\cdot\lambda_1} + \underset{5}{0{,}5\cdot\lambda_2} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 15}$$

Κόμβος 1

M/M/2

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2 \cdot \mu_1} = \frac{20}{30} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0{,}67}$$

$$\overline{N_{s_1}} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{20}{15} \Rightarrow \boxed{\overline{N_{s_1}} = 1{,}33}$$

$$P_{0_1} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho)^k}{k!} \right] + \frac{(m \cdot \rho)^m}{m!\,(1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{(1{,}33)^k}{k!} + \frac{1{,}33^2}{2 \cdot 0{,}33} \right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{0_1} = \left\{ 1 + 1{,}33 + 2{,}68 \right\}^{-1} = \left\{ 5{,}01 \right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0_1} = 0{,}2}$$

$$\overline{N_{q_1}} = P_{0_1} \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{m! \cdot (1-\rho^2)} = 0{,}2 \cdot \frac{\cancel{2}^{2} \cdot 0{,}67^3}{\cancel{2} \cdot (1-0{,}67^2)} \Rightarrow \boxed{\overline{N_{q_1}} = 0{,}11}$$

$$\overline{N_1} = \overline{N_{s_1}} + \overline{N_{q_1}} \Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 1{,}44}$$

Κόμβος 2 M/M/1

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{10}{12} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = 0{,}83}$$

$$\overline{N_2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0{,}83}{0{,}17} \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 4{,}88}$$

Κόμβος 3

M/M/2

$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{2 \cdot \mu_3} = \frac{15}{20} \Rightarrow \boxed{\rho_3 = 0,75} < 1$ Ευσταθές

$\overline{N}_{s3} = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{15}{10} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_{s3} = 1,5}$

$P_{0_3} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho_3)^k}{k!} \right] + \frac{(m \cdot \rho)^m}{m! \cdot (1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{(1,5)^k}{k!} \right] + \frac{1,5^2}{2 \cdot 0,25} \right\}^{-1}$

$\Rightarrow P_{0_3} = \left\{ 1 + 1,5 + 4,5 \right\}^{-1} = \left\{ 7 \right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0_3} = 0,14}$

$\overline{N}_{q_3} = P_{0_3} \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{m! \cdot (1-\rho^2)} = 0,14 \cdot \frac{2^2 \cdot 0,75^3}{2 \cdot (1-0,75^2)} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_{q_3} = 0,27}$

$\overline{N}_3 = \overline{N}_{q_3} + \overline{N}_{s3} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_3 = 1,77}$

$\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 = 1,44 + 4,88 + 1,77 \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 8,09}$

β) $P_0 = P_{0(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{0(3)} = 0,2 \cdot (1-\rho_2) \cdot 0,14 = 0,2 \cdot 0,17 \cdot 0,14 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P_0 = 0,00476}$

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 20 Ιουνίου 2013
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:

ΘΕΜΑ 1: Ένα μικρό επαρχιακό νοσοκομείο διαθέτει 10 κλίνες. Οι αφίξεις των ασθενών είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 2 την ημέρα. Η μέση διάρκεια νοσηλείας είναι 5 ημέρες και οι χρόνοι νοσηλείας είναι επίσης τυχαίοι και ακολουθούν την εκθετική κατανομή.
α. Βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης.
β. Ποιο είναι το μέσο πλήθος ασθενών που νοσηλεύονται;
γ. Ποιο είναι το μέσο πλήθος ασθενών που αναγκάζονται να νοσηλευθούν σε άλλο νοσοκομείο και το μέσο πλήθος ασθενών που παίρνουν εξιτήριο κάθε ημέρα;

ΘΕΜΑ 2: Μια βιομηχανική επιχείρηση παράγει ένα προϊόν, που παράγεται σε τυχαίους χρόνους, οι οποίοι είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό $\mu = 10$. Το τμήμα πωλήσεων έχει οδηγηθεί στο συμπέρασμα ότι οι παραγγελίες είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, η οποία είναι συνάρτηση της τιμής πώλησης r. Πιο συγκεκριμένα έχει καταλήξει στο συμπέρασμα ότι $\lambda = ae^{-br}$, όπου $a = 19.8$, $b = 0.1$. Η πολιτική που ακολουθείται από την επιχείρηση είναι η ακόλουθη. Όταν το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών είναι μικρότερο από 10 η τιμή πωλησης είναι $r_1 = 5$, ενώ όταν οι εκκρεμείς παραγγελίες γίνουν ίσες ή περισσότερες από 10 η τιμή πώλησης γίνεται $r_2 = 9.06$.
α. Εκτιμήστε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος.
β. Ποιο είναι το μέσο πλήθος εκκρεμμών παραγγελιών;
γ. Εκτιμήστε τα αναμενόμενα έσοδα από την εφαρμοζόμενη πολιτική.

ΘΕΜΑ 3: Σε ένα σύστημα παραγωγής οι χρόνοι παραγωγής είναι τυχαίοι και ακολουθούν την κατανομή Erlang 5, με μέση τιμή $1/\mu = 1$. Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda = 0.75$.
α. Υπολογίστε το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών και το μέσο χρόνο ολοκλήρωσης μια παραγγελίας.
β. Αν το σύστημα αντικατασταθεί από ένα νέο, στο οποίο οι χρόνοι ολοκλήρωσης των δύο πρώτων σταδίων είναι αιτιοκρατικοί πως διαμορφώνεται το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών και ο μέσο χρόνο ολοκλήρωσης μια παραγγελίας, δοθέντος ότι δεν αλλάζει ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης;
γ. Έστω ότι μετά την αντικατάσταση, έχουμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε το ρυθμό ολοκλήρωσης των τριών τελευταίων σταδίων, διατηρώντας όμως σταθερό τον συνολικό μέσο χρόνο εξυπηρέτησης. Πως πρέπει να μεταβληθεί ο ρυθμός του τρίτου σταδίου έτσι ώστε να βελτιωθεί η απόδοση του συστήματος;

ΘΕΜΑ 5: Μια γραμμή παραγωγής αποτελείται από τέσσερις σταθμούς παραγωγής σε σειρά. Στον δεύτερο και τέταρτο σταθμό εργασίας μετά την ολοκλήρωση της επεξεργασίας πραγματοποιείται ποιοτικός έλεγχος των προϊόντων και αν ένα προϊόν είναι ελαττωματικό προωθείται για επανεπεξεργασία στον πρώτο και στον τρίτο σταθμό παραγωγής αντίστοιχα. Οι πιθανότητες επανεπεξεργασίας είναι $p_2 = p_4 = 0.1$. Ο πρώτος σταθμός εργασίας αποτελείται από δύο όμοιες μηχανές που λειτουργούν παράλληλα, ενώ οι άλλοι σταθμοί αποτελούνται από μια μηχανή. Οι αφίξεις των πελατών είναι τυχαίες ακολουθούν την κατανομή Poisson και ο μέσος ρυθμός τους είναι $\gamma_1 = 18$ Οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικοί με ρυθμούς $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 25$, $\mu_3 = \mu_4 = 30$. Οι χωρητικότητες των ενδιαμέσων αποθηκευτικών χώρων θεωρούνται άπειρες.
α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών.
β. Έστω ότι ο ποιοτικός έλεγχος γίνεται στον τελευταίο σταθμό παραγωγής, η πιθανότητα επανεπεξεργασίας είναι $p_4 = 0.2$ και ένα ελαττωματικό προϊόν προωθείται στον πρώτο σταθμό. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών.

Καλή επιτυχία!

Ιουν 2013

ΘΕΜΑ 1

M/M/10/10

$\boxed{\lambda = 2 \text{ αφ/day}}$

$\bar{X} = 5$ ημέρες $\Rightarrow \mu = \frac{1}{\bar{X}} \Rightarrow \boxed{\mu = 0{,}2 \text{ αφ/day}}$

α) $P_0 = ;$

β) $\bar{N} = ;$

γ) Απορριπταίοι $= ;$ και $\bar{\gamma} = ;$

α) $P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{m} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{n=0}^{10} \left[10^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \right\}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = \left\{ 1 + 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \frac{10.000}{24} + \frac{100.000}{120} + \right.$

$+ \frac{1.000.000}{720} + \frac{10.000.000}{5.040} + \frac{100.000.000}{40.320} + \frac{1.000.000.000}{362.880} +$

$\left. + \frac{10.000.000.000}{3.628.800} \right\}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = \{ 1 + 10 + 50 + 166{,}67 + 416{,}67 + 833{,}33 + 1.388{,}89 +$

$+ 1.984{,}13 + 2.480{,}46 + 2.755{,}73 + 2.755{,}73 \}^{-1} \Rightarrow$

$P_0 = \{12.842,31\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0,0000078}$

β) $P_{10} = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} \cdot \frac{1}{10!} = 0,000078 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{10!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P_{10} = 0,21}$

$\overline{N} = \overline{\lambda} \cdot \overline{X} = \frac{\lambda \cdot (1 - P_{10})}{\mu} = 10 \cdot 0,79 \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 7,9}$

γ) $Rej = \lambda \cdot P_{10} \Rightarrow \boxed{Rej = 0,24}$

$\overline{\mu} = \overline{\lambda} = \lambda \cdot (1 - P_{10}) = 2 \cdot 0,79 \Rightarrow \boxed{\overline{\mu} = 1,58}$

ΘΕΜΑ 2

$\boxed{\mu = 10}$

$$\lambda = \begin{cases} 19{,}8 \cdot e^{-0{,}5} = 12 & n \leq 10 \\ 19{,}8 \cdot e^{-0{,}906} = 8 & n \geq 10 \end{cases}$$

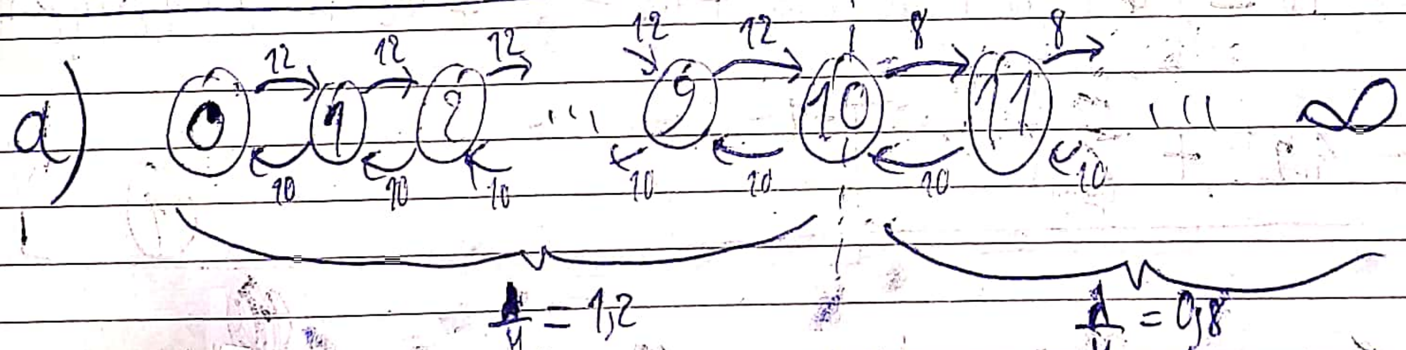
α) $P_0 = ;$

β) $\bar{N} = ;$

γ) Κέρδος $= ;$

$$\text{Κέρδος} = r = \begin{cases} 5 & n \leq 10 \\ 9{,}06 & n \geq 10 \end{cases}$$

α)



Για ευστάθεια εξετάζω το κλάσμα κατά στο άπειρο

$\boxed{\frac{\lambda}{\mu} = 0{,}8}$ < 1 Ευσταθές

$$P_n = \begin{cases} P_0 \cdot 1{,}2^n & n \leq 10 \\ P_0 \cdot 1{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{n-10} & n \geq 10 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(P_n) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{10}(P_n) + \sum_{n=11}^{\infty}(P_n) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{10}(1{,}2^n) + 1{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{-10} \cdot \sum_{n=11}^{\infty}(0{,}8^n)\right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \left[1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + 1{,}2^3 + 1{,}2^4 + 1{,}2^5 + 1{,}2^6 + 1{,}2^7 + 1{,}2^8 + 1{,}2^9 + 1{,}2^{10} + \sum_{n=11}^{\infty}(0{,}8^n)\right]^{-1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a^n) - \sum_{n=0}^{k}(a^n) \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty}(a^n) = \frac{a^k}{1-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=11}^{\infty}(0{,}8^n) = \frac{0{,}8^{11}}{1-0{,}8} = 0{,}43 \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} P_0 = [1 + 1{,}2 + 1{,}44 + 1{,}73 + 2{,}07 + 2{,}49 + 2{,}99 + 3{,}58 + 4{,}3 + 5{,}16 + 6{,}19 + 0{,}43]^{-1} \Rightarrow P_0 = [32{,}58]^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}031}$$

β)

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty}(n \cdot P_n) = \sum_{n=0}^{10}(n \cdot P_n) + \sum_{n=11}^{\infty}(n \cdot P_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{N} = P_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{10}(1{,}2^n \cdot n) + 1{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{-10} \cdot \sum_{n=11}^{\infty}(n \cdot 0{,}8^n)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{N} = 0{,}031 \cdot [0 + 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}2^2 + 3 \cdot 1{,}2^3 + 4 \cdot 1{,}2^4 + 5 \cdot 1{,}2^5 + 6 \cdot 1{,}2^6 +$$

$$+ 7 \cdot 1{,}2^7 + 8 \cdot 1{,}2^8 + 9 \cdot 1{,}2^9 + 10 \cdot 1{,}2^{10} + 1{,}2^{10} \cdot \cancel{0{,}8^{-10}} \cdot \frac{0{,}8^{11} \cdot (11 - 0{,}8 \cdot 11 + 0{,}8)}{0{,}2^2}]$$

$$\Rightarrow \bar{N} = 0{,}031 \cdot [1{,}2 + 2{,}88 + 5{,}18 + 8{,}29 + 12{,}44 + 17{,}91 + 25{,}08 + 34{,}4 +$$

$$+ 46{,}44 + 371{,}5] \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 16{,}28}$$

γ) $\sum_{n=0}^{10}(P_n) = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{10}(1{,}2^n) \xrightarrow{\text{ερώτημα α'}} 0{,}031 \cdot 32{,}15 \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{10}(P_n) = 0{,}997}$

$$\sum_{n=11}^{\infty}(P_n) = P_0 \cdot 1{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{-10} \cdot \sum_{n=11}^{\infty}(0{,}8^n) \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\sum_{n=11}^{\infty}(P_n) = 0{,}77}$$

$$\text{Κέρδος} = \lambda_1 \cdot r_1 \cdot \sum_{n=0}^{10}(P_n) + \lambda_2 \cdot r_2 \cdot \sum_{n=11}^{\infty}(P_n) = 12 \cdot 5 \cdot 0{,}997 + 8 \cdot 9{,}06 \cdot 0{,}77$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Κέρδος} = 115{,}63 €}$$

ΘΕΜΑ 3

M/E5/1

$1/\mu = 1 \Rightarrow \boxed{\mu = 1}$

$\boxed{\lambda = 0{,}75}$

α) $\bar{N} = ;$, $T = ;$

β) $\bar{N}' = ;$, $T' = ;$ με 2 πρώτες αιτιοκρατικές

γ) $\mu' > ;$

α) $\boxed{\bar{x} = 1}$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}75} < 1$ Ευσταθές

$\sigma_x^2 = \frac{1}{5 \cdot \mu^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 0{,}2}$

$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot (1-\rho)} = 0{,}75 + \frac{0{,}75^2 + 0{,}75^2 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 0{,}25} \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 2{,}1}$

$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{2{,}1}{0{,}75} \Rightarrow \boxed{T = 2{,}8}$

β)

$$\sigma_x'^2 = 0 + 0 + \left(\frac{1}{5\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{5\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{5\mu}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_x'^2 = 0{,}12}$$

$$\bar{N}' = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x'^2}{2\cdot(1-\rho)} = 0{,}75 + \frac{0{,}75^2 + 0{,}75^2 \cdot 0{,}12}{2 \cdot 0{,}25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{N}' = 2{,}01}$$

$$T = \frac{\bar{N}'}{\lambda} = \frac{2{,}01}{0{,}75} \Rightarrow \boxed{T = 2{,}68}$$

γ)

$$\sigma_x''^2 = 0 + 0 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_x''^2 = \frac{3}{\mu''^2}}$$

$$\bar{N}'' = \rho'' + \frac{\rho''^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x''^2}{2\cdot(1-\rho'')} < \bar{N}' \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu''} + \frac{\frac{\lambda^2}{\mu''^2} + \lambda^2 \cdot \frac{3}{\mu''^2}}{2\cdot\left(\frac{\mu''-\lambda}{\mu''}\right)} < \bar{N}' \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu''} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu''^2}}{\frac{\cancel{2}\cdot(\mu''-\lambda)}{\mu''}} < 2{,}01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu''} + \frac{2\cdot\lambda^2}{\mu''\cdot(\mu''-\lambda)} < 2{,}01 \Rightarrow \frac{\mu''\cdot\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^2}{\mu''(\mu''-\lambda)} < 2{,}01$$

$$\Rightarrow \frac{\mu''\cdot\lambda - \lambda^2}{\mu''\cdot(\mu''-\lambda)} < 2{,}01 \Rightarrow \frac{\lambda\cdot\cancel{(\mu''-\lambda)}}{\mu''\cdot\cancel{(\mu''-\lambda)}} < 2{,}01 \Rightarrow \mu'' > \frac{0{,}75}{2{,}01} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu'' > 0{,}37}$$

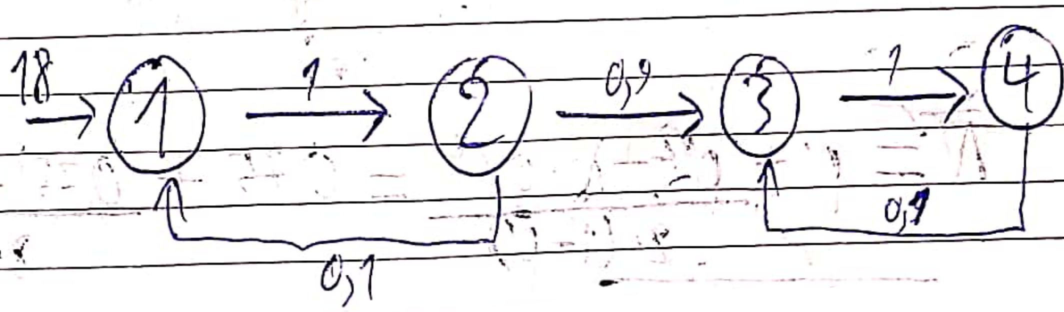
ΘΕΜΑ 4

1: M/M/2

2: M/M/1

3: M/M/1

4: M/M/1



$\boxed{\begin{array}{l} \mu_1 = 15 \\ \mu_2 = 25 \\ \mu_3 = 30 \\ \mu_4 = 30 \end{array}}$

α) $\bar{N} = ;$

β) $\bar{N}' = ;$ (άλλο σύστημα)

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 18 + 0{,}1 \cdot \lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \\ \lambda_3 = 0{,}9 \cdot \lambda_2 + 0{,}1 \cdot \lambda_4 \\ \lambda_4 = \lambda_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 20} \quad \boxed{\lambda_3 = \lambda_4 = 20}$$

Κόμβος 1.

M/M/2

$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\cdot\mu_1} = \frac{20}{30} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0{,}67}$

$P_{0(1)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m\cdot\rho)^k}{k!}\right] + \frac{(m\cdot\rho)^m}{m!\cdot(1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{(1{,}44)^k}{k!}\right] + \frac{1{,}44^2}{2\cdot 0{,}33} \right\}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{0(1)} = \left\{1 + 1{,}44 + 3{,}14\right\}^{-1} = \left\{5{,}58\right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(1)} = 0{,}18}$

$\overline{N_1} = \overline{N_{s(1)}} + \overline{N_{q(1)}} = \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{m!\cdot(1-\rho^2)} = \frac{20}{15} + \frac{0{,}18\cdot 4\cdot 0{,}67^3}{2\cdot 0{,}55} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 1{,}53}$

Κόμβος 2

M/M/1 $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0{,}8 \Rightarrow \overline{N_2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 4}$

Κόμβος 3

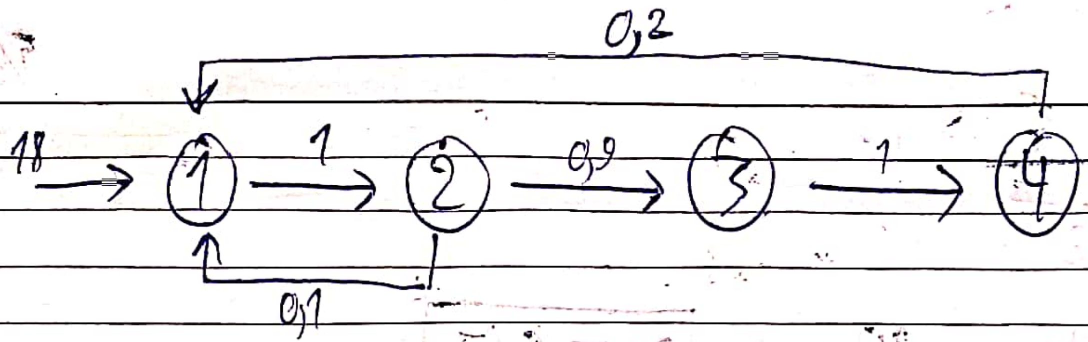
M/M/1 $\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0{,}67 \Rightarrow \overline{N_3} = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} \Rightarrow \boxed{\overline{N_3} = 2}$

Κόμβος 4

M/M/1 $\rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} = 0{,}67 \Rightarrow \overline{N_4} = \frac{\rho_4}{1-\rho_4} \Rightarrow \boxed{\overline{N_4} = 2}$

$\overline{N} = \overline{N_1} + \overline{N_2} + \overline{N_3} + \overline{N_4} \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 9{,}53}$

8)



$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 18 + 0{,}1\cdot\lambda_2 + 0{,}2\cdot\lambda_4 \\ \lambda_2 &= \lambda_1 \\ \lambda_3 &= 0{,}9\cdot\lambda_2 = 0{,}9\cdot\lambda_1 \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = 0{,}9\cdot\lambda_1 \end{aligned}\right\} \lambda_1 = 18 + 0{,}1\cdot\lambda_1 + 0{,}18\cdot\lambda_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1' = \lambda_2' = 25}$$

$$\boxed{\lambda_3' = \lambda_4' = 22{,}5}$$

<u>Κόμβος 1</u>

M/M/2

$$\rho_1' = \frac{\lambda_1'}{2\cdot\mu_1} = \frac{25}{30} \Rightarrow \boxed{\rho_1' = 0{,}83}$$

$$P_{0(1)}' = \left\{\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{(m\cdot\rho)^k}{k!}\right] + \frac{(m\cdot\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}\right\}^{-1} = \left\{\sum_{k=0}^{1}\left[\frac{1{,}66^k}{k!}\right] + \frac{1{,}66^2}{2\cdot 0{,}17}\right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{0(1)}' = \{1 + 1{,}66 + 8{,}1\}^{-1} \Rightarrow P_{0(1)}' = \{10{,}76\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(1)}' = 0{,}093}$$

$$\overline{N}_1' = \overline{N}_{s(1)}' + \overline{N}_{q(1)}' = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + P_{0(1)}'\cdot\frac{m^m\cdot\rho_1^{m+1}}{m!\,(1-\rho_1^2)} = 1{,}67 + \frac{0{,}093\cdot 4\cdot 0{,}83^3}{2\cdot 0{,}31} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{N}_1' = 2{,}01}$$

Κόμβος 2

M/M/1 $\rho_2 = \frac{\lambda_2'}{\mu_2} = \frac{25}{25} = 1$ $\overline{N_2'} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{1}{0} \Rightarrow \overline{N_2} \to \infty$

Κόμβος 3

M/M/1 $\rho_3' = \frac{22,5}{30} = 0,75 \Rightarrow \overline{N_3'} = \frac{\rho_3'}{1-\rho_3'} \Rightarrow \boxed{\overline{N_3'} = 3}$

Κόμβος 4

M/M/1 $\rho_4' = \frac{22,5}{30} = 0,75 \Rightarrow \overline{N_4'} = \frac{\rho_4'}{1-\rho_4'} \Rightarrow \boxed{\overline{N_4'} = 3}$

$$\overline{N'} = \overline{N_1'} + \overline{N_2'} + \overline{N_3'} + \overline{N_4'} \xRightarrow{\overline{N_2} \to \infty} \overline{N'} \to \infty$$

Καλύτερα προηγούμενο σχήμα.

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 2 Σεπτεμβρίου 2013
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:

ΘΕΜΑ 1: Το τηλεφωνικό κέντρο εξυπηρέτησης πελατών μιας εταιρείας διαθέτει τέσσερις πράκτορες. Οι κλήσεις των πελατών είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 30 την ώρα. Η μέση διάρκεια μιας συνομιλίας είναι 6 λεπτά και οι χρόνοι συνομιλίας είναι επίσης τυχαίοι και ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

α. Βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. **(1)**
β. Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στην αναμονή και ποιός ο μέσος χρόνος αναμονής; **(1)**
γ. Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών ανά ώρα, που δεν εξυπηρετούνται άμεσα, αλλά χρειάζεται να περιμένουν μέχρι να βρεθεί ελεύθερος πράκτορας; **(0.5)**

ΘΕΜΑ 2: Στην εταιρεία του προηγούμενου θέματος εγκαθίσταται σύστημα ενημέρωσης των πελατών σχετικά με τον εκτιμώμενο χρόνο αναμονής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα αρκετοί από τους πελάτες, που πρέπει να περιμένουν να αποθαρρύνονται και να τερματίζουν την κλήση τους. Ο μέσος ρυθμός κλήσεων που δεν εγκαταλείπουν το σύστημα είναι $\lambda/(k + 1)$, όταν υπάρχουν k πελάτες σε αναμονή, όπου $\lambda = 30$ ανά ώρα είναι ο μέσος ρυθμός κλήσεων. Για τους χρόνους εξυπηρέτησης, το πλήθος πρακτόρων και την κατανομή των κλήσεων ισχύουν τα ίδια με το προηγούμενο θέμα.

α. Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων και παρουσιάστε τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση. **(1)**
β. Εκτιμήστε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος. **(1)**
γ. Ποιό είναι το μέσο πλήθος πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα; **(0.5)**

ΘΕΜΑ 3: Η παραγωγή ενός προϊόντος γίνεται σε τρεις φάσεις. Η διάρκεια κάθε φάσης είναι εκθετική με ρυθμό μ_i, όπου $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 6$, $\mu_3 = 4$. Για την έναρξη της παραγωγής ενός προϊόντος πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί και οι τρεις φάσεις του προηγούμενου. Οι αφίξεις των παραγγελιών είναι επίσης τυχαίες με ρυθμό $\lambda = 1$. και ακολουθούν την κατανομή Poisson.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών. **(1)**
β. Αν οι χρόνοι παραγωγής ήταν αιτιοκρατικοί ποιος πρέπει να είναι ο ρυθμός παραγωγής ώστε να μην χειρετερέψει η απόδοση του συστήματος; **(1)**
γ. Αντίστοιχα αν οι χρόνοι παραγωγής ήταν εκθετικά κατανεμημένοι για ποιές τιμές του ρυθμού παραγωγής θα είχαμε την ίδια ή και καλύτερη απόδοση; **(0.5)**

ΘΕΜΑ 4: Το τηλεφωνικό κέντρο εξυπηρέτησης μιας εταιρείας αποτελείται από τέσσερις κόμβους. Ο πρώτος κόμβος δέχεται το σύνολο των κλήσεων και στελεχώνεται από τρεις πράκτορες. Από τις κλήσεις που εξυπηρετούνται από τον πρώτο κόμβο το 30% προωθείται στον δεύτερο κόμβο, ένα άλλο 30% προωθείται στον τρίτο κόμβο και ένα 20% στον κόμβο τέσσερα. Το 50% των πελατών που ολοκληρώνουν την εξυπηρέτηση τους στους κόμβους δύο και τρία προωθούνται στον τέταρτο κόμβο. Οι κόμβοι δύο και τρία έχουν ένα πράκτορα, ενώ στον τέταρτο κόμβο υπάρχουν δύο πράκτορες. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί και οι μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι $\mu_1 = 25$, $\mu_2 = 20$, $\mu_3 = 25$ και $\mu_4 = 30$. Οι κλήσεις ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό $\gamma_1 = 50$ ανά ώρα.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος κλήσεων και τον συνολικό χρόνο παραμονής στο κέντρο. **(1.25)**
β. Ποια είναι η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο; **(1.25)**

Καλή επιτυχία!

ΣΕΠΤ 2013

ΘΕΜΑ 1

M/M/4

$\boxed{\lambda = 30 \text{ πελ/ώρα}}$

$\bar{X} = \frac{6}{60} = 0,1 \text{ ώρα} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\bar{X}} \Rightarrow \boxed{\mu = 10 \text{ πελ/ώρα}}$

α) $P_0 = ;$ $\qquad \rho = \frac{\lambda}{4 \cdot \mu} \Rightarrow \boxed{\rho = 0,75} < 1$ ευσταθές

β) $\bar{N} = ;$, $T = ;$

γ) $\bar{N_q} = ;$, $W = ;$

α) $P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho)^k}{k!} \right] + \frac{(m \cdot \rho)^m}{m! \cdot (1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{3} \left[\frac{3^k}{k!} \right] + \frac{3^4}{24 \cdot 0,25} \right\}^{-1}$

$\Rightarrow P_0 = \left\{ 1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + 13,5 \right\}^{-1} = \left\{ 27,5 \right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0,036}$

β) $\bar{N} = \bar{N_s} + \bar{N_q} = \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{2 \cdot (1-\rho^2)} = 3 + \frac{0,036 \cdot 256 \cdot 0,75^5}{2 \cdot 0,44} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 5,49} \qquad T = \bar{N}/\lambda \Rightarrow \boxed{T = 0,183}$

γ) $W = \frac{\bar{N_q}}{\lambda} = \frac{2,49}{30} \Rightarrow \boxed{W = 0,083} \qquad \boxed{\bar{N_q} = 2,49}$

ΘΕΜΑ 2

Αφίξεις με αποθάρρυνση

$\boxed{\lambda = 30 \text{ πελ/ώρα}}$ $\boxed{\mu = 10 \text{ πελ/ώρα}}$ ← ερώτημα α'

β) P_0

γ) $\bar{\mu}$

β) $P_0 = e^{-\lambda/\mu} = e^{-3} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}05}$

γ) $\bar{\mu} = \mu \cdot (1 - P_0) = 10 \cdot 0{,}95 \Rightarrow \boxed{\bar{\mu} = 9{,}5}$

ΘΕΜΑ 3

$\lambda = 1$

$\mu_1 = 3, \; \mu_2 = 6, \; \mu_3 = 4$ } M/G/1

α) $\bar{N} = ;$

β) Αν M/D/1 $\Rightarrow \mu = ;$

γ) Αν M/M/1 $\Rightarrow \mu = ;$

α) $\bar{X} = \bar{X_1} + \bar{X_2} + \bar{X_3} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \Rightarrow \boxed{\bar{X} = 0{,}75} \Rightarrow \boxed{\mu = 1{,}33}$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}75}$

$\sigma_X^2 = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_X^2 = 0{,}2}$

$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_X^2}{2 \cdot (1-\rho)} = 0{,}75 + \frac{0{,}75^2 + 1^2 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 0{,}25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 2{,}275}$

β) $\bar{N}_{\epsilon\rho\omega\tau.\alpha'} > \bar{N}_{\epsilon\rho\omega\tau.\beta'} \xrightarrow{\sigma_x^2=0} 2{,}275 > \rho' + \frac{\rho'^2}{2\cdot(1-\rho')} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}275 > \frac{2\rho' - 2\rho'^2 + \rho'^2}{2\cdot(1-\rho')} = \frac{2\cdot\rho' - \rho'^2}{2\cdot(1-\rho')} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4{,}55 - 4{,}55\cdot\rho' > 2\cdot\rho' - \rho'^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho'^2 - 6{,}55\cdot\rho' + 4{,}55 > 0$

$\Delta = 6{,}55^2 - 4\cdot 4{,}55\cdot 1 = 24{,}7 \Rightarrow \rho'_{1,2} = \frac{6{,}55 \pm 4{,}97}{2}$ $\nearrow \rho'_1 = 5{,}76$, $\searrow \rho'_2 = 0{,}79$

Για να είναι θετικό πρέπει να είναι εκτός ριζών

$\rho'_1 > 5{,}76$ Άτοπο

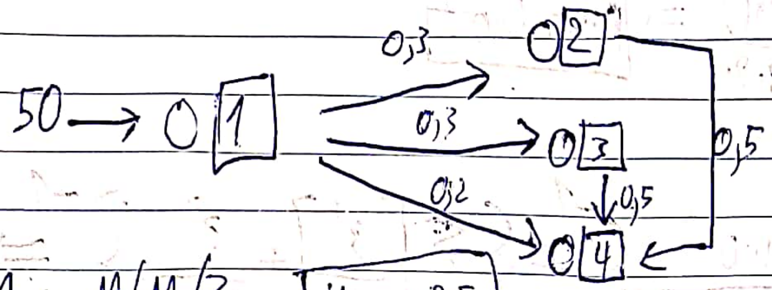
$\rho'_2 < 0{,}79 \Rightarrow \frac{\lambda'}{\mu'} < 0{,}79 \Rightarrow \mu' > \frac{1}{0{,}79} \Rightarrow \boxed{\mu' > 1{,}27}$

γ) $\bar{N}_{\epsilon\rho\omega\tau.\alpha'} > \bar{N}_{\epsilon\rho\omega\tau.\gamma'} \Rightarrow 2{,}275 > \frac{\rho}{1-\rho} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}275 - 2{,}275\cdot\rho > \rho \Rightarrow 2{,}275 > 3{,}275\cdot\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho < \frac{2{,}275}{3{,}275} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < \frac{2{,}275}{3{,}275} \Rightarrow \mu > \frac{3{,}275}{2{,}275} \Rightarrow \boxed{\mu > 1{,}44}$

ΘΕΜΑ 4



1 : M/M/3 , $\mu_1 = 25$
2 : M/M/1 , $\mu_2 = 20$
3 : M/M/1 , $\mu_3 = 25$
4 : M/M/2 , $\mu_4 = 30$

α) $\overline{N} =$; $\overline{T} =$;

β) $P_0 =$;

$\boxed{\lambda_1 = 50}$

$\lambda_2 = 0,3 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 15}$

$\lambda_3 = 0,3 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 15}$

$\lambda_4 = \underbrace{0,2 \cdot \lambda_1}_{10} + \underbrace{0,5 \cdot \lambda_3 + 0,5 \cdot \lambda_4}_{15} \Rightarrow \boxed{\lambda_4 = 25}$

Κόμβος 1

M/M/3 $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{3\cdot\mu_1} = \frac{\cancel{50}^{\,2}}{3\cdot\cancel{25}} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0{,}67}$

$$P_{0(1)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m\cdot\rho)^k}{k!} \right] + \frac{(m\cdot\rho)^m}{m!\cdot(1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{2} \left[\frac{3^k}{k!} \right] + \frac{3^3}{6\cdot 0{,}33} \right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{0(1)} = \{1 + 3 + 4{,}5 + 13{,}64\}^{-1} = \{22{,}14\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{0(1)} = 0{,}045}$$

$$\overline{N}_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + P_{0(1)}\cdot\frac{m^m\cdot\rho^{m+1}}{m!\cdot(1-\rho^2)} = 2 + \frac{0{,}045\cdot 3^3\cdot 0{,}67^4}{6\cdot 0{,}55} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_1 = 2{,}07}$$

$$T_1 = \frac{\overline{N}_1}{\lambda_1} \Rightarrow \boxed{T_1 = 0{,}04}$$

Κόμβος 2

M/M/1 $\boxed{\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0{,}75} \Rightarrow \overline{N}_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_2 = 3}$

$$T_2 = \frac{\overline{N}_2}{\lambda_2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 0{,}2}$$

Κόμβος 3

M/M/1 $\boxed{\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0{,}6} \Rightarrow \overline{N}_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_3 = 1{,}5}$

$$T_3 = \frac{\overline{N}_3}{\lambda_3} \Rightarrow \boxed{T_3 = 0{,}1}$$

Kdybog 4

$M/M/2$ $\rho_4 = \frac{\lambda_4}{2\cdot\mu_4} = \frac{\cancel{25}^{5}}{2\cdot\cancel{30}_6} \Rightarrow \boxed{\rho_4 = 0{,}42}$

$$P_{0(4)} = \left\{\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{(m\cdot\rho)^k}{k!}\right] + \frac{(m\cdot\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}\right\}^{-1} = \left\{\sum_{k=0}^{1}\left[\frac{0{,}84^k}{k!} + \frac{0{,}84^2}{2\cdot 0{,}58}\right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{0(4)} = \{1 + 0{,}84 + 0{,}61\}^{-1} = \{2{,}45\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(4)} = 0{,}41}$$

$$\overline{N}_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} + P_{0(4)}\cdot\frac{m^m\cdot\rho^{m+1}}{m!\cdot(1-\rho^2)} = 0{,}83 + 0{,}41\cdot\frac{4\cdot 0{,}42^3}{2\cdot 0{,}82} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_4 = 1{,}01}$$

$$T_4 = \frac{\overline{N}_4}{\lambda_4} \Rightarrow \boxed{T_4 = 0{,}04}$$

$$\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 + \overline{N}_4 \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 7{,}58}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \Rightarrow \boxed{T = 0{,}38}$$

γ) $P_0 = P_{0(1)}\cdot P_{0(2)}\cdot P_{0(3)}\cdot P_{0(4)} = P_{0(1)}\cdot(1-\rho_2)\cdot(1-\rho_3)\,P_{0(4)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = 0{,}045\cdot 0{,}25\cdot 0{,}4\cdot 0{,}41 \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}0018}$

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 9 Φεβρουαρίου 2014
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:

ΘΕΜΑ 1: Μια βιομηχανία διαθέτει δύο μηχανές για την παραγωγή ενός προϊόντος. Οι μηχανές δεν είναι όμοιες και ο μέσος ρυθμός παραγωγής της πρώτης μ_1, είναι αρκετά μεγαλύτερος από τον ρυθμό της δεύτερης μ_2. Η βιομηχανία ακολουθεί την παρακάτω πολιτική. Όταν το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών είναι μεγαλύτερο από k χρησιμοποιούνται και οι δύο μηχανές. Όταν οι παραγγελίες γίνουν ίσες ή μικρότερες από k χρησιμοποιείται μόνο η γρήγορη μηχανή. Στην περίπτωση μετάβασης από την κατάσταση $k + 1$ στην k, αν υπάρχει κάποια εργασία που εκτελείται στην αργή μηχανή διακόπτεται και συνεχίζεται στην γρήγορη μηχανή. Οι αφίξεις των παραγγελιών ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ την ημέρα. Οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανεμημένοι.

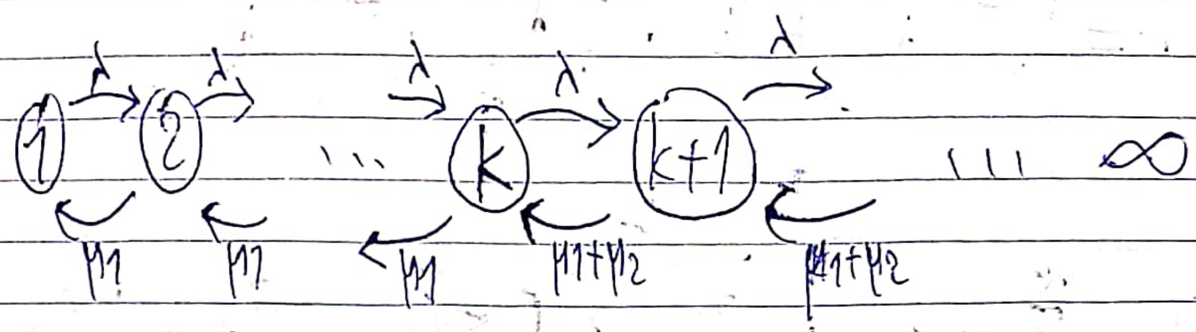
α. Βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. **(1.5)**
β. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών. **(0.5)**
γ. Ποιο είναι το ποσοστό του χρόνου που η αργή μηχανή είναι αδρανής; **(0.5)**

ΘΕΜΑ 2: Ένας μηχανικός διαθέτει ένα συνεργείο βαρέων μηχανημάτων. Το συνεργείο διαθέτει δύο θέσεις εργασίας, δηλαδή μπορεί να επισκευάσει παράλληλα δύο μηχανήματα. Δυστυχώς το συνεργείο δεν διαθέτει χώρο στάθμευσης, οπότε στην περίπτωση που είναι πλήρες διώχνει τις νέες παραγγελίες. Ο ιδιοκτήτης εξετάζει το ενδεχόμενο να ενοικιάσει το διπλανό οικόπεδο ως χώρο στάθμευσης των χαλασμένων μηχανημάτων, που είναι αρκετά μεγάλο ώστε να θεωρείται ότι έχει πρακτικά άπειρη χωρητικότητα. Οι αφίξεις των μηχανημάτων προς επισκευή ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 8$. Οι χρόνοι επισκευής είναι εκθετικά κατανεμημένοι και ο μέσος ρυθμός είναι $\mu = 5$.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος μηχανημάτων στο συνεργείο και τον πραγματικό ρυθμό επισκευής στην αρχική κατάσταση λειτουργίας. **(1.5)**
β. Πόσο θα αυξηθεί ο ρυθμός εξυπηρέτησης και ποιός θα είναι ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης μιας επισκευής αν ενοικιαστεί το διπλανό οικόπεδο; **(1.5)**

Φεβρ. 2014

ΘΕΜΑ 1



$$P_n = \begin{cases} P_0 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu_1}\right)^n & n \le k \\ P_0 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu_1}\right)^k \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{n-k} & n \ge k \end{cases}$$

α) $P_0 =$;

β) $\bar{N} =$;

γ) $T_{(0 \to k)} =$;

α) $\sum_{n=0}^{\infty}(P_n)=1 \Rightarrow 1 = P_0\cdot\left[\sum_{n=0}^{k}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{-k}\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^n\right]\right]$

$$\Rightarrow \boxed{P_0=\left\{\sum_{n=0}^{k}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{-k}\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^n\right]\right\}^{-1}}$$

β) $\overline{N}=\sum_{n=0}^{\infty}(n\cdot P_n) \Rightarrow \overline{N}=P_0\cdot\left\{\sum_{n=0}^{k}\left[n\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\right]+\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{-k}\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[n\cdot\left(\cdots\right.\right.\right.$

γ) $\overline{N}_{(0\to k)}=\sum_{n=0}^{k}(n\cdot P_n) \Rightarrow \boxed{\overline{N}_{(0\to k)}=P_0\cdot\sum_{n=0}^{k}\left[n\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\right]}$

$$T=\frac{\overline{N}_{0k}}{\lambda} \Rightarrow \boxed{T=\frac{P_0}{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{k}\left[n\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\right]}$$

ΘΕΜΑ 2

Αρχ: M/M/2/2 $\quad \boxed{\lambda = 8}$

Τελ: M/M/2 $\quad \boxed{\mu = 5}$

α) M/M/2/2 : $\bar{N} = ;$, $\bar{\mu} = ;$

β) M/M/2 : $\mu' = ;$?, $T = ;$

α) $P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{2} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{n=0}^{2} \left[\frac{1{,}6^n}{n!} \right] \right\}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = \{ 1 + 1{,}6 + 1{,}28 \}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}26}$

$P_2 = P_0 \cdot 1{,}6^2 \cdot \frac{1}{2!} \Rightarrow \boxed{P_2 = 0{,}33}$

$\bar{N} = \frac{\lambda \cdot (1 - P_2)}{\mu} = \frac{8 \cdot 0{,}67}{5} \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 1{,}07}$

$\bar{\mu} = \lambda \cdot (1 - P_2) = 8 \cdot 0{,}67 \Rightarrow \boxed{\bar{\mu} = 5{,}36}$

в)

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}8}$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{1{,}6^k}{k!} \right] + \frac{1{,}6^2}{2 \cdot 0{,}2} \right\}^{-1} = \left\{ 1 + 1{,}6 + 6{,}4 \right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}11}$$

$$\overline{N} = \overline{N_s} + \overline{N_q} = \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \cdot \frac{m^m \cdot \rho^{m+1}}{m! \cdot (1-\rho^2)} = 1{,}6 + \frac{0{,}11 \cdot 4 \cdot 0{,}8^3}{2 \cdot 0{,}16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{N} = 2{,}304}$$

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda} \Rightarrow \boxed{T = 0{,}288}$$

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

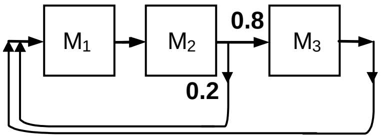
Εξέταση Ιουνίου 2014 στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής - **Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά**

'Ονομα: **Α.Μ.:**

· Έχετε μαζί σας ταυτότητες. Επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής. Αφήστε τυχόν σημειώσεις, βιβλία και κινητά τηλέφωνα κάτω στα πόδια σας, όχι σε καθίσματα, με τα κινητά απενεργοποιημένα.

· Επιστρέφετε την εκφώνηση και το τυπολόγιο με το γραπτό. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

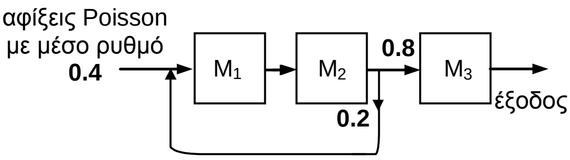
Θέμα 1 (*1 μον.*) Από στατιστικές ανθρωπολόγων είναι γνωστό ότι σε μία φυλή ιθαγενών ο μέσος ρυθμός γεννήσεων είναι περίπου 8 βρέφη/έτος και ο μέσος πληθυσμός της φυλής 300 άτομα. Κάνετε μία εκτίμηση του μέσου χρόνου ζωής των ιθαγενών.



Θέμα 2. Το κλειστό δίκτυο FMS του σχήματος έχει τρεις μηχανές και συνολικά 2 κομμάτια που κυκλοφορούν συνεχώς μέσα του. Κάθε μία από τις μηχανές M_1 και M_2 χρειάζεται κατά μέσον όρο 1 λεπτό για την κατεργασία ενός κομματιού, ενώ η M_3 χρειάζεται 2 λεπτά κατά μέσον όρο. Κομμάτι που εξέρχεται από τη M_2 πηγαίνει στη M_1 με πιθανότητα 0.2 ή στη M_3 με πιθανότητα 0.8.

(α) (*3 μον.*) Υπολογίστε την πιθανότητα ώστε να υπάρχει ακριβώς ένα κομμάτι στη M_1 (και κανένα στην αποθήκη της M_1).

(β) (*1 μον.*) Υπολογίστε το μέσο ρυθμό παραγωγής της M_3.



Θέμα 3 (*2 μον.*) Το σχήμα αναπαριστά ένα ανοικτό δίκτυο Jackson παρόμοιο με του Θέματος 2, με τη διαφορά ότι η M_1 δέχεται κομμάτια απ' έξω με μέσο ρυθμό 0.4/λεπτό και η M_3 διοχετεύει την παραγωγή της στην έξοδο. Όπως πριν, οι μέσοι χρόνοι κατεργασιών είναι 1 λεπτό για τις μηχανές M_1 και M_2 και 2 λεπτά για την M_3. Υπολογίστε το μέσο αριθμό κομματιών σε όλο το σύστημα.

Θέμα 4. Ένα αυτόματο μηχάνημα πώλησης αναψυκτικών και καφέ εξυπηρετεί πελάτες οι οποίοι φθάνουν κατά Poisson με μέσο ρυθμό 2.5/λεπτό (1 λεπτό = 60 δευτερόλεπτα). Σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους, 60% αγοράζουν αναψυκτικό και 40% καφέ. Ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι 15 δευτερόλεπτα ακριβώς αν ο πελάτης θέλει αναψυκτικό και 30 δευτερόλεπτα ακριβώς αν θέλει καφέ. Συνεπώς, ο χρόνος εξυπηρέτησης μπορεί να θεωρηθεί τυχαία μεταβλητή.

(α) (*2 μον.*) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά του χρόνου εξυπηρέτησης.

(β) (*2 μον.*) Υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά.

Ιουν 2014

ΘΕΜΑ 1

$N = 300$

$\lambda = 8$

$T = ;$

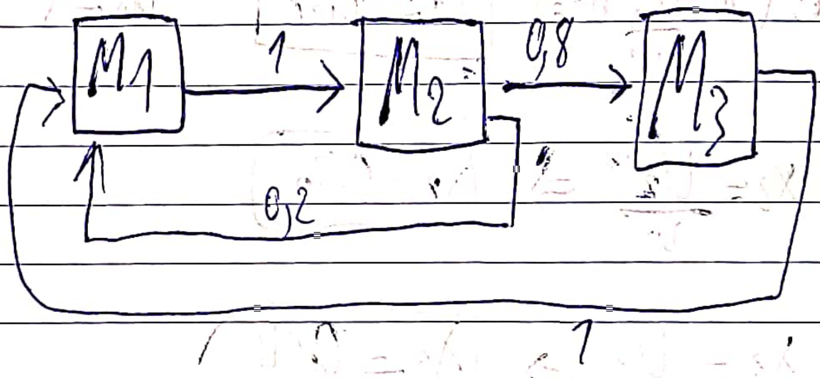
$T = \frac{300}{8} \Rightarrow \boxed{T = 37{,}5}$

ΘΕΜΑ 2

$n_1 = 1$

$n_2 = 1$

$n_3 = 2$



α) $N = 2$; $P(n_1 = 1) = ;$

β) $TH_3 = ;$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= 0{,}2\cdot U_2 + U_3 \\ U_2 &= U_1 \\ U_3 &= 0{,}8\cdot U_2 \\ U_1 + U_2 + U_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U_1 + U_1 + 0{,}8\cdot U_1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 = 0{,}36} \quad \boxed{U_2 = 0{,}36} \quad \boxed{U_3 = 0{,}28}$$

$$X_1 = \frac{U_1}{\mu_1} \Rightarrow \boxed{X_1 = 0{,}36}$$

$$X_2 = \frac{U_2}{\mu_2} \Rightarrow \boxed{X_2 = 0{,}36}$$

$$X_3 = \frac{U_3}{\mu_3} \Rightarrow \boxed{X_3 = 0{,}14}$$

$$G(\overline{N}=2, n_1=1) = x_1^1\cdot x_2^1\cdot x_3^0 + x_1^1\cdot x_2^0\cdot x_3^1 = 0{,}36\cdot 0{,}36\cdot 1 + 0{,}36\cdot 0{,}14$$

$$\Rightarrow \boxed{G(\overline{N}=2, n_1=1) = 0{,}18}$$

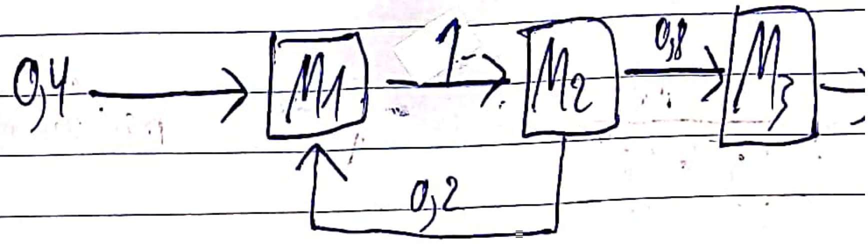
b) $G(\overline{N}=1, n_1=1) = x_1^1\cdot x_2^0\cdot x_3^0 \Rightarrow \boxed{G(\overline{N}=1, n_1=1) = 0{,}36}$

$$TH_3 = U_3\cdot \frac{G(\overline{N}=1, n_1=1)}{G(\overline{N}=2, n_2=1)} = 0{,}28\cdot \frac{0{,}36}{0{,}14} \Rightarrow \boxed{TH_3 = 0{,}014}$$

ΘΕΜΑ 3

$\boxed{\mu_1 = \mu_2 = 1}$

$\boxed{\mu_3 = 2}$



$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,4 + 0,2 \cdot \lambda_2 \\ \lambda_2 &= \lambda_1 \\ \lambda_3 &= 0,8 \cdot \lambda_2 = 0,8 \cdot \lambda_1 \end{aligned}\right\} \quad 0,8 \cdot \lambda_1 = 0,4 \left\{ \quad \boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,5 \\ \lambda_2 &= 0,5 \\ \lambda_3 &= 0,4 \end{aligned}} \right.$$

$\overline{N} = ;$

Κόμβος 1

M/M/1 $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0,5}$ $\quad \overline{N}_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_1 = 1}$

Κόμβος 2

M/M/1 $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = 0,5}$ $\quad \overline{N}_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_2 = 1}$

Κόμβος 3

M/M/1 $\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} \Rightarrow \boxed{\rho_3 = 0,2}$ $\quad \overline{N}_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} \Rightarrow \boxed{\overline{N}_3 = 0,25}$

$\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 2,25}$

ΘΕΜΑ 4

X	πιθαν
15 sec	0,6
30 sec	0,4

$\lambda = 2{,}5$ πελ/min

a) $\bar{X} = ;$, $\sigma_X^2 = ;$

b) $W = ;$

---

a) $\bar{X} = 15 \cdot 0{,}6 + 30 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \boxed{\bar{X} = 21\, sec}$

$Var(X) = \sigma_X^2 = (15-\bar{X})^2 \cdot 0{,}6 + (30-\bar{X})^2 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \boxed{\sigma_X^2 = 54\, sec^2}$

---

b) **M/G/1**

$\boxed{\lambda = 2{,}5/60 \text{ πελ/sec}}$ $\quad \mu = \frac{1}{\bar{X}} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{21} \text{ πελ/sec}}$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{2{,}5}{60}}{\frac{1}{21}} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}88} < 1$ Ευσταθές

$W = \frac{\lambda \cdot \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma_X^2\right)}{2 \cdot (1-\rho)} = \frac{\frac{2{,}5}{60} \cdot (21^2 + 54)}{2 \cdot 0{,}12} \Rightarrow \boxed{W = 85{,}94}$

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 3 Ιουλίου 2020
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

Όνομα:	ΑΜ:
Αίθουσα:	Αριθμός θέσης:

ΘΕΜΑ 1: Η παραγωγή ενός προϊόντος γίνεται σε τυχαίους χρόνους που ακολουθούν την κατανομή Erlang – 3 με μεση τιμή $1/\mu = 1/6$. Οι αφίξεις των παραγγελιών είναι επίσης τυχαίες με ρυθμό $\lambda = 4$, και ακολουθούν την κατανομή Poisson.

α. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα. **(2)**

β. Αν οι δύο τελευταίες φάσεις αυτοματοποιηθούν και γίνουν αιτιοκρατικές χωρίς να αλλάξει η μέση διάρκεια τους θα μειωθεί το μέσο πλήθος πελατών; **(1)**

ΘΕΜΑ 2: Το προϊόν που παράγεται από μια βιομηχανία απευθύνεται σε δύο διαφορετικές κατηγορίες πελατών. Οι παραγγελίες είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ_1 και λ_2 για τις αντίστοιχες κατηγορίες πελατών, ενώ τυχαίοι είναι και οι χρόνοι παραγωγής, που είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό μ. Οι πελάτες της $1^{ης}$ κατηγορίας έχουν προτεραιότητα έναντι των πελατών της $2^{ης}$ κατηγορίας. Όταν το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών n είναι μικρότερο από k γίνονται δεκτές όλες οι παραγγελίες. Στην περίπτωση που οι εκκρεμείς παραγγελίες n είναι $k \leq n$ απορρίπτουμε τις παραγγελίες της $2^{ης}$ κατηγορίας και δεχόμαστε μόνο τις παραγγελίες της $1^{ης}$ κατηγορίας.

α. Ποια είναι η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος; **(1)**

β. Εκτιμήστε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. **(2)**

γ. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος παραγγελιών της $2^{ης}$ κατηγορίας που χάνονται. **(1)**

ΘΕΜΑ 3: Ένα νοσοκομείο θεωρούμε ότι αποτελείται από τρία τμήματα εξυπηρέτησης. Το πρώτο είναι το τμήμα εισαγωγών που διαθέτει δύο ασθενοφόρα και αναλαμβάνει την μεταφορά των ασθενών όταν χρειαστεί. Το δεύτερο τμήμα είναι τα εξωτερικά ιατρεία στα οποία γίνεται η εξέταση των ασθενών και αποφασίζεται αν πρέπει να νοσηλευθούν ή όχι. Τέλος υπάρχουν οι κλινικές όπου γίνεται η νοσηλεία των ασθενών. Οι κλήσεις των ασθενοφόρων ακολουθούν την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 = 2$. Οι αφίξεις ασθενών απευθείας στα εξωτερικά ιατρεία ακολουθούν επίσης την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_2 = 3$. Οι μισοί από τους ασθενείς που μεταφέρονται στο νοσοκομείο με ασθενοφόρο περνούν από τα εξωτερικά ιατρεία ενώ οι υπόλοιποι μεταφέρονται απευθείας στις κλινικές. Αντίστοιχα οι μισοί από αυτούς που εξετάζονται στα εξωτερικά ιατρεία προωθούνται στις κλινικές, ενώ οι υπόλοιποι φεύγουν. Οι χρόνοι μεταφοράς από τα ασθενοφόρα, οι χρόνοι εξέτασης στα εξωτερικά ιατρεία και οι χρόνοι νοσηλείας είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσους ρυθμούς $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$ και $\mu_3 = 1/10$ αντίστοιχα. Στα εξωτερικά ιατρεία υπάρχουν συνήθως δύο γιατροί, ενώ οι κλινικές θεωρούμε ότι έχουν τη δυνατότητα να νοσηλεύσουν πρακτικά άπειρους ασθενείς.

α. Ποιο είναι το μέσο πλήθος ασθενών στο σύστημα; **(2.5)**

β. Ποια η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας ασθενής στο σύστημα; **(1.5)**

Καλή επιτυχία!

Ιουλ 2020

ΘΕΜΑ 1°

M/E₃/1

$\boxed{\mu=6}$

$\boxed{\lambda=4}$

α) $\bar{N}=;$

β) $\bar{N}'=;$ με M/D/1 $(\sigma_x^2=0)$

α) Επειδή δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε μέσο πλήθος με M/E₃/1 ~~..~~ προσδιορίζουμε το σύστημα ως M/G/1

M/G/1

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4}{6}\Rightarrow \boxed{\rho=0{,}67}$$

$$\sigma_x^2=\frac{1}{3\cdot\mu^2}=\frac{1}{3\cdot 36}\Rightarrow \boxed{\sigma_x^2=0{,}009}$$

$$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot (1-\rho)} = 0{,}67 + \frac{0{,}67^2 + 4^2 \cdot 0{,}009}{2 \cdot 0{,}33}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 1{,}57}$$

β) Θέλετε μπορούμε με M/D/1 να βρούμε το μέσο πλήθος χρησιμοποιούμε το ΜΧΕ/1

M/G/1

$$\boxed{\sigma_x^2 = 0}$$

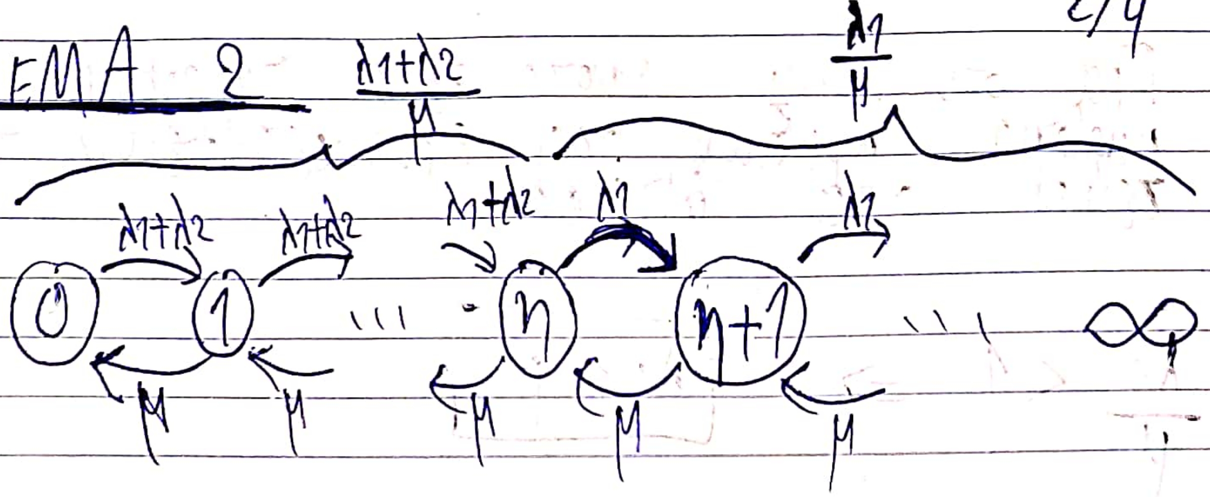
$$\bar{N}' = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2 \cdot (1-\rho)} = 0{,}67 + \frac{0{,}67^2}{2 \cdot 0{,}33} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{N}' = 1{,}35}$$

Μείωση $= \bar{N} - \bar{N}' \Rightarrow$ $\boxed{\text{Μείωση} = 0{,}22}$

Scanned with CamScanner

ΘΕΜΑ 2



$$P_k = \begin{cases} P_0 \cdot \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^k & k \leq n \\ P_0 \cdot \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^n \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{k-n} & k \geq n \end{cases}$$

α) Συνθήκη ευστάθειας ($\rho<1$)

β) Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης (P_0)

γ) Μέσο πλήθος απορριπτέων 2ης κατηγορίας ($A_{πορρ} = \lambda_2 \cdot P_n$)

α) Για συνθήκη ευστάθειας παίρνουμε το κλάσμα αφίξεων προς εξυπηρετήσεων που τείνει στο άπειρο:

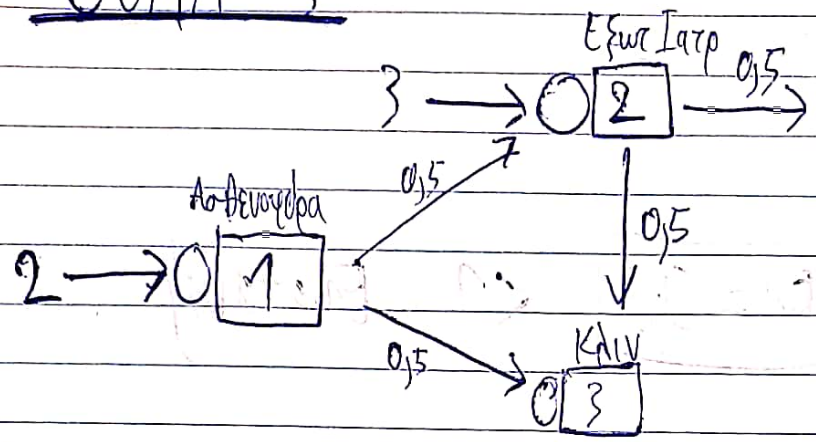
$$\frac{\lambda_1}{\mu} < 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 < \mu}$$

β) $$\sum_{k=0}^{\infty}(P_k) = 1 \Rightarrow 1 = P_0 \left\{ \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^k\right] + \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^n \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^k\right]\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^k\right] + \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}\right)^n \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{-n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^k\right]\right.}$$

γ) $\boxed{\text{Απορριπτάιδι} = \lambda_2 \cdot P_n}$

ΘΕΜΑ 3



1: M/M/2 , $\mu_1 = 2$

2: M/M/2 , $\mu_2 = 3$

3: M/M/∞ , $\mu_3 = 0,1$

α) $\overline{N} = ;$

β) $P_0 = ;$

α) $\boxed{\lambda_1 = 2}$

$\lambda_2 = 3 + 0,5\lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 4}$

$\lambda_3 = 0,5 \cdot \lambda_1 + 0,5 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 3}$

Κόμβος 1

M/M/2

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2 \cdot \mu_1} = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0,5} < 1 \text{ Ευσταθές}$$

$$P_{0(1)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(m \cdot \rho)^m}{m!(1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{1^k}{k!} \right] + \frac{1^2}{2 \cdot 0,5} \right\}^{-1} =$$

$$\Rightarrow P_{0(1)} = \{1 + 1 + 1\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(1)} = 0,33}$$

$$\overline{N_1} = \overline{N_s} + \overline{N_q} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + P_{0(1)} \cdot \frac{m^m \cdot \rho_1^{m+1}}{m! \cdot (1-\rho^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N_1} = 1 + \frac{0,33 \cdot 4 \cdot 0,5^3}{2 \cdot 0,89} \Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 0,09}$$

Scanned with CamScanner

Κόμβος 2

M/M/2

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{2\cdot\mu_2} = \frac{4}{6} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = 0{,}67} < 1 \quad \text{Ευσταθές}$$

$$P_{0(2)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m\cdot\rho)^k}{k!} + \frac{(m\cdot\rho)^m}{m!\,(1-\rho)} \right] \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{1{,}34^k}{k!} \right] + \frac{1{,}34^2}{2\cdot 0{,}33} \right\}^{-1}$$

$$\Rightarrow P_{0(2)} = \left\{ 1 + 1{,}34 + 2{,}99 \right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(2)} = 0{,}19}$$

$$\overline{N_2} = \overline{N_s} + \overline{N_q} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + P_{0(2)}\,\frac{m^m\cdot\rho_2^{\,m+1}}{m!\,(1-\rho^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N_2} = 1{,}33 + \frac{0{,}19\cdot 4\cdot 0{,}67^3}{2\cdot 0{,}33} \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 1{,}68}$$

Κόμβος 3

$\bar{N}_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{3}{0,1} \Rightarrow \boxed{\bar{N}_3 = 30}$

$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3 = 0,09 + 1,68 + 30 \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 31,77}$

β) $P_0 = P_{0(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{0(3)} = 0,33 \cdot 0,19 \cdot e^{-3/0,1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = 0,33 \cdot 0,19 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{P_0 \simeq 0}$

Scanned with CamScanner

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 17 Σεπτεμβρίου 2020
Τελική εξέταση στο μάθημα «Δίκτυα Παραγωγής»

ΘΕΜΑ 1: Ένα εργαστήριο ελέγχου αντιντόπινγκ δέχεται αιτήματα για επεξεργασία δειγμάτων αίματος από αθλητές. Οι αιτήσεις επεξεργασίας ακολουθούν την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$. Σε κάθε επίσημο έλεγχο έχουμε δύο δείγματα από τον ίδιο αθλητή. Τα δείγματα εξετάζονται σειριακά. Οι χρόνοι εξέτασης των δειγμάτων είναι εκθετικοί με ρυθμό $\mu = 12$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.1. Ποια είναι η πιθανότητα το εργαστήριο να αδρανεί;
α. 0.333, β. 0.667, γ. 0.985, δ. 0.550

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.2. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε 2 δείγματα προς έλεγχο στη μόνιμη κατάσταση;
α. 0.130, β. 0.111, γ. 0.045, δ. 0.183,

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.3. Ποιο είναι το μέσο πλήθος δειγμάτων;
α. 0.965, β. 0.434, γ. 0.750, δ. 0.113,

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.4. Ποιο είναι το μέσο πλήθος ελέγχων;
α. 0.291, β. 1.081, γ. 0.763, δ. 0.458,

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.5. Με ποιο αναμονητικό σύστημα είναι ισοδύναμο το σύστημα μας;
α. M/M/2, β. $M/E_2/1$, γ. $E_2/M/1$, δ. Σύστημα ομαδικών εξυπηρετήσεων

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.6. Έστω ότι το εργαστήριο δέχεται και αιτήσεις ανεπίσημου ελέγχου. ελέγχου αντιντόπινγκ δέχεται αιτήματα για επεξεργασία δειγμάτων αίματος από αθλητές. Η διαφορά είναι ότι στον επίσημο έλεγχο έχουμε δύο δείγματα από τον ίδιο αθλητή, ενώ στον ανεπίσημο έλεγχο έχουμε ένα δείγμα. Με πιθανότητα $q = 0.5$ έχουμε αιτήση επίσημου ελέγχου και με πιθανότητα $1 - q$ έχουμε αίτηση ανεπίσημου ελέγχου. Τα δείγματα εξετάζονται σειριακά. Με ποιο γνωστό αναμονητικό σύστημα είναι ισοδύναμο το σύστημα μας σε αυτή την περίπτωση;
α. Σύστημα ομαδικών αναχωρήσεων, β. $E_2/M/1$, γ. $M/E_2/1$, δ. Σύστημα ομαδικών αφίξεων

ΘΕΜΑ 2: Μια εταιρεία εκφόρτωσης διαθέτει μια προκυμαία στην οποία φθάνουν πλοία με τυχαίο τρόπο. Οι αφίξεις των πλοίων ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 3$ την ημέρα. Οι χρόνος εκφόρτωσης των πλοίων είναι εκθετικά κατανεμημένοι και εξαρτώνται από το πλήθος των εργατών που χρησιμοποιούνται για την εκφόρτωση. Έτσι αν χρησιμοποιούνται k εργάτες ο μέσος χρόνος εκφόρτωσης είναι $1/2k$ ημέρες. Η εταιρεία διαθέτει μεγάλο αριθμό εργατών, που μπορούν να εργαστούν ότι ώρα τους ζητηθεί. Για να αποφύγει μεγάλες ουρές αναμονής, η εταιρεία έχει σαν πολιτική της να χρησιμοποιεί τόσους εργάτες σ' ένα πλοίο όσα είναι τα πλοία που περιμένουν στην ουρά ή εξυπηρετούνται.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.1. Ποια είναι η πιθανότητα η προκυμαία να είναι άδεια;
α. 0.223 β. 0.091, γ. 0.243, δ. 0.170,

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.2. Ποιός είναι ο μέσος αριθμός εργατών που εργάζονται κάθε χρονική στιγμή;
α. 0.93, β. 2.08, γ. 3.25, δ. 1.50,

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.3. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειάζονται περισσότεροι από δύο εργάτες;
α. 0.191, β. 0,251, γ. 0.442, δ. 0.066

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.4. Ποιός είναι ο μέσος χρόνος παραμονής των πλοίων στην προκυμαία;
α. 0.91 μέρες, β. 0.50 μέρες, γ. 0.28 μέρες, δ. 1.08 μέρες,

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.5. Με ποιο γνωστό αναμονητικό σύστημα έχουμε την ίδια μορφή πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης [Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι για το γνωστό σύστημα μ = 2];

α. Δεν υπάρχει, β. M/M/m/m, γ. M/M/∞, δ. M/M/∞/∞/N.

ΘΕΜΑ 3: Ένα βενζινάδικο αποτελείται από τρία τμήματα. Το πρώτο είναι το τμήμα ανεφοδιασμού βενζίνης (ΤΑΒ), που αποτελείται από δύο αντλίες. Το δεύτερο είναι ένα μικρό συνεργείο (ΣΑ), που εκτελούνται απλές εργασίες, όπως αλλαγή λαδιών και έχει ένα σταθμό εξυπηρέτησης. Ακόμη υπάρχει και ένα πλυντήριο αυτοκινήτων (ΠΑ) με δύο σταθμούς εξυπηρέτησης. Οι αφίξεις των πελατών είναι τυχαίες ακολουθούν την κατανομή Poisson και οι μέσοι ρυθμοί τους είναι $\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 5$ και $\gamma_3 = 5$ για τα τρία τμήματα του βενζινάδικου. Το 25% των πελατών που φεύγουν από το τμήμα ανεφοδιασμού βενζίνης προωθούνται προς το συνεργείο, ενώ ένα άλλο 25% προωθείται προς το πλυντήριο. Το 50% των πελατών που φεύγουν από το συνεργείο πηγαίνουν στο πλυντήριο. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί και στα τρία τμήματα με ρυθμούς $\mu_1 = 15 = \mu_2$ και $\mu_3 = 10$, αντίστοιχα. (Ως μονάδα μέτρησης του χρόνου θεωρείστε την ώρα, πχ το $\mu_1 = 15$ πελάτες/ώρα)

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.1. Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών λ_3 που έρχεται στο πλυντήριο (ΠΑ) ανά ώρα;
α. 20, β. 5, γ. 15, δ. 10,

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.2. Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο βενζινάδικο;
α. 0.010, β. 0.005, γ. 0.015, δ. 0.017,

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.3. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς ένας πελάτης στο βενζινάδικο;
α. 0.011, β. 0.045, γ. 0.021, δ. 0.033,

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.4. Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά του πλυντηρίου (ΠΑ);
α. 1.93, β. 2.56, γ. 1.33, δ. 1.07,

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.5. Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα;
α. 6.52, β. 7.00, γ. 8.43, δ. 7.83,

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.6. Σε ποιό τμήμα έχουμε το μεγαλύτερο χρόνο αναμονής στην ουρά και πόσος είναι;
α., το ΤΑΒ με T=0.091 ώρες, β. το ΣΑ με T = 0.133 ώρες, γ. το ΣΑ με T= 0.156 ώρες, δ. το ΠΑ με T = 0.111 ώρες,

Καλή επιτυχία!

2020 Σεπτ

ΘΕΜΑ 1

M/Eτ/1 (k, P_k) πελάτες ⟶ αιτήσεις

$\boxed{\lambda = 2}$ (i, π_i) βαθμίδες ⟶ δείγματα

$2\mu = 12 \Rightarrow \boxed{\mu = 6}$

α) Αδρανεί ($\pi_0 = 1 - \rho = ;$)
β) Πιθανότητα 2 δείγματα (π_2)
γ) Μέσο πλήθος δειγμάτων (
δ) Μέσο πλήθος ελέγχων ($\bar{N}$)

α) $\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{\pi_0 = 0{,}67}$

в) $\eta \cdot \mu - \lambda(z+z^2)=0 \Rightarrow 12-2z-2z^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z^2+z-6=0}$ $\quad \Delta = 1+24=25$

$z_{1,2} = \dfrac{-1\pm 5}{2} \rightarrow \boxed{z_1=2} \quad \boxed{z_2=-3}$

$\boxed{\rho = 0,33}$

$A_1 = \dfrac{1}{1-\frac{z_1}{z_2}} = \dfrac{1}{1+0,67} \Rightarrow \boxed{A_1=0,6}$

$A_2 = \dfrac{1}{1-\frac{z_2}{z_1}} = \dfrac{1}{1+1,5} \Rightarrow \boxed{A_2=0,4}$

$\Pi_2 = (1-\rho)\cdot\left(\dfrac{A_1}{z_1^2}+\dfrac{A_2}{z_2^2}\right) = \left(\dfrac{0,6}{4}+\dfrac{0,4}{9}\right)\cdot 0,67 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\Pi_2 = 0,13}$

$\Pi_1 = (1-\rho)\cdot\left(\dfrac{A_1}{z_1}+\dfrac{A_2}{z_2}\right) = \left(\dfrac{0,6}{2}+\dfrac{0,4}{3}\right)\cdot 0,67 \Rightarrow \boxed{\Pi_1=0,29}$

δ) Προσδιορίζω το σύστημα ως M/G/1

$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\mu^2} \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{72} \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 0{,}014}$

$\rho = \frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}33}$

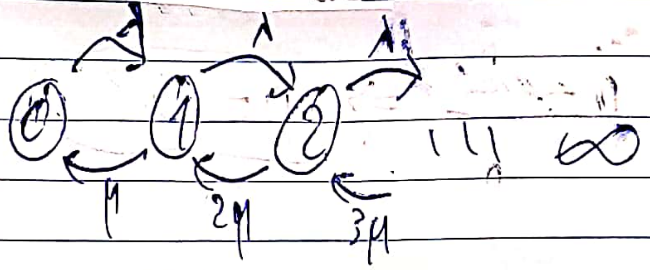
$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \sigma_x^2 \cdot \lambda^2}{2 \cdot (1-\rho)} = 0{,}33 + \frac{0{,}33^2 + 0{,}014 \cdot 4}{2 \cdot 0{,}67} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{N} = 0{,}458}$

ΘΕΜΑ 2

$\boxed{\lambda = 3 \text{ πλοία/day}}$

M/M/∞



$\mu_k = 2 \cdot k \Rightarrow \boxed{\mu = 2 \text{ πλοία/day}}$

α) $P_0 = ;$

β) Πόσοι εργάτες κατά μέσο όρο ($\bar{N}$)

γ) Πιθαν. πάνω από 2 εργάτες. ($P(\bar{N}>2)$)

δ) Μέσο χρόνο παραμονής (T)

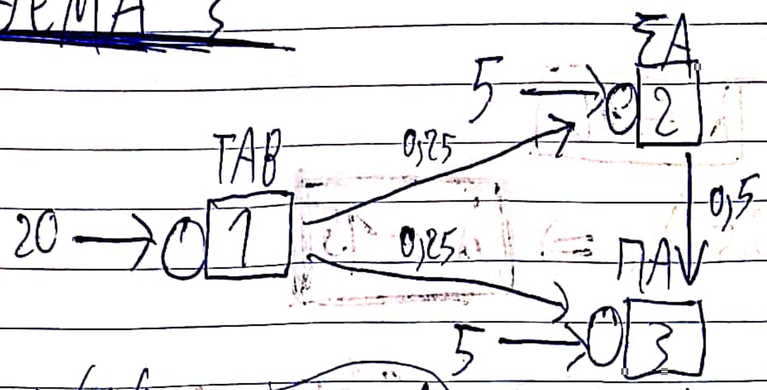
α) $P_0 = e^{-\lambda/\mu} = e^{-1,5} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0,223}$

β) $\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 1,5}$

γ) $P(\bar{N}>2) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - 0,223 - \frac{0,223 \cdot 1,5}{1} - \frac{0,223 \cdot 1,5^2}{2} \Rightarrow \boxed{P(\bar{N}>2) = 0,1}$

δ) $T = 1/\mu \Rightarrow \boxed{T = 0,5}$

ΘΕΜΑ 3



1: M/M/2 , $\mu_1 = 15$

2: M/M/1 , $\mu_2 = 15$

3: M/M/2 , $\mu_3 = 10$

α) $\lambda_3 =$;

β) $P_0 =$;

γ) $P_1 =$;

δ) $\overline{N_{q(3)}} =$;

ε) $\overline{N} =$;

στ) W_{max}: Πού;

a)

$\boxed{\lambda_1 = 20}$

$\lambda_2 = 5 + 0{,}25 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 10}$

$\lambda_3 = 5 + 0{,}25 \cdot \lambda_1 + 0{,}5 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 15}$

b) $P_{0(1)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho_1)^k}{k!} \right] + \frac{(m \cdot \rho_1)^m}{m! \cdot (1-\rho)} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{1} \left[\frac{1{,}34^k}{k!} \right] + \frac{1{,}34^2}{2 \cdot 0{,}33} \right\}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{0(1)} = \{1 + 1{,}34 + 2{,}72\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(1)} = 0{,}198}$

$P_{0(2)} = 1 - \rho_2 = 1 - 0{,}67 \Rightarrow \boxed{P_{0(2)} = 0{,}33}$

$P_{0(3)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m \cdot \rho_3)^k}{k!} \right] + \frac{(m \cdot \rho_3)^m}{m! \cdot (1-\rho_3)} \right\}^{-1} = \left\{ \frac{1{,}5^k}{k!} + \frac{1{,}5^2}{2 \cdot 0{,}25} \right\}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{0(3)} = \{1 + 1{,}5 + 4{,}5\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(3)} = 0{,}143}$

$P_0 = P_{0(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{0(3)} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0{,}01}$

γ) $P_{1(1)} = P_{0(1)} \cdot \frac{(m \cdot \rho_1)^1}{1!} = 0,198 \cdot 1,34 \Rightarrow \boxed{P_{(1)(1)} = 0,27}$

$P_{1(2)} = \rho_2 \cdot P_{0(2)} = 0,67 \cdot 0,33 \Rightarrow \boxed{P_{1(2)} = 0,22}$

$P_{1(3)} = P_{0(3)} \cdot \frac{(m \cdot \rho_3)^1}{1!} = 0,143 \cdot 1,5 \Rightarrow \boxed{P_{1(3)} = 0,21}$

$P(N=1) = P_{1(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{0(3)} + P_{0(1)} \cdot P_{1(2)} \cdot P_{0(3)} + P_{0(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{1(3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(N=1) = 0,27 \cdot 0,33 \cdot 0,143 + 0,198 \cdot 0,22 \cdot 0,143 + 0,198 \cdot 0,33 \cdot 0,21$

$\Rightarrow \boxed{P(N=1) = 0,033}$

δ) $\bar{N}_{q(3)} = P_{0(3)} \cdot \frac{m^m \cdot \rho_3^{m+1}}{m! \cdot (1-\rho^2)} = \frac{0,143 \cdot 4 \cdot 0,75^3}{2 \cdot \underbrace{(1-0,75^2)}_{0,875}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{N}_{q(3)} = 0,28}$

ε) $\overline{N_1} = \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \cdot \frac{m^m \cdot \rho_1^{m+1}}{2 \cdot (1-\rho_1^2)} = 1{,}33 + \frac{0{,}198 \cdot 4 \cdot 0{,}67^3}{2 \cdot 0{,}55} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 1{,}55}$

$\overline{N_2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0{,}67}{0{,}33} \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 2}$

$\overline{N_3} = \frac{\lambda}{\mu} + \overline{N_{q(3)}} = 1{,}5 + 0{,}28 \Rightarrow \boxed{\overline{N_3} = 1{,}78}$

$\overline{N} = \overline{N_1} + \overline{N_2} + \overline{N_3} \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 5{,}33}$

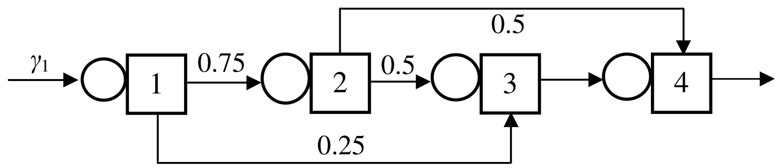
θ-ζ) $T_1 = \frac{\overline{N_1}}{\lambda_1} \Rightarrow \boxed{T_1 = 0{,}078}$

$T_2 = \frac{\overline{N_2}}{\lambda_2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 0{,}2} \leftarrow MAX$

$T_3 = \frac{\overline{N_3}}{\lambda_3} \Rightarrow \boxed{T_3 = 0{,}12}$

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μ.Π.Δ.
Ημερομηνία: 6 Φεβρουαρίου 2021
Τελική εξέταση στο μάθημα Δίκτυα Παραγωγής

ΘΕΜΑ 1: Ένα εστιατόριο πρόχειρου φαγητού μπορεί να περιγραφεί από το δίκτυο του σχήματος. Ό πρώτος κόμβος είναι τα ταμεία που δέχονται τις παραγγελίες και οι υπόλοιποι κόμβοι εκφράζουν κάποιες από τις βασικές διεργασίες ετοιμασίας γευμάτων. Όλοι οι κόμβοι διαθέτουν έναν εξυπηρετητή με εξαίρεση τον πρώτο κόμβο που διαθέτει δύο. Οι αφίξεις πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson και γίνονται με ρυθμο $\gamma_1 = 4$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησεις είναι εκθετικοί και οι μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησεις είναι $\mu_1 = 2.5$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 3$ και $\mu_4 = 5$.



α. Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στο εστιατόριο; **(2.5)**
β. Ποια η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς ένας πελάτης στο εστιατόριο; **(1.5)**

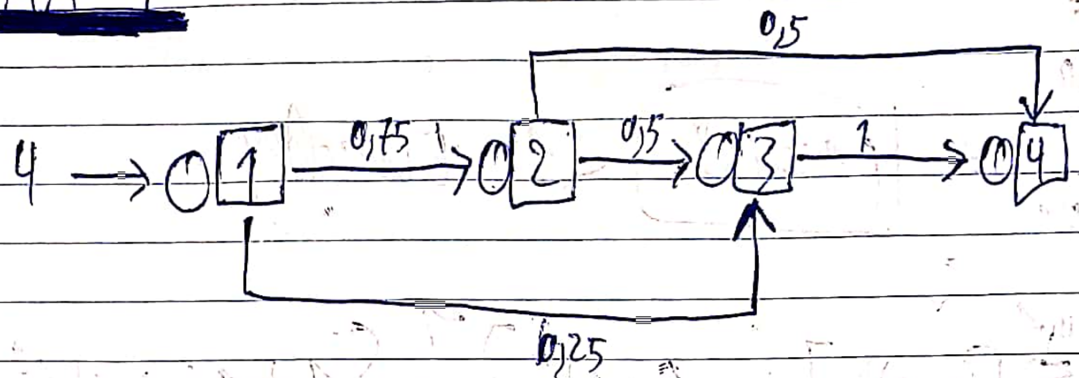
ΘΕΜΑ 2: Σε ένα πάρκινγκ k θέσεων φθάνουν αυτοκίνητα με τυχαίο τρόπο. Οι αφίξεις αυτοκινήτων ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ. Οι χρονικές διάρκειες διαδοχικών σταθμεύσεων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και είναι ανεξάρτητες από την διαδικασία των αφίξεων. Τα αυτοκίνητα που βρίσκουν το πάρκινγκ πλήρες αναχωρούν.
α. Υπολογίστε την κατανομή των αυτοκινήτων στο πάρκινγκ στη μόνιμη κατάσταση. **(1)**
β. Ποιά είναι η πιθανότητα ένα εισερχόμενο αυτοκίνητο να βρει το πάρκινγκ πλήρες; **(1)**
γ. Εκτιμήστε το μέσο πλήθος αυτοκινήτων στο πάρκινγκ. **(1)**

ΘΕΜΑ 3: Η παραγωγή ενός προϊόντος γίνεται σε δύο φάσεις. Η διάρκεια κάθε φάσης είναι εκθετική με ρυθμό μ_1 και μ_2 αντίστοιχα. Για την έναρξη της παραγωγής ενός προϊόντος πρέπει να έχει ολοκληρωθεί η δεύτερη φάση του προηγούμενου. Οι αφίξεις των παραγγελιών είναι επίσης τυχαίες με ρυθμό λ και ακολουθούν την κατανομή Poisson.
α. Βρείτε το μέσο πλήθος εκκρεμμών παραγγελιών και το μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα. **(1)**
β. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικοί με ρυθμό $\mu_1+\mu_2$. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε μικρότερους χρόνους παραμονής; **(1)**
γ. Αν το πρώτο στάδιο παραγωγής αυτοματοποιηθεί χωρίς να αλλάξει ο μέσος χρόνος επεξεργασίας, πως αλλάζουν το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών και ο μέσος χρόνο παραμονής στο σύστημα; **(1)**

Καλή επιτυχία!

2021 Φεβρ

ΘΕΜΑ 1



1: M/M/2 , $\mu_1 = 2{,}5$

2: M/M/1 , $\mu_2 = 4$

3: M/M/1 , $\mu_3 = 3$

4: M/M/1 , $\mu_4 = 5$

α) $\bar{N} =$;

β) $P(\bar{N} = 1) =$;

α) $\boxed{\lambda_1 = 4}$

$\lambda_2 = 0{,}75 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 3}$

$\lambda_3 = 0{,}5 \cdot \lambda_2 + 0{,}25 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 2{,}5}$

$\lambda_4 = \lambda_3 + 0{,}5 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 4}$

Κόμβος 1

M/M/2

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_1} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0{,}8} < 1 \text{ Ευσταθής}$$

$$P_{0(1)} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{(m\cdot\rho_1)^k}{k!}\right] + \frac{(m\cdot\rho_1)^m}{m!\,(1-\rho_1)} \right\}^{-1} = \left\{ 1 + 1{,}6 + \frac{1{,}6^2}{2\cdot 0{,}2} \right\}^{-1} =$$

$$\Rightarrow P_{0(1)} = \{9\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_{0(1)} = 0{,}11}$$

$$\overline{N_1} = \overline{N_{s(1)}} + \overline{N_{q(1)}} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + P_{0(1)} \cdot \frac{m^m \cdot \rho_1^{m+1}}{m!\cdot(1-\rho_1^2)} = 1{,}6 + \frac{0{,}11\cdot 4\cdot 0{,}8^3}{2\cdot 0{,}36}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 1{,}91}$$

Κόμβος 2

M/M/1 $\quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0{,}75 \Rightarrow \overline{N_2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 3}$

Κόμβος 3

M/M/1 $\quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0{,}83 \Rightarrow \overline{N_3} = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} \Rightarrow \boxed{\overline{N_3} = 4{,}88}$

Κόμβος 4

M/M/1 $\rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} = 0{,}8 \Rightarrow \overline{N_4} = \frac{\rho_4}{1-\rho_4} \Rightarrow \boxed{\overline{N_4} = 4}$

$\overline{N} = \overline{N_1} + \overline{N_2} + \overline{N_3} + \overline{N_4} \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 13{,}79}$

β) Κόμβος 1

$\boxed{P_{0(1)} = 0{,}11}$

$P_{1(1)} = \frac{P_{0(1)} \cdot (m \cdot \rho_1)^1}{m!} = \frac{0{,}11 \cdot \cancel{1{,}6}^{0{,}8}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{P_{1(1)} = 0{,}09}$

Κόμβος 2

$P_{0(2)} = 1 - \rho_2 = 1 - 0{,}75 \Rightarrow \boxed{P_{0(2)} = 0{,}25}$

$P_{1(2)} = \rho_2 \cdot (1 - \rho_2) \Rightarrow \boxed{P_{1(2)} = 0{,}19}$

Κόμβος 3

$P_{0(3)} = 1 - \rho_3 = 1 - 0{,}83 \Rightarrow \boxed{P_{0(3)} = 0{,}17}$

$P_{1(3)} = \rho_3 \cdot (1 - \rho_3) \Rightarrow \boxed{P_{1(3)} = 0{,}14}$

Κόμβος 4

$P_0(4) = 1 - p_4 \Rightarrow \boxed{P_0(4) = 0{,}2}$

$P_1(4) = p_4 \cdot (1 - p_4) \Rightarrow \boxed{P_1(4) = 0{,}16}$

$$P(\overline{N}=1) = P_{1(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{0(3)} \cdot P_{0(4)} + P_{0(1)} \cdot P_{1(2)} \cdot P_{0(3)} \cdot P_{0(4)} + P_{0(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{1(3)} \cdot P_{0(4)} + P_{0(1)} \cdot P_{0(2)} \cdot P_{0(3)} \cdot P_{1(4)} =$$

$$= 0{,}09 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}2 + 0{,}11 \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}2 + 0{,}09 \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}2 + 0{,}11 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}16$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\overline{N}=1) = 0{,}0027}$$

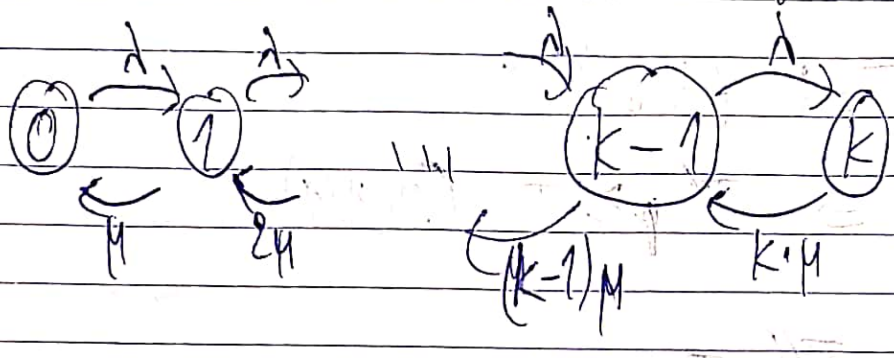
Scanned with CamScanner

ΘΕΜΑ 2

$M/M/m/m \Rightarrow \boxed{M/M/k/k}$

α) Κατανομή
β) πιθανότητα πλήρες
γ) μέσο πλήθος

α)



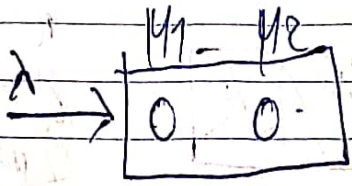
β) $P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{k} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \right\}^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0 = \ldots}$

$P_k = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \Rightarrow \boxed{P_k = \ldots}$

γ) $\bar{N} = \bar{N}_s + \cancel{\bar{N}_q}^{\,0} = \bar{\lambda} \cdot \bar{X} = \frac{\lambda \cdot (1 - P_k)}{\mu} \Rightarrow \boxed{\bar{N} = \ldots}$

ΘΕΜΑ 3

M/G/1



α) $\bar N = ;$ $\quad T = ;$ (M/G/1)

β) $\mu = \mu_1 + \mu_2 \Rightarrow T' \gtrless T$ (M/M/1)

γ) M/D/1 $\quad \bar N'' \lessgtr \bar N, \ T'' \lessgtr T$

(αντικατασταθεί;)

α) $\bar X = \bar X_1 + \bar X_2 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \cdot \mu_2} \xRightarrow{\bar x = \frac{1}{\mu}} \boxed{\mu = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$

$Var(x) = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2} \rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2}}$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\lambda \cdot (\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \cdot \mu_2}}$

M/G/1

$$\overline{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_x^2}{2\cdot(1-\rho)} = \frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\cdot\mu_2} +$$

$$+ \left[\frac{\lambda^2\cdot(\mu_1+\mu_2)^2}{\mu_1^2\cdot\mu_2^2} + \lambda^2\cdot\frac{(\mu_1^2+\mu_2^2)}{\mu_1^2\cdot\mu_2^2}\right]\cdot\frac{1}{2\cdot\left[\frac{\mu_1\cdot\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\cdot\mu_2}\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\cdot\mu_2} + \frac{\lambda^2\cdot(\mu_1^2+2\mu_1\cdot\mu_2+\mu_2^2+\mu_1^2+\mu_2^2)}{2\cdot\mu_1\cdot\mu_2\,[\mu_1\cdot\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\cdot\mu_2} + \frac{\lambda^2\cdot\cancel{2}\cdot(\mu_1^2+\mu_1\cdot\mu_2+\mu_2^2)}{\cancel{2}\,\mu_1\cdot\mu_2\cdot[\mu_1\cdot\mu_2-\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)\cdot[\mu_1\cdot\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)] + \lambda^2\cdot(\mu_1^2+\mu_1\cdot\mu_2+\mu_2^2)}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot[\mu_1\cdot\mu_2-\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)]}$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)\cdot\mu_1\cdot\mu_2 - \lambda^2\cdot(\mu_1+\mu_2)^2 + \lambda^2\cdot(\mu_1^2+\mu_1\cdot\mu_2+\mu_2^2)}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot[\mu_1\cdot\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)]}$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)\cdot\cancel{\mu_1\cdot\mu_2} - \lambda^2\cdot\cancel{\mu_1\cdot\mu_2}}{\cancel{\mu_1\cdot\mu_2}\cdot[\mu_1\cdot\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)]} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{N} = \frac{\lambda \cdot (\mu_1 + \mu_2) - \lambda^2}{\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda \cdot (\mu_1 + \mu_2)}}$$

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \lambda}{\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda (\mu_1 + \mu_2)}}$$

B) $$T' = \frac{\bar{N'}}{\lambda} = \frac{\frac{\rho'}{1-\rho'}}{\lambda} = \frac{\frac{\cancel{\lambda}}{\mu_1+\mu_2}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)\cancel{\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' = \frac{\frac{1}{\cancel{\mu_1+\mu_2}}}{\frac{\mu_1+\mu_2-\lambda}{\cancel{\mu_1+\mu_2}}} \Rightarrow \boxed{T' = \frac{1}{\mu_1+\mu_2-\lambda}}$$

$$\rho < 1 \Rightarrow \frac{\lambda \cdot (\mu_1+\mu_2)}{\mu_1 \cdot \mu_2} < 1 \Rightarrow \boxed{-\lambda \cdot (\mu_1+\mu_2) + \mu_1 \cdot \mu_2 > 0} \quad (1)$$

$$\rho' < 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} < 1 \Rightarrow \boxed{\mu_1+\mu_2-\lambda > 0}, \quad (2)$$

Έστω $T' > T$

$$\frac{1}{\mu_1+\mu_2-\lambda} > \frac{\mu_1+\mu_2-\lambda}{\mu_1\cdot\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)} \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \mu_1\cdot\mu_2-\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2) > (\mu_1+\mu_2+\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \mu_1\cdot\mu_2-\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2) > (\mu_1+\mu_2)^2 + 2\lambda(\mu_1+\mu_2) + \lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1\cdot\mu_2-\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2) > \mu_1^2 + 2\mu_1\cdot\mu_2 + \mu_2^2 + 2\lambda(\mu_1+\mu_2) + \lambda^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_1^2}_{>0} + \underbrace{\mu_1\cdot\mu_2}_{>0} + \underbrace{\mu_2^2}_{>0} + 3\cdot\underbrace{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)}_{>0} + \underbrace{\lambda^2}_{>0} < 0$$

ΑΤΟΠΟ

Άρα $\boxed{T' < T}$

γ) $M/D/1 \rightarrow M/G/1, \ \sigma_x^2 = 0$

$$\overline{N}'' = \rho + \frac{\rho^2 + \cancel{\lambda^2 \cdot \sigma_x^2}^{\,0}}{2 \cdot (1-\rho)} = \frac{\lambda \cdot (\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \cdot \mu_2} + \frac{\frac{\lambda^2 \cdot (\mu_1+\mu_2)^2}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2}}{2 \cdot \left[\frac{\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda (\mu_1+\mu_2)}{\mu_1 \cdot \mu_2}\right]}$$

$$\Rightarrow \overline{N}'' = \frac{\lambda \cdot (\mu_1+\mu_2)}{\mu_1 \cdot \mu_2} + \frac{\lambda^2 \cdot (\mu_1+\mu_2)^2}{2 \cdot [\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda \cdot (\mu_1+\mu_2)] \cdot \mu_1 \cdot \mu_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N}'' = \frac{\lambda \cdot (\mu_1+\mu_2) \cdot 2 \cdot [\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda \cdot (\mu_1+\mu_2)] + \lambda^2 \cdot (\mu_1+\mu_2)^2}{2 \cdot [\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda (\mu_1+\mu_2)] \cdot \mu_1 \cdot \mu_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{N}'' = \frac{2 \cdot \lambda \cdot (\mu_1+\mu_2) \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 - 2 \cdot \lambda^2 \cdot (\mu_1+\mu_2)^2 + \lambda^2 \cdot (\mu_1+\mu_2)^2}{2 \cdot [\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda (\mu_1+\mu_2)] \cdot \mu_1 \cdot \mu_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{N}'' = \frac{2 \cdot \lambda \cdot (\mu_1+\mu_2) \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda^2 \cdot (\mu_1+\mu_2)^2}{2 \cdot [\mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda \cdot (\mu_1+\mu_2)] \cdot \mu_1 \cdot \mu_2}}$$

Έστω $\bar{N}'' > \bar{N}$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)\cdot\mu_1\cdot\mu_2 - \lambda^2\cdot(\mu_1+\mu_2)^2}{2\cdot\underbrace{\cancel{[\mu_1\cdot\mu_2 - \lambda(\mu_1+\mu_2)]}}_{>0}\mu_1\cdot\mu_2} > \frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2) - \lambda^2}{\underbrace{\cancel{\mu_1\cdot\mu_2 - \lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)}}_{>0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\cdot\cancel{(\mu_1+\mu_2)} - \frac{\cancel{\lambda^2}(\mu_1+\mu_2)^2}{2\cdot\mu_1\cdot\mu_2} > \cancel{\lambda(\mu_1+\mu_2)} - \cancel{\lambda^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\mu_1+\mu_2)^2}{2\mu_1\cdot\mu_2} < 1 \Rightarrow \mu_1^2 + \cancel{2\mu_1\cdot\mu_2} + \mu_2^2 < \cancel{2\mu_1\cdot\mu_2}$$

$$\Rightarrow \mu_1^2 + \mu_2^2 < 0$$ Άτοπο.

Άρα $\boxed{\bar{N}'' < \bar{N}} \xRightarrow{\div\lambda} \boxed{T'' < T}$